

Condiciones de cadena en espacios topológicos

Alejandro Ríos Herrejón
Ángel Tamariz Mascarúa

aportaciones **matemáticas**

electrónicas

am^e 5

Condiciones de cadena en espacios topológicos

**Alejandro Ríos Herrejón
Ángel Tamariz Mascarúa**

Comité Editorial

Marcelo Aguilar González de la Vega *IM, UNAM*

José Luis Cisneros-Molina *IM, UNAM*

José Ma. González Barrios Murguía *IIMAS, UNAM*

Jesús González Espino Barros *CINVESTAV*

Luis Hernández Lamonedá *CIMAT*

Jorge León Vázquez *CINVESTAV*

Max Neumann Coto *IM, UNAM*

Laura Ortiz Bobadilla *IM, UNAM*

Sergio Rajsbaum Gorodezky *IM, UNAM*

Jorge X. Velasco Hernández *IM, UNAM*

Editores Ejecutivos

Juan José Montellano Ballesteros

Instituto de Matemáticas, UNAM

juancho@im.unam.mx

José Luis Cisneros-Molina

Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, UNAM

jlcm@matcuer.unam.mx

jlcisneros@im.unam.mx

Aportaciones Matemáticas
Electrónicas

Condiciones de cadena en espacios topológicos

Alejandro Ríos Herrejón
Ángel Tamariz Mascarúa



aportaciones**matemáticas**
electrónicas



Ciudad de México, 2026

Autores:

Alejandro Ríos Herrejón

Ángel Tamariz Mascarúa

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000, Circuito Exterior S/N Ciudad Universitaria,
Alcaldía de Coyoacán, 04510,
Ciudad de México
`chanchito@ciencias.unam.mx`
`atamariz@unam.mx`

1a. Edición, 2026

Colección *Aportaciones matemáticas electrónicas*, Núm. 5

Fecha de edición: agosto de 2026

D.R. © 2026 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad Universitaria, Alcaldía de Coyoacán,
C.P. 04510, Ciudad de México.

ISBN: 978-607-30-9059-9 (Aportaciones matemáticas electrónicas)

ISBN: (Condiciones de cadena en espacios topológicos)

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en México.

Edición:

Instituto de Matemáticas, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, Ciudad de México

Condiciones de cadena en espacios topológicos, de Alejandro Ríos Herrejón y Ángel Tamariz Mascarúa, es un texto de nivel medio.

La teoría de procesos estocásticos constituye hoy en día una rama ampliamente desarrollada de la probabilidad, con aplicaciones tanto dentro de la matemática como fuera de ella, en áreas tales como ingeniería, genética, estadística, biomatemáticas, economía matemática y telecomunicaciones, entre otras. Existe también una conexión dentro de las matemáticas entre los procesos estocásticos y las ecuaciones con derivadas parciales deterministas, los semigrupos de operadores y la teoría del potencial.

El material del libro está pensado para proporcionar una cultura básica moderna y sólida en el área de los procesos estocásticos, cultura que permita seguir con éxito en varias direcciones de investigación o aplicaciones.

Índice general

Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Teoría de conjuntos	1
1.2. Resultados conjuntistas auxiliares	3
1.3. Topología general	7
1.4. Resultados topológicos auxiliares	11
1.5. Conjuntos preordenados	13
1.6. Condiciones de cadena en conjuntos preordenados	15
1.7. Condiciones de cadena en productos de preórdenes	19
2. Condiciones de cadena en espacios topológicos	23
2.1. Nociones fundamentales	23
2.2. Condiciones de cadena y cofinalidad	28
2.3. Relaciones entre calibres, precalibres y precalibres débiles	31
2.4. Condiciones de cadena en sumas topológicas	35
2.5. Condiciones de cadena en productos topológicos	36
2.6. Ejemplos sobresalientes	41
2.7. Un resultado de factorización	47
2.8. Precalibres singulares para productos topológicos	48
3. Celularidad en productos topológicos	57
3.1. Precalibres y celularidad	57
3.2. El enunciado $A(\kappa)$	58
3.3. La topología de los conos	60
3.4. El espacio de Gleason	61

3.5. $MA(\omega_1)$ implica $A(\omega_1)$	64
3.6. CH implica $\neg A(\omega_1)$	68
3.7. El Problema de Souslin	78
4. Grupos topológicos y espacios de Šanin	81
4.1. Precalibres débiles en grupos topológicos	81
4.2. Propiedades de los espacios de Šanin	85
4.3. Ejemplos de espacios de Šanin	89
4.4. Separabilidad y la propiedad de Šanin	92
5. Condiciones de cadena* en espacios topológicos	99
5.1. Calibres*, precalibres* y precalibres* débiles	99
5.2. Ejemplos concretos	108
5.3. Espacios hiperconexos	113
5.4. Condiciones de cadena* en sumas topológicas	120
5.5. Condiciones de cadena* en productos topológicos	123
5.6. Condiciones de cadena en productos caja	130
6. Condiciones de cadena en $\mathcal{F}[X]$	133
6.1. Hiperespacios de Pixley–Roy	134
6.2. Precalibres y precalibres débiles en $\mathcal{F}[X]$	136
6.3. Espacios débilmente separados	141
6.4. Propiedades de los espacios débilmente separados	149
6.5. La condición $C(\kappa)$ en productos topológicos	155
6.6. El grado de Lindelöf débil de $\mathcal{F}[X]$	158
7. Condiciones de cadena en $C_p(X)$	165
7.1. Espacios C_p	165
7.2. Calibres de $C_p(X)$ cuando X es submetrizable	170
7.3. Calibres de $C_p(X)$ cuando X es un intervalo de ordinales	174
7.4. Calibres de $C_p(X)$ cuando X es la extensión λ -Lindelöf	177
7.5. Calibres de $C_p(X)$ cuando X es un producto topológico	184
7.6. Calibres de $C_p(X)$ cuando X es una suma topológica	187
Bibliografía	195
Tabla de símbolos	203
Índice analítico	207

Introducción

El material que presentamos en este libro está dirigido a los estudiantes avanzados de alguna licenciatura en matemáticas, a estudiantes de posgrado, a profesores e investigadores interesados en la topología conjuntista y en la teoría de conjuntos, y en fin a todos aquellos atraídos en analizar las relaciones de la topología con los ordenes parciales, las álgebras booleanas, la combinatoria infinita, los números ordinales y cardinales, los filtros y ultrafiltros, y los axiomas adicionales a ZFC.

El proyecto de reunir el material que presentamos en este texto, se inició cuando los autores nos planteamos la pregunta de cuándo podemos, al tomar una familia “grande” de subconjuntos abiertos en un espacio topológico, garantizar la existencia de una subcolección suficientemente “grande” aún, cuyos elementos contengan un punto en común, o por lo menos que las relaciones conjuntistas de los elementos de esta subfamilia generen un filtro.

Este problema está evidentemente ligado al estudio de la fuerte estructura de los espacios topológicos que cumplen la *condición de cadena numerable*, o en términos más actuales, espacios de *celularidad numerable*; es decir, espacios cuyas familias de abiertos ajenos por pares son numerables, de “pequeño” tamaño. La pregunta concreta que nos planteamos fue: ¿Todo espacio con celularidad numerable satisface que cualquiera de sus colecciones de cardinalidad $\aleph_1$ formada por conjuntos abiertos posee una subcolección de la misma cardinalidad $\aleph_1$ cuyos elementos comparten por lo menos un punto del espacio?

Estábamos de esta manera invocando lo que suele llamarse *condiciones de cadena en espacios topológicos*, y con ello a una serie de herramientas conjuntistas involucradas; en particular, claro está, a la aritmética de ordinales y cardinales, a la combinatoria infinita, a las familias casi ajenas, al Teorema de la Raíz, a la teoría de Ramsey, y, por fin, a los axiomas adicionales y consistentes con los axiomas de Zermelo-Fraenkel más el axioma de elección (ZFC) como son la Hipótesis del Continuo y el Axioma de Martin.

El lenguaje básico que nos permite adentrarnos a todo este asunto es sin duda el de función topológica de cardinales; es decir, funciones que asocian a cada espacio

topológico un número cardinal de tal modo que a espacios homeomorfos le corresponden el mismo número cardinal. Mencionemos aquí a guisa de ejemplo dos de ellas involucradas íntimamente a nuestro texto: La densidad de un espacio X , $d(X)$, es el mínimo número cardinal de un subconjunto denso de X ; y la celularidad de X , $c(X)$, que es el supremo de los números cardinales de las colecciones formadas por abiertos disjuntos por pares.

El concepto central de esta monografía es el de *calibre*: Un número cardinal κ es un calibre del espacio X si para cada familia de subconjuntos abiertos de X indizada por κ , $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi < \kappa\}$, existe $J(\mathcal{U}) \subseteq \kappa$ tal que $|J(\mathcal{U})| = \kappa$ y $\bigcap \{U_\xi : \xi \in J(\mathcal{U})\} \neq \emptyset$.

La reflexión sobre los calibres se inicia con los trabajos de Šanin en los años 1946 - 1948¹. Sobresale el teorema de Šanin relacionado con calibres en productos de espacios, que en este libro se trata en el capítulo 2 (véase en particular el teorema 2.5.5). La idea de celularidad fue estudiada por Cantor en 1882, [12], y aparece en el famoso problema de Souslin presentado en 1930 [73], relacionado estrechamente con nuestro tema y que estudiamos en la sección 7 del capítulo 3. Sin embargo, la celularidad fue trabajada por primera vez de manera más formal y sistemática por Kurepa en 1935 [43].

La numerosa colección de resultados, técnicas, relaciones entre diferentes nociones matemáticas que da lugar al problema de determinar los calibres de un espacio topológico, hasta los años 80 del siglo pasado, fue recopilada en una excelente monografía de la autoría de W.W. Comfort y S.A. Negrepontis titulada *Chain conditions in topology*, publicada por Cambridge University Press en 1982 [16].

Posteriormente a este célebre texto, han habido esfuerzos para determinar los calibres de diversas clases de espacios topológicos. En particular, en grupos topológicos podemos mencionar las investigaciones de Arkhangel'skii y Tkhachenko, algunos de cuyos resultados presentamos en el capítulo 4 (véase, A. Arkhangel'skii, M. Tkhachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Studies in Mathematics, vol. 1, Editor: J. van Mill, Atlantis Press / World Scientific, 2008, [6]).

También se han estudiado calibres en espacios de funciones continuas. Principalmente, en esta área, mencionamos y revisamos de varios de los teoremas de V. Tkachuk en el capítulo 8. (Recomendamos al lector interesado en los espacios de funciones continuas con la topología de la convergencia puntual acercarse a la extensa obra de cuatro volúmenes de V. Tkachuk titulada *A C_p -Theory Problem Book* publicada por Springer entre los años de 2011 y 2016, en su serie Problem books in Mathematics ([84], [83], [81], [82]).

En la presente monografía incluimos nuestras aportaciones al tema de los calibres; en particular, el estudio de los precalibres en espacios producto (teorema 2.5.10), calibres en los espacios de subconjuntos finitos con la topología de Pixley–Roy que

¹Las notas históricas incluidas en esta introducción son extraídas del libro de Comfort y Negrepontis *Chain conditions in topology* [16].

vemos en el capítulo 6, y el análisis de la diferencia entre la noción de calibre que usamos aquí y la presentada por Engelking en su célebre libro [20], que tratamos en el capítulo 5.

En el capítulo 1 vemos resultados básicos en topología y en teoría de conjuntos e iniciamos el estudio de las condicones de cadena en conjuntos parcialmente ordenados. En el capítulo 2, iniciamos el estudio de calibres, precalibres y precalibres débiles en espacios topológicos, y presentamos los espacios de Šanin. En particular tratamos los teoremas de las condiciones de cadena en producto de espacios, y tratamos el delicado problema del papel de los cardinales singulares como calibres. El capítulo 3 se dedica al estudio de la celularidad en espacios producto y se muestra cómo en este punto se involucran el Axioma de Martin, CH y la línea de Souslin. Los precalibres en grupos topológicos los estudiamos en el capítulo 4. Además, en este capítulo vemos con más detenimiento a los espacios de Šanin. El capítulo 5 lo dedicamos a la discusión sobre la diferencia entre la definición indizada del concepto de calibre que adoptamos en este trabajo, y aquella de Engelking (véase [20, 2.7.11, p. 116]) que dice: un cardinal $\kappa > \aleph_0$ es un *calibre* para un espacio X si cualquier familia de cardinalidad κ consistente en subconjuntos abiertos no vacíos de X , contiene una subfamilia de cardinalidad κ con intersección no vacía. El capítulo 6 está dedicado al espacio de subconjuntos finitos con la topología de Pixley–Roy, y al estudio de los espacios débilmente separados introducidos por M. Tkachenko en [77]. Finalmente, el capítulo 7 lo dedicamos a analizar los calibres en espacios de funciones continuas con la topología de la convergencia puntual. Incluimos a lo largo de esta monografía algunos problemas cuya solución no conocemos y que creemos producen buenos temas de investigación.

Queda fuera del presente trabajo temas tan importantes como los calibres de espacios de subconjuntos con la topología de Vietoris, también el de calibres en espacios de funciones continuas con topologías uniformes sobre compactos, y sobre cerrados separables. Este es un trabajo pendiente que abordaremos en un trabajo posterior.

A quienes se interesen en los temas tratados en este texto y decidan adentrarse en él, les recomendamos haber tenido ya un entrenamiento en topología general (véanse los libros de F. Casarrubias y Á. Tamariz, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, 37, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2023 [13]; y *Topología General* de Richard G. Wilson y René Benítez, publicado por Trillas en 2017, [92]). Con respecto a lo concerniente a la Teoría de Conjuntos, sugerimos que el lector esté familiarizado con los temas tratados, por ejemplo, en *Teoría de Conjuntos* de Fernando Hernández publicado en Aportaciones Matemáticas del Instituto de Matemáticas, UNAM, [31].

Agradecemos a la Profesora María Cristina Sánchez Fuentes por su apoyo en cuestiones de redacción, ortografía y sintaxis de esta monografía en español, y en los artículos de investigación escritos en inglés que resultaron de este trabajo.

1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es familiarizar al lector con los conceptos básicos de teoría de conjuntos y topología general que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Además, se proporciona una breve introducción a los conjuntos preordenados y se establecen hechos básicos al respecto de las condiciones de cadena en éstos.

1.1. Teoría de conjuntos

Cualquier concepto conjuntista que no aparezca definido aquí deberá entenderse como en [31].

Si X y Y son conjuntos, los símbolos $X \cup Y$, $X \cap Y$ y $X \setminus Y$ son, correspondientemente, la *unión*, la *intersección* y la *diferencia* de X con Y .

Por otra parte, $\mathcal{P}(X)$ es el *conjunto potencia* de X , es decir, un conjunto A pertenece a $\mathcal{P}(X)$ si y sólo si A es un subconjunto de X (en símbolos, $A \subseteq X$). Un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ es una *familia de subconjuntos de X* . Además, $\bigcup \mathcal{A}$ representa la *unión de los elementos de $\mathcal{A}$* y, si $\mathcal{A}$ es no vacío, $\bigcap \mathcal{A}$ es la *intersección de los elementos de $\mathcal{A}$* . También, si $Y \subseteq X$, la *traza de $\mathcal{A}$ sobre Y* es el conjunto $\mathcal{A} \upharpoonright_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$. Adicionalmente, $\mathcal{A}$ es *ajena por pares* si $A \cap B = \emptyset$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ distintos.

Sea f una función. El *dominio* de f y la *imagen* de f son, respectivamente, $\text{dom}(f) := \{x : \exists y((x, y) \in f)\}$ y $\text{img}(f) := \{y : \exists x((x, y) \in f)\}$. Por otro lado, si $\text{dom}(f) = X$ y $\text{img}(f) \subseteq Y$ (es decir, si $f : X \rightarrow Y$), diremos que f es *inyectiva* si para cualesquiera $x, y \in X$ la condición $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$; *suprayectiva* si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ con $f(x) = y$, y *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva. En particular, la expresión X es *equipotente a Y* significa que existe una función biyectiva entre X y Y .

Por otra parte, si A es un subconjunto de X , B es un subconjunto de Y y z es un elemento de Y , los conjuntos $f[A] := \{y \in Y : \exists x \in X(f(x) = y)\}$, $f^{-1}[B] := \{x \in X : \exists y \in B(f(x) = y)\}$ y $f^{-1}\{z\} := f^{-1}[\{z\}] = \{x \in X : f(x) = z\}$ son, respectivamente, la

imagen directa de A bajo f , la imagen inversa de B bajo f y la fibra de z bajo f . También, la restricción de f al conjunto A es la función $f|_A: A \rightarrow Y$ dada por $(f|_A)(x) := f(x)$.

El símbolo ${}^X Y$ representa la colección de funciones de X en Y . Una colección de funciones $\mathcal{F}$ es una *familia compatible de funciones* si $\bigcup \mathcal{F}$ es una función. Equivalentemente, $\mathcal{F}$ es una familia compatible de funciones si para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}$ se satisface que $f \cup g$ es una función.

El conjunto X es *numerable* si existe una función inyectiva de X en ω y es *finito* cuando X es numerable y no es equipotente con ω . Además, el símbolo $|X|$ representa la *cardinalidad* de X , es decir, $|X|$ es el único ordinal con el que X es equipotente. Adicionalmente, si κ es un número cardinal, se definen

$$[X]^{<\kappa} := \{A \subseteq X : |A| < \kappa\}, [X]^\kappa := \{A \subseteq X : |A| = \kappa\} \text{ y } [X]^{\leq \kappa} := [X]^\kappa \cup [X]^{<\kappa}.$$

Si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de conjuntos, el símbolo $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ es el *producto cartesiano* de la colección $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$; es decir, un conjunto x pertenece a $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ si y sólo si x es una función de elección para $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$, i.e., $x: \lambda \rightarrow \bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ satisface $x(\alpha) \in X_\alpha$ para cualquier $\alpha < \lambda$. También, es costumbre denotar como una “sucesión transfinita” a los elementos de $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$; verbigracia, la función $x \in \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ queda representada como $(x_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ donde $x_\alpha := x(\alpha)$ para toda $\alpha < \lambda$.

Con la notación del párrafo previo, para cada $\alpha < \lambda$ la función $\pi_\alpha: \prod_{\beta < \lambda} X_\beta \rightarrow X_\alpha$ determinada mediante $\pi_\alpha(x) := x(\alpha)$ es conocida como la α -ésima *proyección canónica*. Adicionalmente, si X es un conjunto y $X_\alpha = X$ para cualquier $\alpha < \lambda$, entonces el producto $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ se denota por X^λ . Por otra parte, un *subproducto* de $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ es un producto de la forma $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$, donde S es un subconjunto de λ . Además, diremos que $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ es un *subproducto finito* de $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ cuando $S \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$.

Los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son, respectivamente, el conjunto de números enteros positivos, el conjunto de números enteros, el conjunto de números racionales y el conjunto de números reales.

Si α es un número ordinal, $\aleph_\alpha$ representa el número cardinal del conjunto ω_α . Además, empleamos el símbolo ω para denotar al primer ordinal infinito y, por ende, al primer cardinal infinito, mientras que $\mathfrak{c}$ es el número cardinal de $\mathbb{R}$.

La *cofinalidad* de un cardinal κ , $\text{cf}(\kappa)$, es el mínimo número ordinal para el cual existe una función $f: \text{cf}(\kappa) \rightarrow \kappa$ de tal forma que, para cada $\alpha < \kappa$, existe $\beta < \text{cf}(\kappa)$ con $\alpha \leq f(\beta)$. Equivalentemente, $\text{cf}(\kappa) = \min\{\gamma < \kappa : \exists \{A_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq [\kappa]^{<\kappa} (\bigcup_{\alpha < \gamma} A_\alpha = \kappa)\}$.

Diremos que un cardinal κ es *regular* si κ es infinito y $\kappa = \text{cf}(\kappa)$. En caso contrario, κ es un cardinal *singular*. Además, denotaremos por κ^+ al *cardinal sucesor* de κ , es decir, al primer cardinal que satisface la relación $\kappa < \kappa^+$.

Un cardinal infinito κ es un *cardinal límite* si para cualquier cardinal $\lambda < \kappa$ se cumple que $\lambda^+ < \kappa$. Por otra parte, κ es un *cardinal límite fuerte* si para todo cardinal $\lambda < \kappa$ se tiene que $2^\lambda < \kappa$. Con esta nomenclatura, κ es *débilmente inaccesible* si es no

numerable, regular y límite, y es *fuertemente inaccesible* si es no numerable, regular y límite fuerte.

La *Hipótesis del Continuo*, CH, es la relación $\mathfrak{c} = \omega_1$. Por otro lado, la *Hipótesis Generalizada del Continuo*, GCH, es el enunciado: *para todo cardinal infinito κ se satisface que $2^\kappa = \kappa^+$* .

A lo largo de este trabajo denotamos por ON y CN a las clases propias formadas por los números ordinales y los números cardinales infinitos, respectivamente. Además, usamos los símbolos R, UR y UC para referirnos a las subcolecciones de CN formadas por los cardinales regulares, los cardinales regulares no numerables y los cardinales con cofinalidad no numerable, correspondientemente.

Si X es una colección dotada de una relación binaria $\leq$ y $x, y \in X$, definimos los intervalos

$$\begin{aligned} [x, \rightarrow) &:= \{z \in X : x \leq z\}, & [x, y] &:= \{z \in X : x \leq z \leq y\}, \\ (\leftarrow, y] &:= \{z \in X : z \leq y\}, & [x, y) &:= \{z \in X : x \leq z < y\}, \\ (x, \rightarrow) &:= \{z \in X : x < z\}, & (x, y] &:= \{z \in X : x < z \leq y\}, \\ (\leftarrow, y) &:= \{z \in X : z < y\} \quad \text{y} \quad (x, y) &:= \{z \in X : x < z < y\}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, el intervalo $[0, \omega_1)$ coincide con el conjunto $\{\alpha \in \text{ON} : 0 \leq \alpha < \omega_1\}$, es decir, $[0, \omega_1)$ es la colección de todos los ordinales numerables.

1.2. Resultados conjuntistas auxiliares

Lo que sigue es presentar una serie de resultados auxiliares que no están relacionados directamente unos con otros. El propósito de esto es facilitar la exposición de las demostraciones que vendrán en los capítulos posteriores.

Un subconjunto X de un cardinal infinito κ es *cofinal* en κ si para cualquier $\alpha < \kappa$ existe $\beta \in X$ con $\alpha < \beta$.

Lema 1.2.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un cardinal regular κ y un conjunto $X \subseteq \kappa$.*

1. X es cofinal en κ .
2. $\sup X = \kappa$ (es decir, $\bigcup X = \kappa$).
3. $|X| = \kappa$.

Demostración. La implicación de (1) a (2) es porque si X es cofinal en κ y $\alpha < \kappa$, entonces existe $\beta \in X$ con $\alpha < \beta$; por ende, $\alpha \in \bigcup X$. Para ver que (2) implica (3) observemos que si $\kappa = \sup X = \bigcup X = \bigcup_{\alpha \in X} \{\alpha\}$, entonces las relaciones $\{\{\alpha\} : \alpha \in X\} \subseteq$

$[\kappa]^{<\kappa}$, $\kappa = \text{cf}(\kappa)$ y $X \subseteq \kappa$ garantizan que $|X| = \kappa$. Finalmente, (1) se sigue de (3) porque si X no es cofinal en κ , entonces existe $\alpha < \kappa$ con $\beta \leq \alpha$ para cualquier $\beta \in X$, es decir, $X \subseteq [0, \alpha]$ y, por consiguiente, $|X| \leq |\alpha| \leq \alpha < \kappa$. $\square$

Lema 1.2.2. *Los siguientes enunciados son ciertos para un cardinal infinito κ y un conjunto $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$.*

1. *Si κ es regular y $|\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}| < \kappa$, entonces existe $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $x_\alpha = x_\beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in J$.*
2. *Si $|\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}| = \kappa$, entonces existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $x_\alpha \neq x_\beta$, siempre que $\alpha, \beta \in J$ son distintos.*

Demostración. El inciso (1) es verdadero puesto que, por la regularidad de κ , la función $f : \kappa \rightarrow \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ definida como $f(\alpha) := x_\alpha$ tiene una fibra de cardinalidad κ , es decir, existe $\beta < \kappa$ tal que $J := f^{-1}\{\beta\}$ tiene tamaño κ . Así, $J \in [\kappa]^\kappa$ y $x_\alpha = x_\beta$ para cualquier $\alpha \in J$.

Para el inciso (2), sea $\sim$ la relación de equivalencia definida en κ del siguiente modo: $\alpha \sim \beta$ si y sólo si $x_\alpha = x_\beta$. Además, sean $e : \kappa / \sim \rightarrow \kappa$ una función de elección y $J := \text{img}(e)$. Observemos que si $\alpha < \kappa$, entonces $\beta := e([\alpha]_\sim)$ cumple $\beta \in J$ y $x_\alpha = x_\beta$; en consecuencia, $\{x_\alpha : \alpha \in J\} = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$. También, si $\alpha, \beta \in J$ son distintos, resulta que $\alpha \not\sim \beta$ y, por ende, $x_\alpha \neq x_\beta$. Finalmente, como $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tiene tamaño κ , $\{x_\alpha : \alpha \in J\} = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $\{x_\alpha : \alpha \in J\}$ está enumerado sin repeticiones, se deduce que la función $f : J \rightarrow \{x_\alpha : \alpha \in J\}$ determinada mediante $f(\alpha) := x_\alpha$ es una función biyectiva y, por extensión, que $|J| = \kappa$. $\square$

Una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ es un Δ -sistema si existe un conjunto r de tal manera que $A \cap B = r$ cuando $A, B \in \mathcal{A}$ son distintos. Al conjunto r se le llama la *raíz* del sistema. El siguiente resultado combinatorio es conocido como el *Lema del Δ -sistema*.

Teorema 1.2.3. *Si κ es un cardinal tal que $\kappa = \text{cf}(\kappa) > \omega$ y $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de conjuntos finitos, entonces existen conjuntos $J \in [\kappa]^\kappa$ y A tales que $A_\alpha \cap A_\beta = A$, siempre que $\alpha, \beta \in J$ son distintos.*

Demostración. Lo primero que haremos será comprobar el siguiente enunciado por inducción matemática.

Afirmación. Si $I \in [\kappa]^\kappa$, $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia enumerada sin repeticiones y existe $n \in \mathbb{N}$ con $|B_\alpha| = n$ para cualquier $\alpha \in I$, entonces existen $J \in [I]^\kappa$ y B con $B_\alpha \cap B_\beta = B$, siempre que $\alpha, \beta \in J$ son distintos.

Si $n = 1$, entonces $J := I$ y $B := \emptyset$ cumplen lo deseado. Ahora supongamos que el resultado es verdadero para n . Además, para cada $x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ sea $I_x := \{\alpha \in I : x \in B_\alpha\}$. Nuestra demostración continúa por casos.

Caso 1. Existe $x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ con $|I_x| = \kappa$.

En estas circunstancias, $\{B_\alpha \setminus \{x\} : \alpha \in I_x\}$ está enumerada sin repeticiones y todos sus elementos tienen cardinalidad n . Por esta razón, la hipótesis de inducción produce $J \in [I_x]^\kappa$ y B_x con $(B_\alpha \setminus \{x\}) \cap (B_\beta \setminus \{x\}) = B_x$, cuando $\alpha, \beta \in J$ son distintos. Luego, J y $B := B_x \cup \{x\}$ satisfacen lo deseado.

Caso 2. Para todo $x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ sucede que $|I_x| < \kappa$.

Construiremos por recursión una sucesión $\{\alpha(\gamma) : \gamma < \kappa\} \subseteq I$ con $B_{\alpha(\gamma)} \cap (\bigcup_{\delta < \gamma} B_{\alpha(\delta)}) = \emptyset$ para cualquier $\gamma < \kappa$. Supongamos que para alguna $\gamma < \kappa$ hemos creado $\{\alpha(\delta) : \delta < \gamma\} \subseteq I$ con la característica deseada. Si $B' := \bigcup_{\delta < \gamma} B_{\alpha(\delta)}$ e $I' := \bigcup_{x \in B'} I_x$, entonces $|I'| < \kappa$ porque $|B'| < \kappa$, $|I_x| < \kappa$ para toda $x \in B'$, y κ es regular. De esta manera, si $\alpha(\gamma) \in I \setminus I'$, sucede que $B_{\alpha(\gamma)} \cap (\bigcup_{\delta < \gamma} B_{\alpha(\delta)}) = \emptyset$. En suma, $J := \{\alpha(\gamma) : \gamma < \kappa\}$ y $B := \emptyset$ cumplen lo requerido.

De vuelta al enunciado del teorema observemos que si $|\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}| < \kappa$, el lema 1.2.2 produce $J \in [\kappa]^\kappa$ con $A_\alpha = A_\beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in J$. Luego, si $\beta \in J$ está fijo, J y $A := A_\beta$ satisfacen lo que necesitamos. Por otra parte, cuando $|\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}| = \kappa$, el lema 1.2.2 genera $I \in [\kappa]^\kappa$ con $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ enumerado sin repeticiones. Además, como la función $g : \{A_\alpha : \alpha \in I\} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}$ determinada mediante $g(A_\alpha) := |A_\alpha|$ tiene una fibra de tamaño κ , existen $n \in \mathbb{N}$ y $L \in [I]^\kappa$ con $|A_\alpha| = n$ para cualquier $\alpha \in L$. Así, la Afirmación produce $J \in [L]^\kappa$ y A con $A_\alpha \cap A_\beta = A$, siempre que $\alpha, \beta \in J$ son distintos. $\square$

Definición 1.2.4. Sean κ y λ números cardinales con $\lambda < \kappa$. Diremos que $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ es una (κ, λ) -sucesión si ésta es una sucesión estrictamente creciente formada por números cardinales que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\kappa_0 = \lambda$;
2. κ_α es un cardinal regular no numerable cuando $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ es un ordinal sucesor;
3. si $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ es un ordinal límite, entonces $\sup\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\} = \kappa_\alpha$, y
4. $\sup\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\} = \kappa$.

Lema 1.2.5. Si κ es un cardinal singular y $\lambda < \kappa$, entonces existe una (κ, λ) -sucesión.

Demostración. Sea $f : \text{cf}(\kappa) \rightarrow \kappa$ una función estrictamente creciente y cofinal (véase [41, Lemma 10.31, p. 33]). Por recursión transfinita se definen $\kappa_0 := \lambda$, $\kappa_\alpha := \sup\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\}$ cuando $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ es límite, y $\kappa_\alpha := \max\{|f(\alpha)|^+, \sup\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\}^+, \omega_1\}$ cuando $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ es sucesor. Así, $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ es una (κ, λ) -sucesión. $\square$

Lema 1.2.6. Sean λ y μ un par de cardinales infinitos tales que $\text{cf}(\mu) \neq \lambda$ y $\mu \neq \lambda$. Si A es un conjunto de cardinalidad λ y $\{a_\gamma : \gamma < \mu\}$ es un subconjunto de A , entonces existe $I \in [\mu]^\mu$ tal que $|\{a_\gamma : \gamma \in I\}| < \lambda$.

Demostración. Si $\mu < \lambda$, entonces $I := \mu$ satisface lo deseado pues $|\{a_\gamma : \gamma < \mu\}| \leq \mu < \lambda$. Cuando $\mu > \lambda$ y $\text{cf}(\mu) > \lambda$, empleamos que la asignación $\mu \rightarrow A$ determinada mediante $\gamma \mapsto a_\gamma$ tiene una fibra de cardinalidad μ para hallar $\delta < \mu$ tal que, si $I := \{\gamma < \mu : a_\gamma = a_\delta\}$, entonces $|I| = \mu$. De este modo, I tiene las propiedades requeridas.

Ahora supongamos que $\mu > \lambda$ y $\text{cf}(\mu) < \lambda$. En vista de que μ es singular, existe una sucesión estrictamente creciente $\{\mu_\alpha : \alpha < \text{cf}(\mu)\}$ con las siguientes características:

1. $\mu_0 = 0$ y $\sup\{\mu_\alpha : \alpha < \text{cf}(\mu)\} = \mu$;
2. $\mu_{\alpha+1}$ es regular para cualquier $\alpha < \text{cf}(\mu)$, y
3. si $\alpha < \text{cf}(\mu)$ es límite, entonces $\sup\{\mu_\beta : \beta < \alpha\} = \mu_\alpha$.

Claramente, $\mu = \bigcup_{\alpha < \text{cf}(\mu)} [\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1})$. Sea α_0 el único ordinal menor a $\text{cf}(\mu)$ con $\lambda \in [\mu_{\alpha_0}, \mu_{\alpha_0+1})$. Para cada $\alpha_0 \leq \alpha < \text{cf}(\mu)$, consideremos la función $f_\alpha : [\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}) \rightarrow A$ definida por $f_\alpha(\gamma) := a_\gamma$ y fijemos $\gamma(\alpha) \in [\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1})$ tal que, si

$$I_\alpha := \{\gamma \in [\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}) : f_\alpha(\gamma) = f_\alpha(\gamma(\alpha))\},$$

entonces $|I_\alpha| = \mu_{\alpha+1}$. Finalmente, si $I := \bigcup \{I_\alpha : \alpha_0 \leq \alpha < \text{cf}(\mu)\}$, entonces $|I| = \mu$ y $|\{a_\gamma : \gamma \in I\}| \leq \text{cf}(\mu) < \lambda$. $\square$

Lema 1.2.7. Los siguientes enunciados son equivalentes para un cardinal regular y no numerable κ .

1. κ es un cardinal límite (equivalentemente, κ es débilmente inaccesible).
2. $|\{\lambda \in \text{CN} : \lambda < \kappa\}| = \kappa$.

Demostración. Para ver que (1) implica (2), supongamos que κ es un cardinal límite y mostremos primero que $\kappa = \aleph_\kappa$. Efectivamente, si $\alpha \in \text{ON}$ satisface $\kappa = \aleph_\alpha$, entonces como κ es no numerable se cumple que $\alpha > 0$, y como κ no es un cardinal sucesor, α no es un ordinal sucesor. De esta manera, α es un ordinal límite y, por ende,

$$\kappa = \text{cf}(\kappa) = \text{cf}(\aleph_\alpha) = \text{cf}(\alpha) \leq \alpha \leq \aleph_\alpha = \kappa;$$

en consecuencia, $\kappa = \aleph_\kappa$. Luego,

$$|\{\lambda \in \text{CN} : \lambda < \kappa\}| = |\{\lambda \in \text{CN} : \lambda < \aleph_\kappa\}| = |\{\aleph_\alpha : \alpha < \kappa\}| = \kappa.$$

Para comprobar que (2) implica (1), supongamos que κ no es un cardinal límite. Esta hipótesis garantiza que κ es un cardinal sucesor. Así, existe $\alpha \in \text{ON}$ tal que $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} |\{\lambda \in \text{CN} : \lambda < \kappa\}| &= |\{\lambda \in \text{CN} : \lambda < \aleph_{\alpha+1}\}| \\ &= |\{\aleph_\beta : \beta < \alpha + 1\}| = |\alpha + 1| \leq \alpha + 1 < \aleph_{\alpha+1} = \kappa. \end{aligned}$$

□

1.3. Topología general

Los conceptos de índole topológica que no estén definidos en este escrito los trataremos como vienen expuestos en [13].

Una *topología* en un conjunto X es una familia de subconjuntos τ de X que satisface las condiciones:

1. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$;
2. $U \cap V \in \tau$ siempre que $U, V \in \tau$, y
3. si $\mathcal{U} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

En estas circunstancias, la pareja (X, τ) es un *espacio topológico*. Cuando no haya ambigüedad al respecto de la topología, únicamente empleamos la letra X para designar al par (X, τ) .

Si X es un espacio topológico, usamos el símbolo τ_X para hablar de la topología de X . Similarmente, denotamos por τ_X^+ al conjunto $\tau_X \setminus \{\emptyset\}$. Para un punto $x \in X$, $\tau_X(x)$ representará al subconjunto de τ_X formado por los abiertos que tienen a x como elemento. Además, si A es un subconjunto de X , utilizamos los símbolos $\text{int } A$ y $\bar{A}$ para referirnos al interior y la cerradura de A en el espacio X , respectivamente.

La frase *X es un espacio T_1* significa que todo $x \in X$ satisface que $\{x\}$ es cerrado en X . Además, X es T_2 , T_3 y T_4 si X es, respectivamente, un espacio de Hausdorff, un espacio regular y T_1 , y un espacio normal y T_1 .

Un subconjunto U de un espacio topológico X es un *abierto regular* si $U = \text{int } \bar{U}$. Similarmente, un subconjunto A de X es un *cerrado regular* si $A = \overline{\text{int } A}$. Observe que si $\text{AR}(X) := \{U \subseteq X : U \text{ es abierto regular}\}$ y $\text{CA}(X) := \{A \subseteq X : A \text{ es abierto y cerrado}\}$, entonces $\text{CA}(X) \subseteq \text{AR}(X)$.

Diremos que un espacio X es *extremadamente disconexo* si para cualquier $U \in \tau_X$ se satisface que $\bar{U} \in \tau_X$. Por otro lado, X es *semirregular* si $\text{AR}(X)$ es una base para X y es *cero-dimensional* si $\text{CA}(X)$ es una base para X .

Un espacio topológico Y es una *extensión* de X si éste es un subespacio denso de Y . Por ejemplo, en el caso de los espacios de Hausdorff, la *extensión de Katětov* de X , denotada por κX (véase [54]), es una extensión de X .

Una *compactación* de X es una extensión compacta de éste. En el ámbito de los espacios de Tychonoff, la compactación posiblemente más reconocida es la *compactación de Stone-Čech* de X , βX (véase [91]). Por otra parte, si X es localmente compacto, no compacto y T_2 , el símbolo αX representa la *compactación de Alexandroff* de X (véase [54, Proposition (c)(2), p. 252]).

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos. La función f es *continua* si $f^{-1}[U] \in \tau_X$ para cualquier $U \in \tau_Y$; *abierta* si $f[U] \in \tau_Y$ para todo $U \in \tau_X$, y *cerrada* si $f[F]$ es cerrado en Y siempre que F es cerrado en X . Además, f es una *condensación* si f es biyectiva y continua, y f es un *homeomorfismo* si f es biyectiva, continua y abierta (equivalentemente, biyectiva, continua y cerrada). El símbolo $X \cong Y$ significa que X es homeomorfo a Y , es decir, que existe un homeomorfismo entre X y Y .

Para un número cardinal κ , utilizamos el símbolo $D(\kappa)$ para hablar del espacio discreto de cardinalidad κ , es decir, $D(\kappa)$ es el número ordinal κ equipado con la topología $\mathcal{P}(\kappa)$.

La *recta de Sorgenfrey*, $\mathbb{S}$, es el conjunto $\mathbb{R}$ equipado con la topología generada por la base $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$.

Sean λ un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios topológicos. La *topología producto* es la menor topología en $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ que hace continuas a todas las proyecciones canónicas. El *producto topológico* de la familia $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es el conjunto $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ equipado con la topología producto. Un *abierto canónico* en $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ es cualquier elemento de la base canónica para la topología producto, es decir, cualquier elemento de la colección

$$\left\{ \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha] : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \wedge \forall \alpha \in F (U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}) \right\}.$$

Por otra parte, la *topología suma* es la topología definida en $\bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ del siguiente modo: un subconjunto U de $\bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ es abierto si y sólo si $U \cap X_\alpha$ es abierto en X_α para cualquier $\alpha < \lambda$. La *suma topológica* de la familia $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es el conjunto $\bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ equipado con la topología suma. Como es costumbre, al trabajar con sumas topológicas supondremos tácitamente que $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia ajena por pares y utilizaremos el símbolo $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$.

Si $\mathcal{U}$ es un subconjunto ajeno por pares de τ_X^+ , diremos que $\mathcal{U}$ es una *familia celular* en X . Adicionalmente, X satisface la *condición de la cadena contable* (abreviado *ccc*) si todas las familias celulares en X son numerables.

Los términos *familia centrada* y *familia con la propiedad de la intersección finita* en X significan lo mismo; es decir, se utilizan para designar a una colección de subconjuntos tales que la intersección de los elementos de cualquiera de sus subcolecciones

finitas es no vacía. Por ejemplo, X es compacto si y sólo si toda familia centrada y no vacía formada por subconjuntos cerrados del espacio tiene intersección no vacía.

Por otro lado, un subconjunto $\mathcal{U}$ de τ_X^+ es *ligado* si y sólo si para cualesquiera $U, V \in \mathcal{U}$ se satisface que $U \cap V \neq \emptyset$.

Un cardinal infinito κ es un *precalibre* (resp., *precalibre débil*) para X si para cualquier conjunto I de cardinalidad κ y para cualquier familia $\{U_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \tau_X^+$, existe $J \in [I]^\kappa$ de tal modo que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada (resp., ligada).

De manera similar al párrafo previo, κ es un *calibre* para X si y sólo si para cualquier conjunto I de cardinalidad κ y para cualquier familia $\{U_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \tau_X^+$, existe $J \in [I]^\kappa$ de tal forma que $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$.

Si X tiene precalibre ω_1 se dice que X tiene la *propiedad de Knaster*, o bien, la *propiedad (K)*.

Estaremos trabajando con las siguientes colecciones de números cardinales:

$$\text{WP}(X) := \{\kappa \in \text{CN} : \kappa \text{ es un precalibre débil para } X\};$$

$$\text{P}(X) := \{\kappa \in \text{CN} : \kappa \text{ es un precalibre para } X\}, \text{ y}$$

$$\text{C}(X) := \{\kappa \in \text{CN} : \kappa \text{ es un calibre para } X\}.$$

Más aún, diremos que X es un *espacio de Šanin* si $\text{UR} \subseteq \text{C}(X)$ y es un *espacio fuertemente Šanin* si $\text{UC} \subseteq \text{C}(X)$.

La frase ϕ es una *función cardinal topológica* significa que ϕ es una regla de correspondencia que asigna a cada espacio topológico X un número cardinal infinito $\phi(X)$ de tal manera que si X es homeomorfo a Y , entonces $\phi(X)$ coincide con $\phi(Y)$. Nuestros textos básicos de referencia para consultar el material correspondiente a las funciones cardinales topológicas son [32] y [36].

Con respecto a las funciones cardinales locales, dado $x \in X$, un conjunto $\mathcal{V} \subseteq \tau_X(x)$ es una *pseudobase* para X en x si $\bigcap \mathcal{V} = \{x\}$. Claramente, todo punto en X admite una pseudobase si y sólo si X es T_1 . Por otra parte, una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau_X(x)$ es una *base local* para X en x si para todo $U \in \tau_X(x)$ existe $B \in \mathcal{B}$ con $B \subseteq U$. El *carácter local*, *pseudocarácter local* y la *estrechez local* de X en x son, respectivamente, los números cardinales

$$\chi(x, X) := \min \{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es un base local para } X \text{ en } x\},$$

$$\psi(x, X) := \min \{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es un pseudobase para } X \text{ en } x\}, \text{ y}$$

$$t(x, X) := \min \left\{ \kappa \geq 1 : \forall A \subseteq X \left(x \in \overline{A} \rightarrow \exists B \in [A]^{\leq \kappa} \left(x \in \overline{B} \right) \right) \right\}.$$

De esta manera, el *carácter*, el *pseudocarácter* y la *estrechez* son, correspondientemente, los números cardinales

$$\begin{aligned}\chi(X) &:= \sup \{ \chi(x, X) : x \in X \} + \aleph_0, \\ \psi(X) &:= \sup \{ \psi(x, X) : x \in X \} + \aleph_0, \text{ y} \\ t(X) &:= \sup \{ t(x, X) : x \in X \} + \aleph_0.\end{aligned}$$

Observe que el pseudocarácter está bien definido si y sólo si X es T_1 .

Para fines de este texto, el símbolo $o(X)$ representa la cardinalidad de τ_X , es decir, prescindiremos de sumarle $\aleph_0$ a la cardinalidad de τ_X como en [32].

Adicionalmente, trabajaremos con las siguientes funciones cardinales globales que les llamaremos, respectivamente, el *peso*, el π -*peso*, el *peso red*, la *densidad*, la *densidad hereditaria*, el *grado de Lindelöf*, el *grado de Lindelöf hereditario*, la *amplitud*, la *extensión*, la *celularidad*, el *número de Knaster*, el *número de Šanin débil* y el *número de Šanin*:

$$\begin{aligned}w(X) &:= \min \{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es un base para } X \} + \aleph_0; \\ \pi w(X) &:= \min \{ |\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es un } \pi\text{-base para } X \} + \aleph_0; \\ nw(X) &:= \min \{ |\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es una red para } X \} + \aleph_0; \\ d(X) &:= \min \{ |D| : D \text{ es un subconjunto denso de } X \} + \aleph_0; \\ hd(X) &:= \sup \{ d(Y) : Y \text{ es un subconjunto de } X \} + \aleph_0; \\ L(X) &:= \min \left\{ \kappa \in \text{CN} : \forall \mathcal{U} \subseteq \tau_X \left(X = \bigcup \mathcal{U} \rightarrow \exists \mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa} \left(X = \bigcup \mathcal{V} \right) \right) \right\}; \\ hL(X) &:= \sup \{ L(Y) : Y \text{ es un subconjunto de } X \} + \aleph_0; \\ s(X) &:= \sup \{ |D| : D \text{ es un subespacio discreto de } X \} + \aleph_0; \\ e(X) &:= \sup \{ |D| : D \text{ es un subespacio cerrado y discreto de } X \} + \aleph_0; \\ c(X) &:= \sup \{ |\mathcal{U}| : \mathcal{U} \text{ es una familia celular en } X \} + \aleph_0; \\ k(X) &:= \min \{ \kappa \in \text{CN} : \kappa^+ \text{ es un precalibre débil para } X \}; \\ w\check{s}(X) &:= \min \{ \kappa \in \text{CN} : \kappa^+ \text{ es un precalibre para } X \}, \text{ y} \\ \check{s}(X) &:= \min \{ \kappa \in \text{CN} : \kappa^+ \text{ es un calibre para } X \}.\end{aligned}$$

Además, para cualquier función cardinal topológica ϕ definimos

$$\phi^*(X) := \sup \{ \phi(X^n) : n \in \mathbb{N} \}.$$

Finalmente, un espacio topológico X es *cósmico* si $nw(X) = \aleph_0$.

1.4. Resultados topológicos auxiliares

De manera similar a la sección 1.2, en esta sección presentaremos una serie de lemas que no tienen conexión evidente entre ellos y serán de gran utilidad en los próximos capítulos.

Lema 1.4.1. *Los siguientes enunciados son ciertos para cualquier espacio topológico X .*

1. Si A es un subconjunto de un espacio topológico X , entonces $\text{int } \bar{A}$ es un abierto regular y $\overline{\text{int } A}$ es un cerrado regular.
2. Si $U \subseteq X$ y $V \subseteq X$ son abiertos regulares, entonces $U \cap V$ es abierto regular.
3. Si $F \subseteq X$ y $G \subseteq X$ son cerrados regulares, entonces $F \cup G$ es cerrado regular.

Demostración. En vista de que los argumentos para demostrar las afirmaciones del inciso (1) son similares, únicamente expondremos la prueba para $\text{int } \bar{A}$. Por un lado, la contención $\text{int } \bar{A} \subseteq \overline{\text{int } A}$ implica que $\text{int } \bar{A} = \text{int } \overline{\text{int } A} \subseteq \overline{\text{int } \text{int } A}$. Por otro lado, la relación $\overline{\text{int } A} \subseteq \bar{A}$ garantiza que $\text{int } \bar{A} \subseteq \bar{A} = \bar{A}$ y, por ende, $\text{int } \text{int } \bar{A} \subseteq \text{int } \bar{A}$. En consecuencia, $\text{int } \bar{A} = \text{int } \text{int } \bar{A}$.

Por otra parte, las demostraciones de (2) y (3) también son similares y, por esta razón, presentaremos solamente los detalles del inciso (2). Resulta que si $U \subseteq X$ y $V \subseteq X$ son abiertos regulares, entonces

$$\text{int } \overline{U \cap V} \subseteq \text{int } (\overline{U} \cap \overline{V}) = \text{int } \overline{U} \cap \text{int } \overline{V} = U \cap V \subseteq \text{int } \overline{U \cap V};$$

por ende, $U \cap V = \text{int } \overline{U \cap V}$. □

Lema 1.4.2. *Considere los siguientes enunciados para una pareja de espacios topológicos X y Y .*

1. X y Y son compactos.
2. X y Y son T_2 .
3. X y Y son extremadamente disconexos.
4. X y Y son cero-dimensionales.

Si alguna de las condiciones de (1) a (4) es cierta, entonces la suma topológica $X \oplus Y$ también tiene la propiedad correspondiente.

Demostración. Si el enunciado del inciso (1) es cierto y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $X \oplus Y$, entonces existen $\mathcal{V}_X \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ y $\mathcal{V}_Y \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ con $X \subseteq \bigcup \mathcal{V}_X$ y $Y \subseteq \bigcup \mathcal{V}_Y$. Luego, $\mathcal{V} := \mathcal{V}_X \cup \mathcal{V}_Y$ es una subcolección finita de $\mathcal{U}$ con $X \oplus Y = \bigcup \mathcal{V}$.

Para el inciso (2) resulta que si $x, y \in X \oplus Y$ son distintos, entonces hay dos casos. Si hay $Z \in \{X, Y\}$ con $x, y \in Z$, entonces la propiedad de Hausdorff en Z produce $U, V \in \tau_Z$ con $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$; en consecuencia, la relación $\tau_Z \subseteq \tau_{X \oplus Y}$ garantiza que U y V separan a x y y en $X \oplus Y$. Por otra parte, si no existe tal espacio Z , entonces X y Y separan a x y y en $X \oplus Y$.

Con respecto al inciso (3), un argumento rutinario muestra que si $U \in \tau_{X \oplus Y}$, entonces $\overline{U} = \overline{U \cap X} \cup \overline{U \cap Y}$. Por lo tanto, como $\overline{U \cap X} \in \tau_X \subseteq \tau_{X \oplus Y}$ y $\overline{U \cap Y} \in \tau_Y \subseteq \tau_{X \oplus Y}$, sucede que $\overline{U} \in \tau_{X \oplus Y}$.

Finalmente, si $\text{CA}(X)$ y $\text{CA}(Y)$ son bases para X y Y , respectivamente, entonces para cualesquiera $z \in X \oplus Y$ y $U \in \tau_{X \oplus Y}$ con $z \in U$ existe $V \in \text{CA}(X)$ con $x \in V \subseteq U$, o bien, existe $V \in \text{CA}(Y)$ con $x \in V \subseteq U$. Así, como $\text{CA}(X) \subseteq \text{CA}(X \oplus Y)$ y $\text{CA}(Y) \subseteq \text{CA}(X \oplus Y)$, se concluye que $\text{CA}(X \oplus Y)$ es una base para $X \oplus Y$. $\square$

Una función continua y suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ es *irreducible* si no existe un subconjunto cerrado F de X con $F \neq X$ y $f[F] = Y$. El siguiente lema será de gran utilidad más adelante.

Lema 1.4.3. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función irreducible y cerrada, entonces $d(X) = d(Y)$.

Demostración. La desigualdad $d(Y) \leq d(X)$ es porque si D es un subconjunto denso de Y , entonces $f[D]$ es un subconjunto denso de Y . Por otra parte, si D es un subconjunto denso de Y , $e : D \rightarrow \bigcup \{f^{-1}\{y\} : y \in D\}$ es una función de elección y $E := \text{img}(e)$, entonces $F := \overline{E}$ es un subconjunto cerrado de X con $f[F] = Y$. En consecuencia, $F = X$ y, por ende, $d(X) \leq |E| \leq |D| \leq d(Y)$. $\square$

Lema 1.4.4. Si λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una colección de espacios compactos de Hausdorff, X es el producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ y $p \in X$, entonces el Σ -producto

$$\Sigma(X, p) := \left\{ q \in X : \left| \{ \alpha < \lambda : q(\alpha) \neq p(\alpha) \} \right| \leq \omega \right\}$$

es numerablemente compacto y denso en X .

Demostración. En vista de que los abiertos canónicos de X dependen de una cantidad finita de coordenadas, un argumento rutinario muestra que $\Sigma(X, p)$ es denso en X . Ahora, para ver que $\Sigma(X, p)$ es numerablemente compacto, fijemos $A \in [\Sigma(X, p)]^\omega$ y, para cada $q \in A$, denotemos por $S(q)$ al conjunto numerable $\{\alpha < \lambda : q(\alpha) \neq p(\alpha)\}$.

Luego, $S := \bigcup_{q \in A} S(q)$ es un conjunto numerable y $B := \{q \upharpoonright_S : q \in A\}$ es un subconjunto infinito de $Y := \prod_{\alpha \in S} X_\alpha$. Así, como Y es compacto, B tiene un punto de acumulación r en Y . Finalmente, si extendemos r al punto $t := r \cup \{(\alpha, p(\alpha)) : \alpha \in \lambda \setminus S\}$, se sigue que t es un punto de acumulación de A en $\Sigma(X, p)$. $\square$

Lema 1.4.5. Si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una colección de espacios topológicos, entonces

$$o\left(\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha\right) = \prod_{\alpha < \lambda} o(X_\alpha).$$

Demostración. Observe que si $X := \bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, entonces la relación $\tau_X \rightarrow \prod_{\alpha < \lambda} \tau_{X_\alpha}$ determinada mediante $U \mapsto (U \cap X_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ es biyectiva. $\square$

Lema 1.4.6. Si λ es un cardinal infinito, entonces $o(D(2)^\lambda) = 2^\lambda$.

Demostración. Por un lado, como $o(D(2)^\lambda) \leq 2^{w(D(2)^\lambda)}$ y $D(2)^\lambda$ tiene peso λ (véase [32, Example 11.8(b), p. 44]), resulta que $o(D(2)^\lambda) \leq 2^\lambda$. Por otro lado, si para cada $\alpha < \lambda$ denotamos por $\pi_\alpha : D(2)^\lambda \rightarrow D(2)$ a la α -ésima proyección y, para todo $A \subseteq \lambda$, definimos $U_A := \bigcup \{\pi_\alpha^{-1}\{0\} : \alpha \in A\}$, entonces se satisface que $U_A \neq U_B$, siempre que A y B son subconjuntos distintos de λ . En consecuencia, $o(D(2)^\lambda) \geq 2^\lambda$. $\square$

Lema 1.4.7. Si λ es un cardinal infinito y

$$\mathcal{F}_\lambda := \{F \subseteq D(2)^\lambda : F \text{ es cerrado y } |F| = 2^\lambda\},$$

entonces $|\mathcal{F}_\lambda| = 2^\lambda$.

Demostración. Primero, como $o(D(2)^\lambda) \leq 2^{nw(D(2)^\lambda)}$ y $nw(D(2)^\lambda) = \lambda$ (véase [32, Example 11.8, p. 44]), es claro que $|\mathcal{F}_\lambda| \leq 2^\lambda$. Para verificar la desigualdad restante, fijemos $S, T \in [\lambda]^\lambda$ con $S \cup T = \lambda$ y $S \cap T = \emptyset$. Sean $\{f_\alpha : \alpha < 2^\lambda\}$ y $\{g_\beta : \beta < 2^\lambda\}$ enumeraciones sin repeticiones de los conjuntos ${}^S 2$ y ${}^T 2$. Ahora, para cada $\alpha < \lambda$ definamos $F_\alpha := \bigcap \{\pi_\beta^{-1}\{f_\alpha(\beta)\} : \beta \in S\}$. En estas circunstancias, se satisface que $\{F_\alpha : \alpha < 2^\lambda\}$ es una familia de subconjuntos cerrados de $D(2)^\lambda$ tales que, si $\alpha < \beta < 2^\lambda$, entonces $F_\alpha \neq F_\beta$. Finalmente, si $\alpha < \lambda$ y para toda $\beta < 2^\lambda$ definimos $x_\beta := f_\alpha \cup g_\beta$, se satisface la inclusión $\{x_\beta : \beta < 2^\lambda\} \subseteq F_\alpha$, con $x_\beta \neq x_\gamma$ siempre que $\beta < \gamma < 2^\lambda$. En suma, $|\mathcal{F}_\lambda| \geq 2^\lambda$. $\square$

1.5. Conjuntos preordenados

Un *conjunto preordenado* es un conjunto P equipado con una relación binaria $\leq$ que es reflexiva (es decir, $p \leq p$ para todo $p \in P$) y transitiva (esto es, $p \leq q$ y $q \leq r$

implica $p \leq r$ para cualesquiera $p, q, r \in P$). Más aún, diremos que P es un *conjunto parcialmente ordenado* si $\leq$ es, además, una relación antisimétrica, es decir, para cualesquiera $p, q \in P$ las condiciones $p \leq q$ y $q \leq p$ implican $p = q$. También conviene mencionar que el símbolo $p < q$ significa que $p \leq q$ y $p \neq q$.

Si P es un conjunto preordenado, $A \subseteq P$ y $p \in P$, p es una *cota superior* (resp., *cota inferior*) de A si $q \leq p$ (resp., $p \leq q$) para cualquier $q \in A$. Similarmente, p es un *elemento máximo* (resp., *elemento mínimo*) si $p \in A$ y p es una cota superior (resp., inferior) de A . Además, p es un *elemento maximal* (resp., *elemento minimal*) de A si $p \in A$ y no existe $q \in A \setminus \{p\}$ con $p < q$ (resp., $q < p$). También, el conjunto A es una *cadena* si para cualesquiera $p, q \in A$, sucede que $p \leq q$ ó $q \leq p$.

Este trabajo está desarrollado en el contexto de los Axiomas de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de Elección, ZFC. Una equivalencia sobresaliente de este último enunciado es el resultado conocido como el *Lema de Kuratowski-Zorn*. Este hecho se puede consultar en [31, Teorema 8.14, p. 173].

Teorema 1.5.1. (*Lema de Kuratowski-Zorn*) Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado no vacío. Si toda cadena no vacía en P está acotada superiormente, entonces P tiene un elemento maximal.

Sea $(P, \leq)$ un conjunto preordenado. Diremos que $p, q \in P$ son *compatibles* y lo denotaremos por $p \parallel q$, si existe $r \in P$ de tal modo que $r \leq p$ y $r \leq q$. En caso contrario diremos que son *incompatibles* y utilizaremos el símbolo $p \perp q$.

Un subconjunto A de P es una *anticadena* en P si para cualesquiera $p, q \in P$ distintos se satisface que $p \perp q$. También, P satisface la *condición de la cadena contable* (abreviado *ccc*) si todas sus anticadenas son numerables.

Por otro lado, la frase D es un subconjunto denso de P significa que para cada $p \in P$ existe $q \in D$ tal que $q \leq p$.

Un subconjunto S de P es *centrado* (resp., *ligado*) si cualquier $S \in [P]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ (resp., $S \in [P]^2$) está acotado inferiormente en P . Además, si κ es un cardinal infinito, diremos que P *tiene precalibre κ* (resp., *precalibre débil κ*) si para cualquier conjunto I de cardinalidad κ y para cualquier familia $\{p_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq P$, existe $J \in [I]^\kappa$ de tal modo que $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ es un conjunto centrado (resp., ligado).

Similarmente, un cardinal infinito κ es un *calibre* para P si y sólo si para cualquier conjunto I de cardinalidad κ y para cualquier familia $\{p_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq P$, existe $J \in [I]^\kappa$ de tal manera que $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ está acotado inferiormente en P .

Cuando P tiene precalibre ω_1 se dice que P tiene la *propiedad de Knaster*, o bien, la *propiedad (K)*.

Trabajaremos en la presente sección con los siguientes invariantes cardinales que se le pueden asignar a cualquier conjunto preordenado. La *celularidad*, la *densidad*, el *número de Knaster*, el *número de Šanin débil* y el *número de Šanin* son, respectiva-

mente, los números cardinales

$$\begin{aligned} c(P) &:= \sup\{|A| : A \text{ es una anticadena en } P\} + \aleph_0; \\ d(P) &:= \min\{|D| : D \text{ es un subconjunto denso de } P\} + \aleph_0; \\ k(P) &:= \min\{\kappa \in \mathbf{CN} : \kappa^+ \text{ es un precalibre débil para } P\}; \\ w\check{s}(P) &:= \min\{\kappa \in \mathbf{CN} : \kappa^+ \text{ es un precalibre para } P\}, \text{ y} \\ \check{s}(P) &:= \min\{\kappa \in \mathbf{CN} : \kappa^+ \text{ es un calibre para } P\}. \end{aligned}$$

Por último, recordemos que si κ es un número cardinal y $\{(P_\alpha, \leq_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ es una familia de conjuntos preordenados, entonces el *producto directo* de la familia es el producto cartesiano $\prod_{\alpha < \kappa} P_\alpha$ equipado con el preorden $\leq$ definido del siguiente modo: para cualesquiera $p, q \in \prod_{\alpha < \kappa} P_\alpha$, $p \leq q$ si y sólo si $p_\alpha \leq_\alpha q_\alpha$ para cualquier $\alpha < \kappa$.

1.6. Condiciones de cadena en conjuntos preordenados

Esta sección está dedicada a reunir algunos resultados fundamentales del comportamiento de los calibres, precalibres y precalibres débiles en los preórdenes. A pesar de que todos ellos tienen relevancia y son interesantes por sí mismos, la mayoría de ellos nos servirán en los siguientes capítulos como resultados auxiliares.

Observación 1.6.1. Varios de los resultados que presentamos a continuación son válidos tanto para calibres, precalibres y precalibres débiles, y las respectivas demostraciones son similares. En estos casos, sólo se presentará la demostración para calibres. En aquellos resultados en que las demostraciones tengan diferencias esenciales, se presentarán los argumentos correspondientes.

Es claro que todo calibre es un precalibre y que todo precalibre es un precalibre débil. Una pregunta razonable es si, en realidad, estos conceptos coinciden entre sí. En el ejemplo 1.6.13 construiremos, para todo cardinal infinito κ , un preorden P_κ con la propiedad de que κ es un precalibre pero no un calibre para él. En las secciones 2.3, 3.5 y 4.1 mencionaremos algunos aspectos de la pregunta correspondiente para precalibres y precalibres débiles.

La siguiente proposición es sencilla y se puede demostrar mediante funciones biyectivas convenientes.

Proposición 1.6.2. Sean P un conjunto preordenado y κ un cardinal infinito. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para P .

2. Para cualquier subconjunto $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq P$, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ de tal modo que $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ está acotado inferiormente en P (resp., es centrado; es ligado).

El estudio de los calibres, precalibres y precalibres débiles, como mostraremos a continuación, se trivializa rápidamente para los preórdenes finitos.

Proposición 1.6.3. *Si P es un conjunto preordenado finito, entonces todos los cardinales infinitos son calibres para P .*

Demostración. Sean κ un cardinal infinito y $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de P . Resulta que la función $\kappa \rightarrow P$ dada por $\alpha \mapsto p_\alpha$ tiene una fibra de cardinalidad κ , es decir, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $p_\alpha = p_\beta$ siempre que $\alpha, \beta \in J$. En consecuencia, $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ está acotado inferiormente en P . $\square$

Proposición 1.6.4. *Sean P un conjunto preordenado, D un subconjunto denso de P y κ un cardinal infinito. Si equipamos a D con el suborden que hereda de P , entonces κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para D si y sólo si κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para P . En consecuencia, $\check{s}(D) = \check{s}(P)$, $w\check{s}(D) = w\check{s}(P)$ y $k(D) = k(P)$.*

Demostración. Supongamos primero que κ es un calibre para D y sea $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de P . Para cada $\alpha < \kappa$ empleemos que D es denso en P para hallar $q_\alpha \in D$ tal que $q_\alpha \leq p_\alpha$. Luego, como D tiene calibre κ , existe $J \in [\kappa]^\kappa$ de tal modo que $\{q_\alpha : \alpha \in J\}$ está acotado inferiormente en D . En consecuencia, $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ está acotado inferiormente en P .

Para verificar la implicación recíproca, supongamos que κ es un calibre para P y fijemos $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq D$. Así, existen $J \in [\kappa]^\kappa$ y $p \in P$ de tal forma que p acota inferiormente a $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ en P . Finalmente, si $q \in D$ satisface $q \leq p$, entonces q es una cota inferior para $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ en D . $\square$

Proposición 1.6.5. *Si P es un conjunto preordenado, κ es un precalibre débil para P y A es una anticadena en X , entonces $|A| < \kappa$. En especial, $c(P) \leq k(P)$.*

Demostración. Supongamos que A es un subconjunto de P con $|A| \geq \kappa$. Sea $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de A con $p_\alpha \neq p_\beta$ siempre que $\alpha, \beta < \kappa$ son distintos. Por último, como κ es un precalibre débil para P , existe $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ es ligada. En consecuencia, A no es una anticadena. $\square$

Proposición 1.6.6. *Si P es un conjunto preordenado, κ es un número cardinal y $d(P) < \text{cf}(\kappa)$, entonces κ es un calibre para P . En particular, $\check{s}(P) \leq d(P)$.*

Demostración. Sean $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de P y D un subconjunto denso de P con $|D| \leq d(P)$. Para cada $\alpha < \kappa$ fijemos $q_\alpha \in D$ tal que $q_\alpha \leq p_\alpha$. De este modo,

deducimos que $|\{q_\alpha : \alpha < \kappa\}| < \text{cf}(\kappa)$ y, por lo tanto, para alguna $\beta < \kappa$ se cumple que $J := \{\alpha < \kappa : p_\alpha = p_\beta\}$ tiene cardinalidad κ . Así, $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ está acotado inferiormente en P . $\square$

Lema 1.6.7. *Sea κ un cardinal infinito. Un conjunto preordenado P satisface la desigualdad $c(P) \leq \kappa$ si y sólo si para cualquier conjunto I de cardinalidad κ^+ y para cualquier familia $\{p_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq P$ existen $\alpha, \beta \in I$ distintos tales que $p_\alpha \perp p_\beta$.*

Demostración. Supongamos primero que P cumple la relación $c(P) \leq \kappa$. Fijemos un conjunto I y una familia $\{p_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq P$ de tal modo que, para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$, la condición $\alpha \neq \beta$ implica que $p_\alpha \perp p_\beta$. Observemos que la asignación $f : I \rightarrow \{p_\alpha : \alpha \in I\}$ definida mediante $f(\alpha) := p_\alpha$ es biyectiva. Por último, como $|\{p_\alpha : \alpha \in I\}| \leq \kappa$ porque $c(P) \leq \kappa$, deducimos que $|I| \leq \kappa$.

Para verificar la implicación recíproca simplemente hay que notar que si P satisface $c(P) > \kappa$, entonces existe una familia $\{p_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq P$ tal que $p_\alpha \perp p_\beta$, siempre que $\alpha < \beta < \kappa^+$. $\square$

Lema 1.6.8. *Si P es un conjunto preordenado y κ es un cardinal regular, entonces κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para P si y sólo si para cualquier $S \in [P]^\kappa$, existe $T \in [S]^\kappa$ acotado inferiormente en P (resp., centrado; ligado).*

Demostración. Comencemos por observar que la implicación directa es clara y no necesita la regularidad de κ , es suficiente enumerar un elemento S de $[P]^\kappa$ sin repeticiones. Con el objetivo de verificar la implicación restante, sea $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de P y definamos $f : \kappa \rightarrow \{p_\alpha : \alpha < \kappa\}$ como $f(\alpha) := p_\alpha$. En el caso en que $|\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}| < \kappa$, la regularidad de κ implica la existencia de $\beta < \kappa$ tal que $|f^{-1}\{p_\beta\}| = \kappa$. De este modo, la colección $\{p_\alpha : \alpha \in f^{-1}\{p_\beta\}\} = \{p_\beta\}$ es la familia acotada inferiormente que buscamos. Ahora, si $|\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}| = \kappa$, nuestra hipótesis permite hallar $S \in [\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}]^\kappa$ acotado inferiormente en P . Por último, si $J := \{\alpha < \kappa : p_\alpha \in S\}$, entonces $J \in [\kappa]^\kappa$ debido a que la función $g : J \rightarrow S$ determinada mediante $g(\alpha) := p_\alpha$ es suprayectiva, y $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ está acotado inferiormente en P . $\square$

Definición 1.6.9. Una función entre preórdenes $f : P \rightarrow Q$ *preserva el orden* si para cualesquiera $p, q \in P$ la condición $p \leq_P q$ implica que $f(p) \leq_Q f(q)$.

Proposición 1.6.10. *Sean $f : P \rightarrow Q$ una función entre preórdenes y κ un cardinal infinito. Si f es suprayectiva, preserva el orden y κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para P , entonces κ también es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para Q .*

Demostración. Sea $\{q_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de Q y, para cada $\alpha < \kappa$, fijemos $p_\alpha \in P$ con $f(p_\alpha) = q_\alpha$. Luego, como κ es un calibre para P , existe $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$

está acotado inferiormente en P . Por último, como f preserva el orden, $\{q_\alpha : \alpha \in J\}$ está acotado inferiormente en Q . $\square$

Un elemento p de un conjunto preordenado P es un *átomo* de P si para cualesquiera $q, r \in P$, las condiciones $q \leq p$ y $r \leq p$ implican $q \mid r$.

Proposición 1.6.11. *Todo conjunto preordenado sin átomos admite una anticadena infinita.*

Demostración. Fijemos un elemento $r \in P$. Construiremos recursivamente un par de colecciones $\{p_n : n < \omega\}$ y $\{q_n : n < \omega\}$ que se vean como en la figura 1.1:

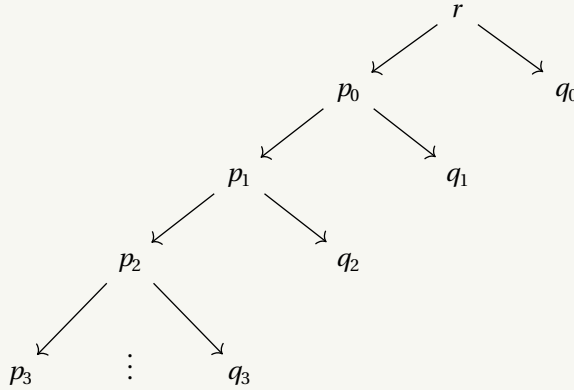


Figura 1.1: Construcción de una anticadena infinita.

En otras palabras, queremos que $p_0 \leq r$, $q_0 \leq r$, $p_0 \perp q_0$ y que, para cada $n < \omega$, se satisfagan las relaciones $p_{n+1} \leq p_n$, $q_{n+1} \leq p_n$ y $p_{n+1} \perp q_{n+1}$. Primero, como r no es un átomo de P , existen $p_0 \leq r$ y $q_0 \leq r$ de tal forma que $p_0 \perp q_0$. Ahora, supongamos que para alguna $n < \omega$ hemos definido colecciones $\{p_m : m \leq n\}$ y $\{q_m : m \leq n\}$ con las propiedades deseadas. Luego, como p_n no es un átomo de P , existen $p_{n+1} \leq p_n$ y $q_{n+1} \leq p_n$ de manera que $p_{n+1} \perp q_{n+1}$.

Finalmente, si $t \in P$ y $n < m < \omega$ son tales que $t \leq q_n$ y $t \leq q_m$, entonces, como $q_m \leq p_n$, deducimos las relaciones $t \leq q_n$ y $t \leq p_n$, las cuales contradicen que $p_n \perp q_n$. En consecuencia, $\{q_n : n < \omega\}$ es una anticadena infinita en P . $\square$

Concluimos esta sección al considerar los conjuntos ordenados cuyos elementos son comparables dos a dos. Recordemos que un conjunto ordenado $(P, \leq)$ es *linealmente ordenado* si para cualesquiera $p, q \in P$ se satisface que $p \leq q$ ó $q \leq p$.

Una propiedad fundamental que tienen este tipo de órdenes y que puede demostrarse con un argumento inductivo es que si P es un orden lineal, entonces cualquier $S \in [P]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tiene elemento mínimo. Este hecho implica el siguiente resultado.

Proposición 1.6.12. *Si P es un conjunto linealmente ordenado, entonces cualquier cardinal infinito es un precalibre para P .*

Demostración. Si κ es un cardinal infinito y $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq P$, resulta que $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un conjunto centrado en P . Efectivamente, si $J \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, entonces $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ tiene elemento mínimo y, por ende, $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ está acotado inferiormente en P . $\square$

En contraste con la proposición 1.6.12, es sencillo producir ejemplos de conjuntos linealmente ordenados que carezcan de un calibre determinado.

Ejemplo 1.6.13. *Para cualquier cardinal infinito κ , existe un conjunto linealmente ordenado P_κ con la propiedad de que κ no es un calibre para P_κ .*

Demostración. Para todo cardinal infinito κ sea P_κ el número ordinal κ equipado con el orden $<^*$: para cualesquiera $\alpha, \beta \in \kappa$ diremos que $\alpha <^* \beta$ si y sólo si $\beta < \alpha$, en donde $<$ es el orden usual en κ . Claramente, $P_\kappa := (\kappa, <^*)$ es un conjunto linealmente ordenado. Ahora, si consideramos la familia $\{\alpha : \alpha < \kappa\}$ y fijamos $J \in [\kappa]^\kappa$, entonces no existe $\beta \in P_\kappa$ que acote inferiormente a $\{\alpha : \alpha < \kappa\}$ puesto que, en caso contrario, β sería el elemento máximo de κ con el orden usual, lo cual contradiría que κ es un ordinal límite. Por esta razón, P_κ no tiene calibre κ . $\square$

1.7. Condiciones de cadena en productos de preórdenes

En la sección 2.5 exploraremos a detalle el problema de la preservación de las condiciones de cadena en los productos topológicos. El objetivo de esta sección es exhibir que la pregunta correspondiente en el ámbito de los conjuntos preordenados también presenta sus propias dificultades.

Proposición 1.7.1. *Sea κ un cardinal infinito. Si P y Q son conjuntos preordenados, P tiene precalibre débil κ^+ y $c(Q) \leq \kappa$, entonces el producto directo $P \times Q$ también satisface la relación $c(P \times Q) \leq \kappa$.*

Demostración. Sea I un conjunto de cardinalidad κ^+ y fijemos un subconjunto $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha \in I\}$ de $P \times Q$. Como $\{p_\alpha : \alpha \in I\}$ es un subconjunto de P y P tiene precalibre débil κ^+ , existe $J \in [I]^{\kappa^+}$ de tal forma que $\{p_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia ligada. Luego, al considerar a $\{q_\alpha : \alpha \in J\}$, el lema 1.6.7 genera $\alpha, \beta \in J$ distintos con $q_\alpha \mid q_\beta$. En consecuencia, $(p_\alpha, q_\alpha) \mid (p_\beta, q_\beta)$ y, por ende, el lema 1.6.7 asegura que $c(P \times Q) \leq \kappa$. $\square$

Proposición 1.7.2. *Si κ es un cardinal infinito, λ es un número cardinal, $\{P_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de conjuntos preordenados y κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para el producto directo $\prod_{\alpha < \lambda} P_\alpha$, entonces κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para cada factor.*

Demostración. Claramente, cada proyección canónica en $\prod_{\alpha < \lambda} P_\alpha$ es una función suprayectiva que preserva el orden. De esta manera, si κ es un calibre para $\prod_{\alpha < \lambda} P_\alpha$, la proposición 1.6.10 garantiza que todos sus factores tienen calibre κ . $\square$

Algunas variantes de la implicación recíproca en la proposición 1.7.2 también son ciertas. Los siguientes resultados están encaminados a sustentar esta afirmación.

Proposición 1.7.3. *Sea κ un cardinal infinito. Si P y Q son preórdenes con calibre (resp., precalibre; precalibre débil) κ , entonces el producto directo $P \times Q$ también tiene calibre (resp., precalibre; precalibre débil) κ .*

Demostración. Sea $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de $P \times Q$. Como $\{p_\alpha : \alpha < \kappa\}$ está contenido en P y éste tiene calibre κ , existe $I \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{p_\alpha : \alpha \in I\}$ está acotado inferiormente en P . Luego, como $\{q_\alpha : \alpha \in I\}$ es un subconjunto de Q y éste tiene calibre κ , existe $J \in [I]^\kappa$ con $\{q_\alpha : \alpha \in J\}$ acotado inferiormente en Q . En estas circunstancias, es sencillo comprobar que $\{(p_\alpha, q_\alpha) : \alpha \in J\}$ está acotado inferiormente en $P \times Q$. $\square$

Corolario 1.7.4. *Sea κ un cardinal infinito. Si $n \in \mathbb{N}$, $\{P_m : m < n\}$ es una familia de preórdenes y κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para cada P_m , entonces κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para el producto directo $\prod_{m < n} P_m$.*

En el caso en que se tenga una cantidad infinita de factores, la generalización natural del corolario 1.7.4 puede fallar:

Ejemplo 1.7.5. *Para cualquier cardinal κ con $\text{cf}(\kappa) > \omega$ existe un preorden P de tal modo que κ es un calibre para P y no es un precalibre débil para P^κ .*

Demostración. Sea $P := \{0, 1\}$ equipado con el preorden $\{(0, 0), (1, 1)\}$. Observemos que κ es un calibre para P en virtud de la proposición 1.6.3. Luego, para ver que la potencia P^κ no tiene precalibre débil κ , definamos

$$p^\alpha := \{(\alpha, 0)\} \cup ((\kappa \setminus \{\alpha\}) \times \{1\})$$

para cualquier $\alpha < \kappa$. Finalmente, como $\{p^\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una anticadena en P^κ , la proposición 1.6.5 garantiza que κ no es un precalibre débil para P^κ . $\square$

No obstante, como veremos a continuación, ciertos subconjuntos especiales de algunos productos directos sí preservan los precalibres regulares y no numerables.

Definición 1.7.6. Sean λ un número cardinal y $\{(P_\alpha, 1_\alpha) : \alpha < \lambda\}$ una familia de preórdenes con elemento máximo. Al suborden del producto directo

$$\prod_{\alpha < \lambda}^{\text{fin}} P_\alpha = \left\{ p \in \prod_{\alpha < \lambda} P_\alpha : \left| \{ \alpha < \lambda : p_\alpha \neq 1_\alpha \} \right| < \omega \right\},$$

le llamamos el *producto directo con soporte finito* de la familia $\{P_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Proposición 1.7.7. Sean κ un cardinal regular no numerable, λ un número cardinal y $\{P_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de preórdenes con elemento máximo. Si κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para cada P_α , entonces el producto directo con soporte finito de $\{P_\alpha : \alpha < \lambda\}$ también tiene precalibre (resp., precalibre débil) κ .

Demostración. En vista de que ambas pruebas son similares, únicamente haremos el argumento para precalibres. Sean $P := \prod_{\alpha < \lambda}^{\text{fin}} P_\alpha$, $\{p^\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de P y, para cada $\alpha < \kappa$, denotemos por S_α al conjunto finito $\{\beta < \lambda : p_\beta^\alpha \neq 1_\beta\}$. Luego, como $\{S_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de conjuntos finitos y κ es un cardinal regular no numerable, el teorema 1.2.3 proporciona un conjunto S y un conjunto $J \in [\kappa]^\kappa$ de tal forma que, para cualesquiera $\alpha, \beta \in J$, la condición $\alpha \neq \beta$ implica que $S_\alpha \cap S_\beta = S$. Dividiremos el resto de la prueba en dos casos.

Caso 1. $S = \emptyset$.

Aquí, como la familia $\{S_\alpha : \alpha \in J\}$ es ajena por pares, si F es un elemento de $[J]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, entonces el punto

$$p := \{(\beta, p_\beta^\alpha) : \alpha \in F \wedge \beta \in S_\alpha\} \cup \left\{ (\beta, 1_\beta) : \beta \in \lambda \setminus \bigcup_{\alpha \in F} S_\alpha \right\}$$

es un elemento de P que satisface la relación $p \leq p^\alpha$, siempre que $\alpha \in F$; es decir, $\{p^\alpha : \alpha \in F\}$ está acotado inferiormente en P . Por lo tanto, $\{p^\alpha : \alpha \in J\}$ es centrado en P .

Caso 2. $S \neq \emptyset$.

Sea P_S el producto directo $\prod_{\alpha \in S} P_\alpha$. El corolario 1.7.4 garantiza que P_S tiene precalibre κ . De este modo, para la colección $\{p^\alpha \upharpoonright_S : \alpha \in J\}$ existe $I \in [J]^\kappa$ de tal modo que $\{p^\alpha \upharpoonright_S : \alpha \in I\}$ es un conjunto centrado en P_S . A partir de esto es sencillo comprobar que $\{p^\alpha : \alpha \in I\}$ es centrado en P .

En efecto, supongamos que $F \in [I]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y consideremos la familia $\{p^\alpha : \alpha \in F\}$. En vista de que $\{p^\alpha \upharpoonright_S : \alpha \in F\}$ está acotado inferiormente en P_S , existe $q^* \in P_S$ de tal forma que $q^* \leq p^\alpha \upharpoonright_S$ para cada $\alpha \in F$. Finalmente, el punto

$$q := q^* \cup \{(\beta, p_\beta^\alpha) : \alpha \in F \wedge \beta \in S_\alpha \setminus S\} \cup \left\{ (\beta, 1_\beta) : \beta \in \lambda \setminus \bigcup_{\alpha \in F} S_\alpha \right\}$$

es un elemento de P que verifica la desigualdad $q \leq p^\alpha$, para cualquier $\alpha \in F$. $\square$

En vista del resultado anterior surge la siguiente interrogante natural: ¿es cierta la proposición 1.7.7 para calibres? Nuestro siguiente ejemplo responde negativamente esta pregunta y finaliza el primer capítulo del texto.

Ejemplo 1.7.8. *Para cualquier cardinal regular y no numerable κ , existe un preorden P de tal modo que κ es un calibre para P y $\prod_{\alpha < \kappa}^{\text{fin}} P$ no tiene calibre κ .*

Demostración. Sea $P := \{0, 1\}$ equipado con el preorden $\{(0, 0), (1, 1), (0, 1)\}$. Se desprende de la proposición 1.6.3 que κ es un calibre para P . Lo que sigue es argumentar que el producto con soporte finito $\prod_{\alpha < \kappa}^{\text{fin}} P$ no tiene calibre κ . Para cada $\alpha < \kappa$ definamos $p^\alpha := \{(\alpha, 0)\} \cup ((\kappa \setminus \{\alpha\}) \times \{1\})$. Observemos ahora que si $J \in [\kappa]^\kappa$, entonces cualquier cota inferior de $\{p^\alpha : \alpha \in J\}$ tendría que diferir de 1 en cada $\alpha \in J$. En consecuencia, $\{p^\alpha : \alpha \in J\}$ no está acotado inferiormente en $\prod_{\alpha < \kappa}^{\text{fin}} P$. $\square$

2

Condiciones de cadena en espacios topológicos

Iniciamos en este capítulo el estudio de calibres en espacios topológicos. Presentamos resultados básicos que relacionan celularidad, número de Šanin, calibres y precalibres entre espacios y diferentes tipos de subespacios. Y se estudian los calibres, precalibres y precalibres débiles para sumas y productos de espacios topológicos. De particular importancia en este capítulo son los teoremas de Šanin, de Juhász, y de Argyros y Tsarpalias sobre los calibres en producto de espacios. Además, se presenta nuestra demostración del resultado gemelo al teorema de Šanin para precalibres débiles. Calculamos también los calibres y sus derivados en casos concretos como el cuadrado lexicográfico, la línea larga y los cubos de Cantor.

2.1. Nociones fundamentales

La presente sección inicia con un comentario similar a la observación 1.6.1.

Observación 2.1.1. En los resultados que involucran calibres, precalibres y precalibres débiles para espacios topológicos cuyas demostraciones son similares, sólo presentaremos la prueba en el caso de los calibres. En los resultados que incluyan más de uno de estos conceptos y cuyas demostraciones presentan características esencialmente diferentes, presentaremos las pruebas respectivas.

Sea X un espacio topológico. Observemos que en el preorden $(\tau_X^+, \subseteq)$ suceden dos cosas: primero, las anticadenas en τ_X^+ son, precisamente, las familias celulares en X ; segundo, una subcolección $\mathcal{U}$ de τ_X^+ es una familia centrada (resp., ligada) en X (en el sentido topológico) si y sólo si es una familia centrada (resp., ligada) en τ_X^+ (en el

sentido del orden). A partir de estas anotaciones se desprenden inmediatamente los siguientes resultados.

Proposición 2.1.2. *Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal infinito, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. $c(X) = c(\tau_X^+)$.
2. κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para X si y sólo si κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para el preorden τ_X^+ . En particular, $k(X) = k(\tau_X^+)$ y $w\check{s}(X) = w\check{s}(\tau_X^+)$.

La proposición 2.1.2 revela que los resultados obtenidos en la sección 1.6 concernientes a la celularidad, a los precalibres y a los precalibres débiles tienen la posibilidad de admitir una versión dual topológica. Uno estaría tentado a pensar que algo similar va a suceder con respecto a la densidad y a los calibres, sin embargo, en estos casos las circunstancias cambian ligeramente. Por ejemplo, es claro que el siguiente resultado se verifica.

Proposición 2.1.3. *Si X es un espacio topológico y κ es un calibre para el preorden τ_X^+ , entonces κ es un calibre para X .*

No obstante, como se muestra en el ejemplo 2.5.8, la implicación recíproca de la proposición 2.1.3 no siempre es cierta, incluso cuando el espacio sostén es compacto y T_2 . Además, en el mismo ejemplo 2.5.8 se presenta una clase de espacios que satisfacen la relación $d(X) < d(\tau_X^+)$. A pesar de no poder establecer en general la igualdad entre las densidades de X y τ_X^+ , es evidente que $\pi w(X)$ coincide con $d(\tau_X^+)$.

Proposición 2.1.4. *Para cualquier espacio topológico X se satisface que $d(\tau_X^+) = \pi w(X)$.*

El siguiente lema será utilizado constantemente a lo largo del texto sin hacer referencia explícita a él.

Lema 2.1.5. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{B}$ una base para X , $\mathcal{V}$ una π -base para X y κ un cardinal infinito. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para X .
2. Para cualquier $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ de tal modo que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ tiene intersección no vacía (resp., es centrada; es ligada).
3. Cuando $\{B_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{B_\alpha : \alpha \in J\}$ tiene intersección no vacía (resp., es centrada; es ligada).

4. Si $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{V} \setminus \{\emptyset\}$, entonces existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con la propiedad de que $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ tiene intersección no vacía (resp., es centrada; es ligada).

Demostración. La única implicación no trivial es (4) a (1). Sean I un conjunto de cardinalidad κ , $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ un subconjunto de τ_X^+ y $f : \kappa \rightarrow I$ una función biyectiva. Para cada $\xi < \kappa$ sea $V_\xi \in \mathcal{V} \setminus \{\emptyset\}$ con $V_\xi \subseteq U_{f(\xi)}$. Luego, por el inciso (4) existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $\bigcap_{\xi \in J} V_\xi \neq \emptyset$. Claramente, $f[J] \in [I]^\kappa$ y $\bigcap_{\alpha \in f[J]} U_\alpha \neq \emptyset$. En consecuencia, κ es un calibre para X . $\square$

Los siguientes tres resultados son de importancia primordial para el desarrollo de este trabajo (compárense con las proposiciones 1.6.4, 1.6.5 y 1.6.6). El primero explica la interacción de los calibres y precalibres con respecto a los subconjuntos densos. El segundo establece una relación básica entre familias celulares y precalibres débiles. Finalmente, el tercero muestra una condición suficiente con respecto a la densidad de un espacio para que un cardinal infinito sea un calibre para él.

Proposición 2.1.6. *Si X es un espacio topológico, D es un subconjunto denso de X y κ es un cardinal infinito, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. $c(D) = c(X)$.
2. κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para D si y sólo si κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para X .
3. Si κ es un calibre para D , entonces κ es un calibre para X .

En consecuencia, $\check{s}(X) \leq \check{s}(D)$, $w\check{s}(X) = w\check{s}(D)$ y $k(X) = k(D)$.

Demostración. Con el inciso (1) en mente, primero notemos que si $\mathcal{U}$ es una familia celular en D y para cada $U \in \mathcal{U}$ tomamos $V(U) \in \tau_X$ con $V(U) \cap D = U$, entonces la densidad de D garantiza que $\{V(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia celular en X de la misma cardinalidad de $\mathcal{U}$. En consecuencia, $|\mathcal{U}| = |\{V(U) : U \in \mathcal{U}\}| \leq c(X)$ y, por ende, $c(D) \leq c(X)$. Por otro lado, si $\mathcal{U}$ es una familia celular en X , entonces una vez más la densidad de D implica que $\{U \cap D : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia celular en D equipotente a $\mathcal{U}$. De este modo, $|\mathcal{U}| = |\{U \cap D : U \in \mathcal{U}\}| \leq c(D)$ y, por lo tanto, $c(X) \leq c(D)$.

Para la prueba de (3), supongamos que κ es un calibre para D y sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de τ_X^+ . Como D es denso en X , $\{U_\alpha \cap D : \alpha < \kappa\}$ es una subcolección de τ_D^+ y, por ende, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $\bigcap_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap D) \neq \emptyset$; en especial, $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$. El argumento para la implicación directa de (2) es similar.

Para verificar la implicación recíproca de (2), supongamos que κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para X . Fijemos $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_D^+$ y, para cada $\alpha < \kappa$, tomemos $U_\alpha \in \tau_X^+$ con $V_\alpha = U_\alpha \cap D$. Luego, si $J \in [\kappa]^\kappa$ cumple que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es centrada (resp.,

ligada), entonces la densidad del conjunto D garantiza que $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ también es centrada (resp., ligada). $\square$

La proposición 2.1.6 conecta las condiciones de cadena de un espacio topológico con las de cualquiera de sus extensiones (véanse los corolarios 2.1.10 y 5.1.13).

Proposición 2.1.7. *Si X es un espacio topológico, κ es un precalibre débil para X y $\mathcal{U}$ es una familia celular en X , entonces $|\mathcal{U}| < \kappa$. En especial, $c(X) \leq k(X)$.*

Demostración. Si $|\mathcal{U}| \geq \kappa$, podemos extraer un subconjunto $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de $\mathcal{U}$ de tal forma que $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, siempre que $\alpha < \beta < \kappa$. En consecuencia, κ no es un precalibre débil para X . $\square$

Proposición 2.1.8. *Si X es un espacio topológico, κ es un número cardinal y $d(X) < \text{cf}(\kappa)$, entonces κ es un calibre para X . En particular, $\check{s}(X) \leq d(X)$ y $\{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > d(X)\} \subseteq \text{C}(X)$.*

Demostración. Sean $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una subcolección de τ_X^+ , D un subconjunto denso de X con $|D| \leq d(X)$ y $e : \kappa \rightarrow \bigcup_{\alpha < \kappa} (U_\alpha \cap D)$ una función de elección. Así, la condición $\text{img}(e) \subseteq D$ implica que $|\text{img}(e)| < \text{cf}(\kappa)$ y, por ende, para alguna $\beta < \alpha$ el conjunto $J := e^{-1}\{e(\beta)\}$ satisface $|J| = \kappa$. De este modo, $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$. $\square$

Además, se puede utilizar un argumento similar al expuesto en la proposición 2.1.6 para demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.1.9. *Si X es un espacio topológico, U es un subconjunto abierto de X y κ es un cardinal infinito, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. $c(U) \leq c(X)$.
2. Si κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para X , entonces κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para U .

En consecuencia, $\check{s}(U) \leq \check{s}(X)$, $w\check{s}(U) \leq w\check{s}(X)$ y $k(U) \leq k(X)$.

Un espacio de Hausdorff es H -cerrado si es cerrado en cualquier extensión Hausdorff del mismo; por ejemplo, cualquier espacio compacto de Hausdorff es H -cerrado. Naturalmente, un espacio es *localmente H -cerrado* si cualquier punto admite una vecindad H -cerrada. Un resultado clásico de extensiones garantiza que si X es un espacio de Hausdorff localmente H -cerrado, entonces X es abierto en cualquiera de sus extensiones T_2 (véase [54, Proposition (b)(1), p. 543]). Con este antecedente, el siguiente resultado es una consecuencia de las proposiciones 2.1.6 y 2.1.9.

Corolario 2.1.10. *Si X es un espacio de Hausdorff localmente H -cerrado y Y es una extensión T_2 de X , entonces $\text{C}(X) = \text{C}(Y)$, $\text{P}(X) = \text{P}(Y)$ y $\text{WP}(X) = \text{WP}(Y)$.*

Las propiedades básicas que hemos enunciado hasta este momento pueden combinarse para obtener una nueva característica acerca de la herencia de las condiciones de cadena con respecto a una clase especial de subconjuntos. El siguiente resultado también es una consecuencia de las proposiciones 2.1.6 y 2.1.9, combinadas con el hecho de que si A es un cerrado regular, entonces $\text{int } A$ es denso en A .

Proposición 2.1.11. *Si X es un espacio topológico, A es un subconjunto cerrado regular de X y κ es un cardinal infinito, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. $c(A) \leq c(X)$.
2. Si κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para X , entonces κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para A .

En consecuencia, $\check{s}(A) \leq \check{s}(X)$, $w\check{s}(A) \leq w\check{s}(X)$ y $k(A) \leq k(X)$.

¿Es cierto que los conceptos de calibre, precalibre y precalibre débil coinciden? Los ejemplos 2.5.8 y 2.6.1 más adelante contestan negativamente la pregunta en el caso de los calibres y precalibres. Por otra parte, las secciones 2.3, 3.5 y 4.1 están dedicadas a explorar la cuestión correspondiente para precalibres y precalibres débiles; en particular, veremos que la respuesta depende de los axiomas consistentes con ZFC (Axiomas de Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección) que se adicione a ZFC (véase por ejemplo el corolario 3.5.6).

Una conjetura natural es que si $\kappa > \lambda \geq \omega$ y κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) de X , entonces λ también lo es. No obstante, un ejemplo sencillo muestra que esto no es así. En efecto, el espacio de ordinales $[0, \omega_1)$ satisface que $\{\{\alpha + 1\} : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular de tamaño ω_1 en $[0, \omega_1)$, lo cual implica que ω_1 no es un precalibre débil para $[0, \omega_1)$ (véase la proposición 2.1.7). Por otro lado, si κ es tal que $\text{cf}(\kappa) > \omega_1$, entonces una combinación de la proposición 2.1.8 y la relación $d([0, \omega_1)) = \omega_1$ indica que κ es un calibre para $[0, \omega_1)$.

También, es razonable preguntarse si es cierto el recíproco del inciso (3) de la proposición 2.1.6(3). Contestaremos esta pregunta negativamente en el ejemplo 2.5.8, una vez que tengamos algunos resultados que nos ayuden a entender el comportamiento de los calibres en los productos topológicos.

Por otro lado, existe un recíproco parcial del inciso (3) al considerar el concepto de ω -cerradura. Para un subconjunto Y de un espacio topológico X , definimos la ω -cerradura de Y como el conjunto $\bar{Y}^\omega := \bigcup \{\bar{A} : A \in [Y]^{\leq \omega}\}$. Además, Y es ω -denso en X si $X = \bar{Y}^\omega$. Claramente, cualquier conjunto ω -denso es denso. Por otra parte, el ejemplo 7.3.5 constata que la implicación recíproca no es válida. La prueba de nuestro siguiente resultado es una adaptación del argumento expuesto en [85, Proposition 2, p. 268].

Proposición 2.1.12. *Si Y es un subconjunto ω -denso de X y $\kappa \in C(X)$ satisface $\text{cf}(\kappa) > \omega$, entonces $\kappa \in C(Y)$.*

Demostración. Sean $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de τ_Y^+ y $U_\alpha \in \tau_X^+$ con $U_\alpha \cap Y = V_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$. Como κ es un calibre para X , existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$. Fijemos $x \in \bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha$ y sea $A \in [Y]^{\leq \omega}$ tal que $x \in \bar{A}$. Luego, para cada $\alpha \in J$ existe $y_\alpha \in A$ con $y_\alpha \in U_\alpha$. Así, la asignación $J \rightarrow A$ definida mediante $\alpha \mapsto y_\alpha$ tiene una fibra de cardinalidad κ , es decir, existe $I \in [J]^\kappa$ tal que $y_\alpha = y_\beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$. Finalmente, se satisface que $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ tiene intersección no vacía. $\square$

También podemos preguntarnos acerca de las implicaciones recíprocas en las proposiciones 2.1.9(2) y 2.1.11(2). Por ejemplo, si consideramos al espacio $[0, \omega_1)$, entonces $\{0\}$ es un subconjunto abierto y cerrado de éste que, por el corolario 2.1.13, tiene calibre ω_1 ; no obstante, $c([0, \omega_1)) = \omega_1$. Un par de espacios más sofisticados que también ejemplifican que las desigualdades restantes en las proposiciones 2.1.9 y 2.1.11 no necesariamente se verifican se pueden encontrar en los ejemplos 2.3.6 y 2.3.7.

Consideremos ahora la siguiente pregunta: ¿es posible determinar cuáles son las colecciones de calibres, precalibres y precalibres débiles de cualquier espacio topológico? Exploraremos ampliamente esta pregunta en lo que resta de este trabajo. Por ejemplo, una combinación de las proposiciones 1.6.3 y 2.1.3 provee el siguiente resultado.

Corolario 2.1.13. *Si X es un espacio topológico finito, entonces todos los cardinales infinitos son calibres para X .*

A la luz del corolario anterior, debemos restringir nuestro estudio a la clase de los espacios topológicos infinitos para obtener resultados interesantes. Sin embargo, aún es deseable no imponer esa restricción en general para poder aplicar ciertos teoremas de preservación sobre las condiciones de cadena que se expondrán en las páginas siguientes.

2.2. Condiciones de cadena y cofinalidad

En la proposición 2.1.8 demostramos que si X es un espacio topológico y κ es un número cardinal con $\text{cf}(\kappa) > d(X)$, entonces κ es un calibre para X . Este es uno de los múltiples resultados que relacionan la cofinalidad de un número cardinal con las condiciones de cadena en los espacios topológicos. En esta sección expondremos varios enunciados de esta índole.

Siempre que aparezca un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para un espacio topológico dado, el siguiente resultado garantiza la existencia de otro (resp., precalibre; precalibre débil) adicional:

Proposición 2.2.1. *Si X es un espacio topológico y κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para X , entonces $\text{cf}(\kappa)$ también lo es.*

Demostración. El resultado es evidente cuando κ es regular. Ahora, sean κ un calibre singular para X , $\{U_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ un subconjunto de τ_X^+ y $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ una $(\kappa, 0)$ -sucesión (véase el lema 1.2.5). Para cada $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ sea $I_\alpha := [\kappa_\alpha, \kappa_{\alpha+1})$. Luego, para cada $\beta < \kappa$ sea $V_\beta := U_\alpha$ donde $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ es el único ordinal con $\beta \in I_\alpha$. Como κ es un calibre para X , existe $I \in [\kappa]^\kappa$ con $\bigcap \{V_\beta : \beta \in I\} \neq \emptyset$. Sea $J := \{\alpha < \text{cf}(\kappa) : \exists \beta \in I (V_\beta = U_\alpha)\}$. Observemos que $J = \{\alpha < \text{cf}(\kappa) : I_\alpha \cap I \neq \emptyset\}$ satisface $|J| \leq \text{cf}(\kappa)$. Además, $|J| \geq \text{cf}(\kappa)$ porque $I = \bigcup_{\alpha \in J} (I_\alpha \cap I)$, $|I| = \kappa$ y $|I \cap I_\alpha| < \kappa$ para toda $\alpha \in J$. En consecuencia, $J \in [\text{cf}(\kappa)]^{\text{cf}(\kappa)}$ y $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$. $\square$

Más adelante, en el corolario 2.5.4, demostraremos que la propiedad de tener precalibre débil κ es finitamente productiva. Utilizaremos este hecho en la prueba de nuestro siguiente resultado. Recuerde que $c^*(X)$ es el número cardinal $\sup\{c(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Corolario 2.2.2. *Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal infinito con $\text{cf}(\kappa) < c^*(X)$, entonces κ no es un precalibre débil para X . En otras palabras, $\text{WP}(X) \subseteq \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) \geq c^*(X)\}$.*

Demostración. La condición $\text{cf}(\kappa) < c^*(X)$ produce $n \in \mathbb{N}$ con $\text{cf}(\kappa) < c(X^n)$ y, por ende, existe una familia celular en X^n de cardinalidad $\text{cf}(\kappa)$. De este modo, una combinación de las proposiciones 2.1.7 y 2.2.1 garantiza que κ no es un precalibre débil para X^n . Por lo tanto, κ no es un precalibre débil para X . $\square$

A partir de la proposición 2.2.1 surge la pregunta: ¿es cierto que si $\text{cf}(\kappa)$ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para X , entonces κ también lo es? En general, este no es el caso (véase el ejemplo 2.6.2), sin embargo, bajo ciertas condiciones sí sucede lo planteado. Por ejemplo, en nuestro siguiente resultado ofrecemos una condición suficiente relacionada con el π -peso para obtener una respuesta afirmativa (véase también [16, Theorem 2.3, p. 25]):

Proposición 2.2.3. *Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal infinito con $\pi w(X) < \kappa$ y X tiene calibre $\text{cf}(\kappa)$, entonces κ es un calibre para X . En símbolos, $\{\kappa \in \text{CN} : \kappa > \pi w(X) \wedge \text{cf}(\kappa) \in \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(X))\}$.*

Demostración. Claramente el enunciado es verdadero cuando κ es regular. Supongamos entonces que κ es singular y sea $\{\kappa_\xi : \xi < \text{cf}(\kappa)\}$ una sucesión estrictamente creciente de números cardinales con $\sup\{\kappa_\xi : \xi < \text{cf}(\kappa)\} = \kappa$. Además, sean $\lambda := \pi w(X)$, $\{V_\gamma : \gamma < \lambda\}$ una π -base para X , $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de τ_X^+ y, para cada $\gamma < \lambda$, definamos $J_\gamma := \{\alpha < \kappa : V_\gamma \subseteq U_\alpha\}$. En estas circunstancias, como $\kappa = \bigcup_{\gamma < \lambda} J_\gamma$ y $\lambda < \kappa$, obtenemos que $\kappa = \sup\{|J_\gamma| : \gamma < \lambda\}$.

Para cada $\xi < \text{cf}(\kappa)$ sea $\gamma(\xi) < \lambda$ de tal modo que $|J_{\gamma(\xi)}| \geq \kappa_\xi$. En vista de que $\text{cf}(\kappa)$ es una calibre para X , existe $I \in [\text{cf}(\kappa)]^{\text{cf}(\kappa)}$ con $\bigcap_{\xi \in I} V_{\gamma(\xi)} \neq \emptyset$. Finalmente, $J := \bigcup_{\xi \in I} J_{\gamma(\xi)}$ satisface $J \in [\kappa]^\kappa$ y $\bigcap_{\xi \in I} V_{\gamma(\xi)} \subseteq \bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha$. $\square$

La proposición 2.2.3 tendrá un papel fundamental para acrecentar colecciones de calibres en ciertos espacios topológicos. Más adelante, en el ejemplo 2.6.2, veremos que la desigualdad $\pi w(X) < \kappa$ en la proposición anterior no puede mejorarse a $\pi w(X) \leq \kappa$. Por otra parte, en virtud de que para cualquier espacio X se satisface la relación $d(X) \leq \pi w(X)$ (véase [32]), las proposiciones 2.1.8 y 2.2.3 implican el siguiente corolario.

Corolario 2.2.4. *Si X es un espacio topológico con $\pi w(X) = \omega$, entonces X es fuertemente Šanin. Más aún, cuando $\omega \in C(X)$ se satisface que $C(X) = \text{CN}$.*

También es posible obtener resultados similares a la proposición 2.2.3 con respecto a precalibres. Por ejemplo, en [3, Lemma 2.4, p. 154] y en [16, Theorem 5.5, p. 93] se puede encontrar un enunciado de naturaleza un tanto técnica. Por otra parte, en [36, 5.14, p. 119] se demuestra la siguiente proposición.

Proposición 2.2.5. *Sean X un espacio topológico y κ un cardinal infinito con $\text{cf}(\kappa) \in P(X)$. Si para cada número cardinal $\mu < \kappa$ se satisface que $\mu^{\text{cf}(\kappa)} < \kappa$, entonces κ es un precalibre para X .*

En la proposición 2.3.2 demostraremos que los calibres y los precalibres coinciden en el ámbito de los espacios compactos de Hausdorff. En virtud de este hecho, el enunciado anterior implica el siguiente resultado.

Corolario 2.2.6. *Si X es un espacio compacto de Hausdorff y κ es un cardinal límite fuerte, entonces $\kappa \in C(X)$ si y sólo si $\text{cf}(\kappa) \in C(X)$.*

Una pregunta natural es si podemos hallar en ZFC un espacio topológico X y un cardinal infinito κ de tal forma que $\text{cf}(\kappa) \in P(X)$ y $\kappa \notin P(X)$. Resulta que esto es imposible porque Argyros y Tsarpalias demostraron en [3, Corollary 2.7, p. 155] que bajo la Hipótesis Generalizada del Continuo, GCH, el siguiente resultado se verifica.

Proposición 2.2.7. [GCH] *Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal infinito, entonces κ es un precalibre para X si y sólo si $\text{cf}(\kappa)$ es un precalibre para X . En especial, si X es compacto y T_2 , entonces κ es un calibre para X si y sólo si $\text{cf}(\kappa)$ es un calibre para X .*

Consideremos ahora espacios infinitos con la propiedad de Hausdorff. Claramente, si X es un espacio infinito y T_2 , los átomos del preorden τ_X^+ son, precisamente, los puntos aislados de X . Este hecho es consecuencia de que los elementos compatibles de τ_X^+ son exactamente aquellos que tienen intersección no vacía.

Por otro lado, es evidente que si un espacio topológico X admite una familia celular infinita, entonces $\omega \notin \text{WP}(X)$ (véase la proposición 2.1.7); en particular, como se indica en nuestro siguiente resultado, todos los espacios de Hausdorff infinitos no tienen a ω como precalibre débil.

Proposición 2.2.8. *Si X es un espacio de Hausdorff infinito, entonces X posee una familia celular infinita. En especial, ningún espacio de Hausdorff infinito tiene precalibre débil ω .*

Demostración. Si τ_X^+ tiene una colección infinita numerable de átomos, entonces la colección de átomos de τ_X^+ es una anticadena infinita en τ_X^+ . Por otra parte, si X tiene una cantidad finita de átomos y definimos

$$Y := \{x \in X : \{x\} \text{ no es átomo de } \tau_X^+\},$$

entonces τ_Y^+ es un preorden sin átomos y, por ende, la proposición 1.6.11 produce una anticadena infinita en τ_Y^+ . Resta observar que $\tau_Y^+ \subseteq \tau_X^+$ porque $Y \in \tau_X$ y, por ende, la anticadena infinita de τ_Y^+ es una anticadena infinita en τ_X^+ . En consecuencia, la proposición 2.1.2 constata que X admite una familia celular infinita. $\square$

De la proposición 2.2.1, el corolario 2.2.2 y la proposición 2.2.8 se desprende el siguiente corolario:

Corolario 2.2.9. *Si X es un espacio de Hausdorff infinito, entonces $\text{WP}(X) \subseteq \text{UC} \cap \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) \geq c^*(X)\}$.*

Así, una combinación de la proposición 2.1.8 y el corolario 2.2.9 produce un corolario adicional:

Corolario 2.2.10. *Si X es un espacio de Hausdorff infinito y separable, entonces $\text{C}(X) = \text{P}(X) = \text{WP}(X) = \text{UC}$.*

2.3. Relaciones entre calibres, precalibres y precalibres débiles

Este breve apartado del texto está dedicado a explorar algunos aspectos de la siguiente cuestión:

Pregunta 2.3.1. ¿Cuándo un espacio topológico X satisface $\text{C}(X) = \text{P}(X)$ ó $\text{P}(X) = \text{WP}(X)$?

Al respecto de estas preguntas hay una observación inmediata: como todo espacio topológico X satisface que $C(X) \subseteq P(X) \subseteq WP(X)$, únicamente tenemos que encontrar condiciones suficientes para garantizar que las inclusiones opuestas también sean ciertas.

El resultado que motiva esta sección fue extraído de [4] y es el siguiente:

Proposición 2.3.2. *Si X es un espacio compacto de Hausdorff, entonces $C(X) = P(X)$.*

Demostración. Sean $\kappa \in P(X)$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$. Para cada $\alpha < \kappa$, la regularidad de X produce $V_\alpha \in \tau_X^+$ con $V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$. Luego, como κ es un precalibre para X , existe $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada. De este modo, como $\{\overline{V_\alpha} : \alpha \in J\}$ es una familia centrada de cerrados en el compacto X , podemos concluir que $\emptyset \neq \bigcap_{\alpha \in J} \overline{V_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha$. En consecuencia, $\kappa \in C(X)$. $\square$

La proposición 2.3.2 tiene una generalización natural:

Proposición 2.3.3. *Si X es un espacio localmente compacto y T_2 , entonces $C(X) = P(X)$.*

Demostración. Si βX denota la compactación de Stone-Čech de X , entonces el corolario 2.1.10 y la proposición 2.3.2 garantizan las relaciones $C(X) = C(\beta X) = P(\beta X) = P(X)$. $\square$

Una pregunta razonable es si los espacios numerablemente compactos y T_2 satisfacen la relación $C = P$. La respuesta a esta cuestión es negativa: en el ejemplo 2.5.8 se presenta un espacio numerablemente compacto, cero-dimensional y T_2 tal que sus precalibres y calibres no coinciden.

Proposición 2.3.4. *Si un espacio topológico X admite una familia celular de cardinalidad $d(X)$, entonces $C(X) = P(X) = WP(X) = \{\kappa \in \mathbf{CN} : \text{cf}(\kappa) > d(X)\}$.*

Demostración. En virtud de la proposición 2.1.8, basta con ver que si κ es un precalibre débil para X , entonces $\text{cf}(\kappa) > d(X)$. En efecto, si $\kappa \in WP(X)$, entonces la proposición 2.2.1 garantiza que $\text{cf}(\kappa)$ también es un precalibre débil para X y, por ende, nuestra hipótesis permite utilizar la proposición 2.1.7 para asegurar que $\text{cf}(\kappa) > d(X)$. $\square$

En consecuencia, la proposición 2.3.4 y [32, Theorem 8.1, p. 32] implican:

Corolario 2.3.5. *Si X es un espacio infinito y metrizable, entonces $C(X) = P(X) = WP(X) = \{\kappa \in \mathbf{CN} : \text{cf}(\kappa) > d(X)\}$.*

La proposición 2.3.4, como veremos enseguida, puede utilizarse para determinar las condiciones de cadena de varios espacios.

Ejemplo 2.3.6. *Existe un espacio compacto de Hausdorff y primero numerable $\mathbb{L}$ con las siguientes propiedades:*

1. $|\mathbb{L}| = d(\mathbb{L}) = c(\mathbb{L}) = \mathfrak{c}$;
2. $\mathbb{L}$ admite una familia celular de cardinalidad $\mathfrak{c}$;
3. $C(\mathbb{L}) = P(\mathbb{L}) = WP(\mathbb{L}) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \mathfrak{c}\}$;
4. existe un subespacio abierto U de $\mathbb{L}$ tal que $C(U) = P(U) = WP(U) = \text{UC}$;
5. existe un subespacio cerrado regular A de $\mathbb{L}$ tal que $C(A) = P(A) = WP(A) = \text{UC}$, y
6. $\{\mathfrak{c}, \omega_1\} \subseteq (C(U) \cup C(A)) \setminus WP(\mathbb{L})$.

Demostración. El cuadrado lexicográfico, $\mathbb{L}$, es el conjunto $[0, 1]^2$ equipado con la topología generada por el orden lexicográfico (véase el ejemplo 48 de [74]). Este espacio tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ y $\{\{t\} \times (0, 1) : 0 < t < 1\}$ es una familia celular de tamaño $\mathfrak{c}$ en $\mathbb{L}$, lo cual implica, por la proposición 2.3.4, que los incisos (1), (2) y (3) son ciertos. Por otra parte, se puede comprobar que el subconjunto abierto $U := \{1/2\} \times (0, 1)$ y el subconjunto cerrado regular $A := \{1/2\} \times [1/3, 2/3]$ son homeomorfos, respectivamente, a los intervalos $(0, 1)$ y $[1/3, 2/3]$ equipados con la topología que heredan de $\mathbb{R}$. En consecuencia, U y A son espacios separables y, por ende, el corolario 2.2.10 garantiza los incisos (4) y (5). En especial, como $\text{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$ (véase [41, Corollary 10.41, p. 34]) y ω_1 es regular, deducimos que $\mathfrak{c}$ y ω_1 son elementos de la diferencia $(C(U) \cup C(A)) \setminus WP(\mathbb{L})$. $\square$

Ejemplo 2.3.7. Existe un espacio T_4 , numerablemente compacto y primero numerable $\mathcal{L}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $|\mathcal{L}| = \mathfrak{c}$ y $d(\mathcal{L}) = \omega_1 = c(\mathcal{L})$;
2. $\mathcal{L}$ admite una familia celular de cardinalidad ω_1 ;
3. $C(\mathcal{L}) = P(\mathcal{L}) = WP(\mathcal{L}) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \omega_1\}$;
4. existe un subespacio abierto U de $\mathcal{L}$ tal que $C(U) = P(U) = WP(U) = \text{UC}$;
5. existe un subespacio cerrado regular A de $\mathcal{L}$ tal que $C(A) = P(A) = WP(A) = \text{UC}$, y
6. $\omega_1 \in (C(U) \cup C(A)) \setminus WP(\mathcal{L})$.

Demostración. La línea larga es el conjunto $\mathcal{L} := [0, \omega_1) \times [0, 1)$ equipado con la topología generada por el orden lexicográfico. Es bien conocido que $\mathcal{L}$ tiene tamaño $\mathfrak{c}$, es numerablemente compacto, T_4 y primero numerable (véase el ejemplo 45 de [74]).

Ahora, es claro que $\{\{\alpha\} \times (0, 1) : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular en $\mathcal{L}$ de tamaño ω_1 , lo cual demuestra (2). Por otra parte, como $\{\langle \alpha, q \rangle : \alpha < \omega_1 \wedge q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)\}$ es un subconjunto denso de $\mathcal{L}$, deducimos que $d(\mathcal{L}) = \omega_1 = c(\mathcal{L})$. Adicionalmente, la proposición 2.3.4 garantiza que el inciso (3) es cierto. Para (4), es sencillo demostrar

que el subconjunto abierto $U := \{0\} \times (0, 1)$ y el subconjunto cerrado regular $A := \{0\} \times [1/3, 2/3]$ son homeomorfos, correspondientemente, a los intervalos $(0, 1)$ y $[1/3, 2/3]$ equipados con la topología euclidiana usual; en consecuencia, los incisos (4) y (5) se verifican por el corolario 2.2.10. Finalmente, como $\text{cf}(\omega_1) > \omega$, concluimos que $\omega_1 \in (C(U) \cup C(A)) \setminus \text{WP}(\mathcal{L})$. $\square$

Una cuestión natural es si se puede modificar la proposición 2.3.4 como sigue: si X es T_2 y $c(X) = d(X)$, entonces $C(X) = \text{WP}(X)$. Esta pregunta está relacionada con el problema clásico “sup vs. máx” con respecto a la celularidad; es decir, ¿es cierto que si $c(X) = \kappa$, entonces X admite una familia celular de cardinalidad κ ? Del material expuesto en [32, § 12] se deduce que si no hay cardinales débilmente inaccesibles, entonces la celularidad siempre se alcanza para los espacios de Hausdorff infinitos. A partir de este hecho y de la proposición 2.3.4 obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.3.8. *Si no existen cardinales débilmente inaccesibles, entonces cualquier espacio de Hausdorff infinito X que satisfaga la relación $c(X) = d(X)$ también verifica las igualdades $C(X) = P(X) = \text{WP}(X) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > d(X)\}$.*

Por otra parte, veremos más adelante en el corolario 5.2.3 que si κ es un cardinal débilmente inaccesible, entonces existe un espacio de Tychonoff X con $c(X) = \kappa = d(X)$ y $\kappa \in C(X) \setminus \{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) > d(X)\}$.

En vista de que todos los espacios de Hausdorff infinitos y separables satisfacen $C(X) = P(X)$ por el corolario 2.2.10, es razonable preguntar si los espacios de Lindelöf también tienen esta característica; en otras palabras, ¿es cierto que si X es Lindelöf, infinito y T_2 , entonces $C(X) = P(X)$? ¿qué tal si X es hereditariamente Lindelöf? Los ejemplos 4.3.6 y 7.3.4 contestan negativamente estas preguntas.

En el caso de las propiedades locales, nos preguntamos si la propiedad de Hausdorff combinada con la primera numerabilidad de un espacio implica la igualdad $C(X) = P(X)$. Resulta que, incluso en el ámbito de los espacios de Moore, el ejemplo 6.2.12 responde negativamente esta cuestión.

Una conjetura sensata es que, tal vez, al añadir un poco de estructura algebraica (e.g., grupo topológico, anillo topológico, espacio vectorial topológico, etcétera) a la estructura topológica de nuestros espacios, podríamos conseguir la propiedad $C = P$. Los ejemplos 7.3.4 y 7.3.5, que son espacios vectoriales topológicos localmente convexos (véase [4, Proposition 0.3.5, p. 9]), muestran que esta conjetura es falsa.

Para terminar esta sección conviene resaltar que en la sección 4.1, una vez que tengamos familiaridad con algunas consecuencias del Axioma de Martin (véase la sección 3.5), estudiaremos la posibilidad de que P y WP no coincidan aún en el contexto de los grupos topológicos Lindelöf Σ .

2.4. Condiciones de cadena en sumas topológicas

Con respecto a las sumas topológicas, comenzamos la presente sección con el cálculo de la celularidad. Recuerde que si $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos de un conjunto X y $Y \subseteq X$, entonces la *traza* de $\mathcal{A}$ sobre Y es el conjunto $\mathcal{A}|_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$.

Proposición 2.4.1. *Si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una colección de espacios topológicos, entonces*

$$c\left(\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha\right) = \lambda \cdot \sup\{c(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}.$$

Demostración. Sea $X := \bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$. Primero, como $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en X , es claro que $c(X) \geq \lambda$. Además, como para cada $\alpha < \lambda$ se satisface $X_\alpha \in \tau_X$, deducimos que $c(X_\alpha) \leq c(X)$ (véase la proposición 2.1.9). En consecuencia, $c(X) \geq \sup\{c(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}$ y por ende

$$c(X) \geq \max\{\lambda, \sup\{c(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}\} = \lambda \cdot \sup\{c(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}.$$

Por otro lado, si $\mathcal{U}$ es una familia celular en X y $\mathcal{U}_\alpha := \mathcal{U}|_{X_\alpha}$ para cada $\alpha < \lambda$, deducimos que $\mathcal{U}_\alpha$ es una familia ajena por pares contenida en τ_{X_α} ; por lo tanto, $|\mathcal{U}_\alpha| \leq c(X_\alpha)$. Luego, si para cada $U \in \mathcal{U}$ se define $\alpha(U) := \min\{\alpha < \lambda : U \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$, entonces la función $\mathcal{U} \rightarrow \lambda \times \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{U}_\alpha$ dada por $U \mapsto (\alpha(U), U \cap X_{\alpha(U)})$ es inyectiva y, por consiguiente,

$$|\mathcal{U}| \leq \left| \lambda \times \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{U}_\alpha \right| \leq \lambda \cdot \sup\{|\mathcal{U}_\alpha| : \alpha < \lambda\} \leq \lambda \cdot \sup\{c(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}.$$

De este modo, $c(X) \leq \lambda \cdot \sup\{c(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}$. □

Para establecer resultados similares en términos de calibres, precalibres y precalibres débiles, necesitamos demostrar primero un resultado que generaliza a [83, T.276, p. 311].

Proposición 2.4.2. *Sean λ un número cardinal, X un espacio topológico y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de subespacios de X . Si $\text{cf}(\kappa) > \lambda$ y κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para cada X_α , entonces κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para $\bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$.*

Demostración. Sea $Y := \bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, fijemos un subconjunto $\{U_\gamma : \gamma < \kappa\}$ de τ_Y^+ y para $\gamma < \kappa$ definamos $\alpha(\gamma) := \min\{\alpha < \lambda : U_\gamma \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$. La condición $\text{cf}(\kappa) > \lambda$ garantiza que la función $\kappa \rightarrow \lambda$ dada por $\gamma \mapsto \alpha(\gamma)$ tiene una fibra de tamaño κ , es decir, existen $J \in [\kappa]^\kappa$

y $\alpha < \lambda$ tales que $\alpha(\gamma) = \alpha$, siempre que $\gamma \in J$. Finalmente, como $\{U_\gamma \cap X_\alpha : \gamma \in J\}$ es un subconjunto de $\tau_{X_\alpha}^+$ y X_α tiene calibre κ , obtenemos $I \in [J]^\kappa$ tal que $\bigcap_{\gamma \in I} (U_\gamma \cap X_\alpha) \neq \emptyset$; en consecuencia, $\{U_\gamma : \gamma \in I\}$ tiene intersección no vacía. $\square$

La proposición 2.4.2 se puede emplear para determinar cuándo una suma topológica tiene un cierto calibre, precalibre o precalibre débil.

Proposición 2.4.3. *Sean κ y λ un par de números cardinales. Si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos, entonces $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ tiene calibre (resp., precalibre; precalibre débil) κ si y sólo si $\text{cf}(\kappa) > \lambda$ y cada sumando tiene calibre (resp., precalibre; precalibre débil) κ .*

Demostración. La implicación recíproca es consecuencia de la proposición 2.4.2. Para verificar la implicación directa, supongamos que $X := \bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ tiene calibre κ y notemos primero que, como todos los X_α son subespacios abiertos de X , entonces cada sumando tiene calibre κ (véase la proposición 2.1.9). Por último, si suponemos que $\text{cf}(\kappa) \leq \lambda$, entonces $\text{cf}(\kappa)$ no es un precalibre débil para X porque $\{X_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ es una familia celular y así, la proposición 2.2.1 garantiza que κ tampoco es un precalibre débil para X , una contradicción a nuestra hipótesis. De esta manera, $\text{cf}(\kappa) > \lambda$. $\square$

2.5. Condiciones de cadena en productos topológicos

Para hacer contraste con las proposiciones 2.4.1 y proposición 2.4.3, la preservación de las condiciones de cadena en el ámbito de los productos topológicos es un tema más delicado. Por ejemplo, los aspectos fundamentales del problema de la celularidad en los productos topológicos ameritan por su extensión que sean expuestos en el capítulo 3 del presente texto.

No obstante, también es posible mencionar algunos resultados sencillos. Comencemos con el siguiente resultado de preservación de las condiciones de cadena bajo funciones especiales.

Proposición 2.5.1. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos.*

1. *Si f es continua y suprayectiva, entonces $C(X) \subseteq C(Y)$, $P(X) \subseteq P(Y)$, $WP(X) \subseteq WP(Y)$ y $c(X) \geq c(Y)$.*
2. *Cuando f es abierta e inyectiva, $C(Y) \subseteq C(X)$, $P(Y) \subseteq P(X)$, $WP(Y) \subseteq WP(X)$ y $c(Y) \geq c(X)$.*

Demostración. Para el inciso (1) observemos que si $\mathcal{V}$ es una familia celular en Y , entonces $\{f^{-1}[V] : V \in \mathcal{V}\}$ es una familia celular en X equipotente con $\mathcal{V}$; en consecuencia, $c(X) \geq c(Y)$. Por otra parte, si $\kappa \in C(X)$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_Y^+$, resulta que

$\{f^{-1}[U_\alpha] : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$. De este modo, como κ es un calibre para X , existe $J \in [\kappa]^\kappa$ de tal forma que $\bigcap_{\alpha \in J} f^{-1}[U_\alpha] \neq \emptyset$. En este caso, se satisface la relación $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$.

Para demostrar la afirmación del inciso (2), si $\mathcal{U}$ es una familia celular en X , entonces $\{f[U] : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia celular en Y equipotente con $\mathcal{U}$; en especial, $c(Y) \geq c(X)$. Por otro lado, si $\kappa \in C(Y)$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$, sucede que $\{f[U_\alpha] : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_Y^+$. Así, como κ es un calibre para Y , existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $\bigcap_{\alpha \in J} f^{-1}[U_\alpha] \neq \emptyset$. Finalmente, como f es inyectiva, se infiere que $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$. $\square$

La siguiente afirmación se deduce a partir de la proposición 2.5.1 combinada con el hecho de que las proyecciones canónicas son continuas y suprayectivas.

Proposición 2.5.2. *Si κ es un cardinal infinito, λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para el producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, entonces κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para cada factor.*

Por otra parte, con respecto a los productos finitos, los calibres, precalibres y precalibres débiles también se preservan sin inconvenientes.

Proposición 2.5.3. *Sea κ un cardinal infinito. Si X y Y son espacios topológicos con calibre (resp., precalibre; precalibre débil) κ , entonces el producto $X \times Y$ también tiene calibre (resp., precalibre; precalibre débil) κ .*

Demostración. Sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de $\tau_{X \times Y}^+$ formado por abiertos canónicos. Fijemos colecciones $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$ y $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_Y^+$ tales que $U_\alpha = V_\alpha \times W_\alpha$, para cada $\alpha < \kappa$. Primero, como κ es un calibre para Y , existe $I \in [\kappa]^\kappa$ con $\bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha \neq \emptyset$. Luego, como X tiene calibre κ , hay $J \in [I]^\kappa$ de tal forma que $\bigcap_{\alpha \in J} V_\alpha \neq \emptyset$. En estas circunstancias se satisface que $J \in [\kappa]^\kappa$ y $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$. $\square$

Corolario 2.5.4. *Sea κ un cardinal infinito. Si $1 \leq n < \omega$, $\{X_m : m < n\}$ es una familia de espacios topológicos y κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para cada X_m , entonces κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para el producto $\prod_{m < n} X_m$.*

Con respecto a los productos con una cantidad arbitraria de factores, el siguiente teorema fue demostrado originalmente por Šanin en [67].

Teorema 2.5.5. *Si κ es un cardinal regular no numerable, λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y κ es un calibre (resp., precalibre) para cada factor, entonces κ es un calibre (resp., precalibre) para el producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$.*

Lo que sigue es demostrar que, aunque Šanin no consideró precalibres débiles en el teorema 2.5.5, el resultado correspondiente también es cierto.

Teorema 2.5.6. *Si κ es un cardinal regular no numerable, λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y κ es un precalibre débil para cada factor, entonces κ es un precalibre débil para el producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$.*

Demostración. En virtud del corolario 2.5.4, podemos suponer que λ es infinito. Sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de abiertos canónicos de $X := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$. Además, para toda $\alpha < \kappa$, fijemos $A_\alpha \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y, para cada $\beta \in A_\alpha$, $U(\alpha, \beta) \in \tau_{X_\beta}^+$ de tal modo que $U_\alpha = \bigcap_{\beta \in A_\alpha} \pi_\beta^{-1}[U(\alpha, \beta)]$. Adicionalmente, supondremos sin perder generalidad que $\bigcap_{\alpha < \kappa} A_\alpha \neq \emptyset$.

Por el teorema 1.2.3 aplicado a la familia $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$, existen conjuntos $J \in [\kappa]^\kappa$ y A tales que $A_\alpha \cap A_\beta = A$, siempre que $\alpha, \beta \in J$ son distintos. Ahora, como la condición $\bigcap_{\alpha < \kappa} A_\alpha \neq \emptyset$ implica que $A \neq \emptyset$, el producto $X_A := \prod_{\beta \in A} X_\beta$ tiene precalibre débil κ por el corolario 2.5.4.

Para cada $\beta \in A$ denotemos por $\rho_\beta : X_A \rightarrow X_\beta$ a la proyección canónica. Además, sea $V(\alpha, \beta) := \bigcap_{\beta \in A} \rho_\beta^{-1}[U(\alpha, \beta)]$ para cualesquiera $\alpha \in J$ y $\beta \in A$. Claramente, $\{\bigcap_{\beta \in A} V(\alpha, \beta) : \alpha \in J\}$ es un subconjunto de $\tau_{X_A}^+$. Luego, como κ es un precalibre débil para X_A , existe $I \in [J]^\kappa$ con la propiedad de que $\{\bigcap_{\beta \in A} V(\alpha, \beta) : \alpha \in I\}$ es ligada.

Finalmente, con el objetivo de ver que $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es ligada, tomemos $\alpha, \gamma \in I$ y fijemos un punto

$$q \in \bigcap_{\beta \in A} V(\alpha, \beta) \cap \bigcap_{\delta \in A} V(\gamma, \delta).$$

Además, para cualesquiera $\beta \in A_\alpha \setminus A$ y $\delta \in A_\gamma \setminus A$, sean $p(\alpha, \beta) \in U(\alpha, \beta)$ y $p(\gamma, \delta) \in U(\gamma, \delta)$. La colección $\{q, \{(\beta, p(\alpha, \beta)) : \beta \in A_\alpha \setminus A\}, \{(\delta, p(\gamma, \delta)) : \delta \in A_\gamma \setminus A\}\}$ es una familia compatible de funciones y, por ende, existe $p \in X$ que extiende a $q \cup \{(\beta, p_\beta^\alpha) : \beta \in A_\alpha \setminus A\} \cup \{(\delta, p_\delta^\gamma) : \delta \in A_\gamma \setminus A\}$. En estas circunstancias, un argumento rutinario muestra que $p \in U_\alpha \cap U_\gamma$. $\square$

Surge otra pregunta: ¿qué pasa si κ es singular? En esta dirección Shelah estableció en [71] el siguiente resultado:

Teorema 2.5.7. *Si κ es un cardinal infinito y λ es un número cardinal, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *Si X es un espacio topológico con calibre κ y $\text{cf}(\kappa) > \omega$, entonces la potencia X^λ también tiene calibre κ .*
2. *Si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos, cada uno con calibre κ , y $\lambda < \text{cf}(\kappa)$, entonces $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ también tiene calibre κ .*

Aunque Shelah no demostró el teorema 2.5.7 en sus variantes para precalibres y precalibres débiles, es posible adaptar su argumento original para demostrar dichas

versiones (véase [57]). En vista de que estas modificaciones son algo técnicas, no las presentaremos en este espacio y concentraremos ese material en la sección 2.8.

Por otra parte, es indispensable mencionar que en general no se preservan las condiciones de cadena singulares en productos topológicos. Sustentaremos esta afirmación más adelante en el teorema 2.6.3 con un resultado de Gerlits.

El teorema 2.5.7 sirve, por ejemplo, para establecer algunas propiedades interesantes acerca de los cubos de Cantor y sus subespacios. Recordemos que si κ es un cardinal infinito, entonces el *logaritmo* de κ es el número cardinal $\log(\kappa) := \min\{\lambda \in \mathbb{CN} : 2^\lambda \geq \kappa\}$.

Ejemplo 2.5.8. *Para cualquier cardinal infinito κ el cubo de Cantor $D(2)^\kappa$ tiene las siguientes propiedades.*

1. $D(2)^\kappa$ es compacto, Hausdorff y cero-dimensional.
2. $C(D(2)^\kappa) = P(D(2)^\kappa) = WP(D(2)^\kappa) = UC$.
3. $\pi w(D(2)^\kappa) = \kappa$ y $d(D(2)^\kappa) = \log(\kappa)$.
4. $D(2)^\kappa$ admite un subespacio denso y numerablemente compacto X_κ que satisface las siguientes condiciones:
 - (a) $P(X_\kappa) = WP(X_\kappa) = UC$.
 - (b) $C(X_\kappa) = \{\lambda \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\lambda) > \kappa\}$.
 - (c) $\check{s}(X_\kappa) = d(X_\kappa) = \pi w(X_\kappa) = \kappa$.
5. Si $\text{cf}(\kappa) > \omega$, entonces κ es un calibre para $D(2)^\kappa$ pero no lo es para $\tau_{D(2)^\kappa}^+$.
6. Si κ es un cardinal sucesor, entonces $d(D(2)^\kappa) < d(\tau_{D(2)^\kappa}^+)$.

Demostración. Claramente, $D(2)^\kappa$ satisface las condiciones del inciso (1). Además, una combinación de los corolarios 2.1.13 y 2.2.9 con el teorema 2.5.7 garantiza que $C(D(2)^\kappa) = P(D(2)^\kappa) = WP(D(2)^\kappa) = UC$. Por otra parte, las demostraciones de las relaciones $\pi w(D(2)^\kappa) = \kappa$ y $d(D(2)^\kappa) = \log(\kappa)$ se pueden encontrar en [32, Example 11.8, p. 44].

Con respecto a (4), consideremos la función constante cero $\bar{0} \in D(2)^\kappa$ y al Σ -producto $X_\kappa := \Sigma(D(2)^\kappa, \bar{0})$. Tenemos que X_κ es un subespacio numerablemente compacto y denso de $D(2)^\kappa$ (véase el lema 1.4.4). Además, como la proposición 2.1.6 garantiza que los precalibres y precalibres débiles de X_κ y $D(2)^\kappa$ coinciden, el inciso (2) del presente resultado implica que $P(X_\kappa) = WP(X_\kappa) = UC$. Por otro lado, como en espacios regulares se cumple que el π -peso de los subespacios densos coincide con el

π -peso del espacio ambiente (véase [32, Theorem 3.9, p. 17]), también se verifica la relación $\pi w(X_\kappa) = \kappa$.

Ahora, para comprobar las igualdades restantes observemos primero que para cualquier cardinal $\omega < \lambda \leq \kappa$ se constata que λ no es un calibre para X_κ . Esto es porque si $\omega < \lambda \leq \kappa$ y consideramos la familia $\{\pi_\alpha^{-1}\{1\} \cap X_\kappa : \alpha < \lambda\}$, entonces no es posible encontrar $J \in [\lambda]^\lambda$ con $\bigcap \{\pi_\alpha^{-1}\{1\} \cap X_\kappa : \alpha \in J\} \neq \emptyset$. Este hecho implica que el número de Šanin de X_κ satisface la relación $\check{s}(X_\kappa) \geq \kappa$; en consecuencia, $\kappa \leq \check{s}(X_\kappa) \leq d(X_\kappa) \leq \pi w(X_\kappa) = \kappa$.

Por último, para el cálculo de la colección de (4)(b) notemos que por lo expuesto en el párrafo anterior y la proposición 2.2.1 se cumple que $C(X_\kappa) \subseteq \{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) > \kappa\}$. Por otra parte, como $d(X_\kappa) = \kappa$ la proposición 2.1.8 implica que $\{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) > \kappa\} \subseteq C(X_\kappa)$.

Para el inciso (5) notemos que por el inciso (2), cuando κ tiene cofinalidad no numerable, κ es un calibre para $D(2)^\kappa$; sin embargo, si consideramos la familia de abiertos $\{\pi_\alpha^{-1}\{0\} : \alpha < \kappa\}$ y fijamos un conjunto $J \in [\kappa]^\kappa$, entonces la colección $\{\pi_\alpha^{-1}\{0\} : \alpha \in J\}$ no está acotada inferiormente en $\tau_{D(2)^\kappa}^+$. En efecto, si suponemos por el contrario que $U \in \tau_{D(2)^\kappa}^+$ cumple $U \subseteq \bigcap \{\pi_\alpha^{-1}\{0\} : \alpha \in J\}$, entonces existen un conjunto $F \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y una colección de abiertos $\{U_\alpha : \alpha \in F\}$ con $\bigcap \{\pi_\alpha^{-1}[U_\alpha] : \alpha \in F\} \subseteq \bigcap \{\pi_\alpha^{-1}\{0\} : \alpha \in J\}$. No obstante, si para cada $\alpha \in F$ tomamos $p_\alpha \in U_\alpha$ y hacemos $p := \{(\alpha, p_\alpha) : \alpha \in F\} \cup ((\kappa \setminus F) \times \{1\})$, entonces deducimos el absurdo $p \in \bigcap \{\pi_\alpha^{-1}[U_\alpha] : \alpha \in F\} \setminus \bigcap \{\pi_\alpha^{-1}\{0\} : \alpha \in J\}$.

Finalmente, para ver que el inciso (6) es cierto, supongamos que λ es un cardinal tal que $\kappa = \lambda^+$. En estas circunstancias, una combinación de la proposición 2.1.4 con el inciso (3) garantiza que $d(D(2)^\kappa) = \log(\kappa) = \log(\lambda^+) \leq \lambda < \lambda^+ = \kappa = \pi w(D(2)^\kappa) = d(\tau_{D(2)^\kappa}^+)$. $\square$

En el ejemplo 2.6.1 generalizaremos la igualdad que obtuvimos en el inciso (4)(b) del ejemplo 2.5.8 para cualquier Σ -producto.

Mencionamos a continuación tres resultados más al respecto de las condiciones de cadena en productos topológicos. El primero de ellos lo estableció Juhász en [36, 5.11, p. 115] y dice lo siguiente:

Teorema 2.5.9. *Si λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y κ es un número cardinal con $d(X_\alpha) < \text{cf}(\kappa)$ para cualquier $\alpha < \lambda$, entonces κ es un calibre para $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$.*

Por otra parte, en [3, Corollary 2.8, p. 155] Argyros y Tsarpalias demostraron que, bajo GCH, los siguientes resultados de preservación son válidos:

Teorema 2.5.10. [GCH] *Si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y κ es un número cardinal con $\text{cf}(\kappa) > \omega$, entonces los siguientes enunciados se cumplen.*

1. κ es un precalibre para el producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ si y sólo si κ es un precalibre para cada factor.
2. Si cada X_α es un espacio compacto de Hausdorff, entonces κ es un calibre para $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ si y sólo si κ es un calibre para cada factor.

Finalmente, Comfort y Negrepointis demostraron en [16, Corollary 3.15, p. 60] el siguiente teorema:

Teorema 2.5.11. Sean κ un cardinal singular con $\text{cf}(\kappa) > \omega$, λ un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios topológicos. Si para cada $\alpha < \lambda$ se satisface que X_α tiene calibre κ y calibre μ , para cada cardinal regular y no numerable $\mu < \kappa$, entonces $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ tiene calibre κ .

2.6. Ejemplos sobresalientes

Hasta este momento únicamente hemos presentado resultados positivos con respecto a la preservación de calibres en productos topológicos bajo ciertas condiciones; presentamos en esta sección un resultado negativo. Primero veamos una familia de espacios topológicos cuya colección de calibres podemos caracterizar completamente (véanse [16, Theorem 4.2, p. 80] y [36, Example 7.7, p. 147]).

Ejemplo 2.6.1. Sean κ y λ un par de cardinales infinitos con $\lambda \leq \kappa$. Consideremos el cubo de Cantor $D(2)^\kappa$ y el subespacio

$$\Sigma_\lambda(\kappa) := \left\{ x \in D(2)^\kappa : \left| \{ \alpha < \kappa : x(\alpha) = 1 \} \right| < \lambda \right\}.$$

Entonces un cardinal infinito μ **no** es un calibre para $\Sigma_\lambda(\kappa)$ si y sólo si satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. $\text{cf}(\mu) = \omega$; ó
2. $\lambda \leq \mu \leq \kappa$, ó
3. $\lambda \leq \text{cf}(\mu) \leq \kappa$.

Equivalentemente,

$$C(\Sigma_\lambda(\kappa)) = \{ \mu \in \text{CN} : \text{cf}(\mu) > \omega \wedge \mu \notin [\lambda, \kappa] \wedge \text{cf}(\mu) \notin [\lambda, \kappa] \}.$$

Demostración. Comencemos por verificar la implicación recíproca. Primero, si μ satisface que $\text{cf}(\mu) = \omega$, entonces el corolario 2.2.9 indica que μ no es un calibre para $\Sigma_\lambda(\kappa)$ porque $\Sigma_\lambda(\kappa)$ es infinito y T_2 . Ahora, si fijamos un cardinal $\lambda \leq \mu \leq \kappa$, la familia $\{\pi_\alpha^{-1}\{1\} \cap \Sigma_\lambda(\kappa) : \alpha < \mu\}$ tiene cardinalidad μ y para cualquier $J \in [\mu]^\mu$ se satisface que $\bigcap \{\pi_\alpha^{-1}\{1\} \cap \Sigma_\lambda(\kappa) : \alpha \in J\} = \emptyset$. Finalmente, como la condición $\mu \in C(X)$ implica que $\text{cf}(\mu) \in C(X)$ (véase la proposición 2.2.1), esto completa la prueba de que si se satisface cualquiera de las condiciones (1) a (3), entonces μ no es un calibre para $\Sigma_\lambda(\kappa)$.

Para demostrar la implicación directa, supongamos que μ es un cardinal de tal modo que ninguno de los incisos (1) a (3) es cierto. Si $\kappa < \text{cf}(\mu)$ entonces, como $d(\Sigma_\lambda(\kappa)) \leq w(\Sigma_\lambda(\kappa)) \leq \kappa$, la proposición 2.1.8 garantiza que $\mu \in C(\Sigma_\lambda(\kappa))$.

Supongamos ahora que $\omega_1 \leq \text{cf}(\mu) \leq \mu < \lambda$ y fijemos una familia $\{U_\alpha : \alpha < \mu\} \subseteq \tau_{D(2)^\kappa}^+$. Para cada $\alpha < \mu$ sean $F_\alpha \in [\kappa]^{<\omega}$ y $\{U(\alpha, \beta) : \beta \in F_\alpha\} \subseteq D(2)$ tales que $\emptyset \neq \bigcap \{\pi_\beta^{-1}[U(\alpha, \beta)] : \beta \in F_\alpha\} \subseteq U_\alpha$. Luego, como $\mu \in C(D(2)^\kappa)$ (véase el ejemplo 2.5.8), existen $J \in [\mu]^\mu$ y

$$x \in \bigcap \left\{ \bigcap \{ \pi_\beta^{-1}[U(\alpha, \beta)] : \beta \in F_\alpha \} : \alpha \in J \right\}.$$

De este modo, si $F := \bigcup_{\alpha \in J} F_\alpha$ y si definimos

$$y := (x \upharpoonright_F) \cup ((\kappa \setminus F) \times \{0\}),$$

es claro que $y \in \Sigma_\lambda(\kappa) \cap \bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha$. Esto muestra que $\mu \in C(\Sigma_\lambda(\kappa))$.

Resta argumentar que μ es un calibre para $\Sigma_\lambda(\kappa)$ cuando $\omega_1 \leq \text{cf}(\mu) < \lambda \leq \kappa < \mu$. Esto es gracias a la proposición 2.2.3 porque $\pi w(\Sigma_\lambda(\kappa)) \leq w(\Sigma_\lambda(\kappa)) \leq \kappa < \mu$ y $\text{cf}(\mu) \in C(\Sigma_\lambda(\kappa))$ por el párrafo previo. $\square$

Equipados con el ejemplo 2.6.1, estamos mejor posicionados para exponer las demostraciones de [16, Theorem 4.3, p. 81] y [16, Theorem 4.4, p. 81]:

Ejemplo 2.6.2. Para cualquier cardinal singular κ con $\text{cf}(\kappa) > \omega$, el espacio $X_\kappa := \Sigma_{\text{cf}(\kappa)^+}(\kappa)$ satisface las relaciones $\pi w(X_\kappa) = \kappa$, $\text{cf}(\kappa) \in C(X_\kappa)$ y $\kappa \notin C(X_\kappa)$ (cf. proposición 2.2.3).

En este punto del texto estamos en posición para constatar que, en general, los calibres singulares no se preservan en productos. De acuerdo con [16, p. 85], el siguiente resultado se debe a Gerlits.

Teorema 2.6.3. Sea κ un cardinal singular. Existe un número cardinal λ y una colección de espacios de Tychonoff $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ tales que cada X_α tiene calibre κ pero el producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ no tiene calibre κ .

Demostración. Si $\text{cf}(\kappa) = \omega$, el corolario 2.1.13 indica que $D(2)$ tiene calibre κ , mientras que el ejemplo 2.5.8 garantiza que $D(2)^\omega$ no tiene calibre κ . Cuando $\text{cf}(\kappa) > \omega$, fijamos una colección $\{A_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ formada por subconjuntos de κ con las siguientes propiedades:

1. para cada $\alpha < \text{cf}(\kappa)$, $\text{cf}(\kappa) < |A_\alpha| < \kappa$;
2. $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, siempre que $\alpha < \beta < \text{cf}(\kappa)$, y
3. $\bigcup_{\alpha < \text{cf}(\kappa)} A_\alpha = \kappa$.

Si para toda $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ definimos $X_\alpha := \Sigma_{\text{cf}(\kappa)^+} D(2)^{A_\alpha}$, entonces el ejemplo 2.6.1 constata que κ es un calibre para cada X_α . Ahora definamos $X := \prod_{\alpha < \text{cf}(\kappa)} X_\alpha$ y veamos que X no tiene calibre κ . Primero notemos que para cada $\beta < \kappa$, existe un único ordinal $\alpha(\beta) < \text{cf}(\kappa)$ con $\beta \in A_{\alpha(\beta)}$. Para cada $x \in X$ sea $f(x) : \kappa \rightarrow D(2)$ la función determinada mediante $f(x)(\beta) := x(\alpha(\beta))(\beta)$. Con esta notación, un argumento rutinario muestra que $f : X \rightarrow \Sigma_{\text{cf}(\kappa)^+} D(2)^\kappa$ es un homeomorfismo. En consecuencia, el ejemplo 2.6.1 garantiza que κ no es un calibre para X . $\square$

Al sacrificar un poco de separación en el espacio considerado podemos mejorar bastante las restricciones del ejemplo 2.6.1. Los siguientes tres resultados aparecen en la tercera sección de [71].

Ejemplo 2.6.4. *Para cualquier cardinal regular λ existe un espacio de Hausdorff X_λ con $C(X_\lambda) = \{\mu \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\mu) > \omega \wedge \text{cf}(\mu) \neq \lambda\}$.*

Demostración. Sea $\{F_\alpha : \alpha < 2^\lambda\}$ una enumeración sin repeticiones de la familia $\mathcal{F}_\lambda$ (véase el lema 1.4.7). Dividiremos la prueba en una serie de afirmaciones.

Afirmación 1. Existe un subconjunto $\{x(\alpha, \beta) : \alpha < 2^\lambda \wedge \beta < \lambda\}$ de $D(2)^\lambda$ que satisface las siguientes condiciones.

1. Para $\alpha < 2^\lambda$, $\{x(\alpha, \beta) : \beta < \lambda\} \subseteq F_\alpha$.
2. $x(\alpha, \beta) \neq x(\gamma, \delta)$, siempre que $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in 2^\lambda \times \lambda$ son distintos.

Por recursión, supongamos que para alguna $\alpha < 2^\lambda$ hemos definido una colección $\{x(\gamma, \beta) : \gamma < \alpha \wedge \beta < \lambda\}$ con las propiedades deseadas. De esta manera, como

$$\left| \{x(\gamma, \beta) : \gamma < \alpha \wedge \beta < \lambda\} \right| \leq \max\{|\alpha|, \lambda\} < 2^\lambda,$$

se satisface la igualdad $\left| F_\alpha \setminus \{x(\gamma, \beta) : \gamma < \alpha \wedge \beta < \lambda\} \right| = 2^\lambda$. Así, podemos hallar un subconjunto $\{x(\alpha, \beta) : \beta < \lambda\} \subseteq F_\alpha$ enumerado sin repeticiones y tal que $\{x(\alpha, \beta) : \beta < \lambda\} \cap \{x(\gamma, \beta) : \gamma < \alpha \wedge \beta < \lambda\} = \emptyset$.

Ahora, para cada $\beta < \lambda$ definamos $G_\beta := \{x(\alpha, \gamma) : \alpha < 2^\lambda \wedge \beta \leq \gamma < \lambda\}$. Sea X_λ el conjunto ${}^\lambda 2$ equipado con la topología generada por la subbase $\tau_{D(2)^\lambda} \cup \{G_\beta : \beta < \lambda\}$. El espacio X_λ es Hausdorff. Además, si $\mathcal{B}$ denota la base canónica para $D(2)^\lambda$, entonces la colección $\{B \cap G_\beta : B \in \mathcal{B} \wedge \beta < \lambda\}$ es una base para X_λ en vista de que $\{G_\beta : \beta < \lambda\}$ es una familia decreciente.

Afirmación 2. Si μ es un número cardinal y $\text{cf}(\mu) = \omega$, o bien, $\text{cf}(\mu) = \lambda$, entonces μ no es un calibre para X_λ .

En efecto, como X_λ es un espacio de Hausdorff infinito, el corolario 2.2.9 garantiza que los cardinales con cofinalidad numerable no pueden ser calibres para X_λ . Por otro lado, como $\bigcap_{\beta \in J} G_\beta = \emptyset$ para cualquier $J \in [\lambda]^\lambda$, λ no es un calibre para X_λ y, por ende, la proposición 2.2.1 implica que los cardinales con cofinalidad λ tampoco son calibres para X_λ .

Afirmación 3. Cualquier número cardinal μ con $\text{cf}(\mu) > \omega$ y $\text{cf}(\mu) \neq \lambda$, pertenece a $\mathcal{C}(X_\lambda)$.

Veamos: sea $\{U_\gamma : \gamma < \mu\}$ una familia de abiertos básicos de X_λ y, para cada $\gamma < \mu$, sean $B_\gamma \in \mathcal{B}$ y $\beta(\gamma) < \lambda$ tales que $U_\gamma = B_\gamma \cap G_{\beta(\gamma)}$. Para toda $\gamma < \mu$, consideremos al conjunto finito $J_\gamma := \{\delta < \lambda : \pi_\delta[B_\gamma] \neq D(2)\}$. Por el lema 1.2.6 aplicado a las colecciones $\{J_\gamma : \gamma < \mu\}$ y $[\lambda]^{<\omega}$, existe $I \in [\mu]^\mu$ con $|\{J_\gamma : \gamma \in I\}| < \lambda$. Luego, por el lema 1.2.6 aplicado a las colecciones $\{\beta(\gamma) : \gamma \in I\}$ y λ , existe $K \in [I]^\mu$ con $|\{\beta(\gamma) : \gamma \in K\}| < \lambda$. En consecuencia, $J := \bigcup_{\gamma \in K} J_\gamma$ satisface la relación $|J| < \lambda$ y existe $\beta < \lambda$ con $\sup\{\beta(\gamma) : \gamma \in K\} < \beta$. Observemos que $B_\gamma \cap G_\beta \subseteq B_\gamma \cap G_{\beta(\gamma)} = U_\gamma$, siempre que $\gamma \in K$. Ahora empleemos que $D(2)^\lambda$ tiene calibre μ (véase el ejemplo 2.5.8) para encontrar $L \in [K]^\mu$ de tal forma que $B := \bigcap_{\gamma \in L} B_\gamma \neq \emptyset$.

Afirmación 3'. B es un elemento de $\mathcal{F}_\lambda$.

En efecto, en vista de que la colección $\{B_\gamma : \gamma \in L\}$ está formada por subconjuntos cerrados de $D(2)^\lambda$, se satisface que B también lo es. Por otro lado, para demostrar que $|B| = 2^\lambda$, utilicemos que $|J| < \lambda$ para fijar una enumeración sin repeticiones $\{y_\alpha : \alpha < 2^\lambda\}$ de $D(2)^{\lambda \setminus J}$. Por último, si $x \in B$ está fijo y para cada $\alpha < 2^\lambda$ definimos $x_\alpha := (x \upharpoonright_J) \cup y_\alpha$, entonces se tiene que $\{x_\alpha : \alpha < 2^\lambda\}$ es un subconjunto de B , con $x_\alpha \neq x_\gamma$ siempre que $\alpha < \gamma < 2^\lambda$. En suma, $B \in \mathcal{F}_\lambda$.

Finalmente, con el objetivo de ver que $\{U_\gamma : \gamma \in L\}$ tiene intersección no vacía, la Afirmación 3' produce $\alpha < 2^\lambda$ tal que $B = F_\alpha$. Así, $x(\alpha, \beta) \in \bigcap_{\gamma \in L} U_\gamma$. $\square$

Ejemplo 2.6.5. Para cualquier cardinal singular λ existe un espacio de Hausdorff X_λ tal que $\mathcal{C}(X_\lambda) = \{\mu \in \text{CN} : \text{cf}(\mu) > \omega \wedge \mu \neq \lambda\}$.

Demostración. Nuevamente, sea $\{F_\alpha : \alpha < 2^\lambda\}$ una enumeración sin repeticiones de la familia $\mathcal{F}_\lambda$ (véase el lema 1.4.7). Una vez más, dividiremos la prueba en una serie de afirmaciones.

Afirmación 1. Existe un subconjunto $\{x(\alpha, \beta) : \alpha < 2^\lambda \wedge \beta < 2^\lambda\}$ de $D(2)^\lambda$ que satisface las siguientes condiciones.

1. Para $\alpha < 2^\lambda$, $\{x(\alpha, \beta) : \beta < 2^\lambda\} \subseteq F_\alpha$.
2. $x(\alpha, \beta) \neq x(\gamma, \delta)$, siempre que $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in 2^\lambda \times 2^\lambda$ son distintos.

Construiremos este conjunto por doble recursión. Supongamos que para $(\alpha, \beta) \in 2^\lambda \times 2^\lambda$ hemos producido una colección $\{x(\gamma, \delta) : \gamma < \alpha \wedge \delta < \beta\}$ con las características requeridas. Nuestro objetivo es construir a los conjuntos $\{x(\alpha, \delta) : \delta \leq \beta\}$ y $\{x(\gamma, \beta) : \gamma \leq \alpha\}$.

La colección $\{x(\gamma, \beta) : \gamma \leq \alpha\}$ se puede construir recursivamente: si para alguna $\gamma \leq \alpha$ ya tenemos al conjunto $\{x(\xi, \beta) : \xi < \gamma\}$, entonces

$$\left| \{x(\xi, \delta) : \xi < \alpha \wedge \delta < \beta\} \cup \{x(\xi, \beta) : \xi < \gamma\} \right| \leq |\alpha \times \beta| + |\gamma| < 2^\lambda.$$

Por lo tanto, la igualdad $|F_\gamma| = 2^\lambda$ implica la existencia de un punto

$$x(\gamma, \beta) \in F_\gamma \setminus \left(\{x(\xi, \delta) : \xi < \alpha \wedge \delta < \beta\} \cup \{x(\xi, \beta) : \xi < \gamma\} \right).$$

Finalmente, como $|F_\alpha| = 2^\lambda$ y

$$\left| \{x(\xi, \delta) : \xi < \alpha \wedge \delta < \beta + 1\} \cup \{x(\alpha, \beta)\} \right| \leq |\alpha \times (\beta + 1)| + 1 < 2^\lambda,$$

podemos encontrar un subconjunto $\{x(\alpha, \delta) : \delta < \beta\}$ de F_α enumerado fielmente y tal que

$$\{x(\alpha, \delta) : \delta < \beta\} \cap \left(\{x(\xi, \delta) : \xi < \alpha \wedge \delta < \beta + 1\} \cup \{x(\alpha, \beta)\} \right) = \emptyset.$$

En estas circunstancias, la colección $\{x(\gamma, \delta) : \gamma < \alpha + 1 \wedge \delta < \beta + 1\}$ construida como antes satisface las propiedades deseadas.

Sea $\theta := |[\lambda]^{<\lambda}|$, notemos que $\theta \leq 2^\lambda$ y fijemos una enumeración sin repeticiones $\{S_\gamma : \gamma < \theta\}$ del conjunto $[\lambda]^{<\lambda}$. Para cada $\beta < \lambda$, definamos $T_\beta := \{\gamma < \theta : \beta \in S_\gamma\}$ y $G_\beta := \{x(\alpha, \gamma) : \alpha < 2^\lambda \wedge \gamma \in T_\beta\}$. Si X_λ es el conjunto ${}^\lambda 2$ equipado con la topología generada por la subbase $\tau_{D(2)^\lambda} \cup \{G_\beta : \beta < \lambda\}$, entonces X_λ es un espacio de Hausdorff. Adicionalmente, como $\{G_\beta : \beta < \lambda\}$ es una colección decreciente, la familia $\{B \cap G_\beta : B \in \mathcal{B} \wedge \beta < \lambda\}$ es una base para X_λ , donde $\mathcal{B}$ es la base canónica para $D(2)^\lambda$.

Afirmación 2. Si μ es un número cardinal y $\text{cf}(\mu) = \omega$, o bien, $\mu = \lambda$, entonces μ no es un calibre para X_λ .

En efecto, como $\bigcap_{\beta \in J} G_\beta = \emptyset$ para cada $J \in [\lambda]^\lambda$, λ no es un calibre para X_λ . Por otra parte, como X_λ es un espacio de Hausdorff infinito, el corolario 2.2.9 asegura que los cardinales con cofinalidad numerable no son calibres para X_λ .

Afirmación 3. Para cualquier número cardinal μ con $\text{cf}(\mu) > \omega$ y $\mu \neq \lambda$, $\mu \in \mathcal{C}(X_\lambda)$.

Veamos: sea $\{U_\gamma : \gamma < \mu\}$ una familia de abiertos básicos en X_λ y, para cada $\gamma < \mu$, sean $B_\gamma \in \mathcal{B}$ y $\beta(\gamma) < \lambda$ tales que $U_\gamma = B_\gamma \cap G_{\beta(\gamma)}$. Además, sea $J_\gamma := \{\delta < \lambda : \pi_\delta[B_\gamma] \neq D(2)\}$ para toda $\gamma < \mu$. Por el lema 1.2.6 aplicado dos veces podemos encontrar $K \in [I]^\mu$ tal que $|\{J_\gamma : \gamma \in K\}| < \lambda$ y $|\{\beta(\gamma) : \gamma \in K\}| < \lambda$. En consecuencia, $J := \bigcup_{\gamma \in K} J_\gamma$ satisface $|J| < \lambda$ y hay $\delta < \theta$ con $S_\delta = \{\beta(\gamma) : \gamma \in K\}$. Observemos que $\{x(\alpha, \delta) : \alpha < 2^\lambda\} \subseteq G_{\beta(\gamma)}$ para cada $\gamma \in K$. Luego, como $D(2)^\lambda$ tiene calibre μ (véase el ejemplo 2.5.8), existe $L \in [K]^\mu$ con $B := \bigcap_{\gamma \in L} B_\gamma \neq \emptyset$. Así, un argumento similar al expuesto en la Afirmación 3' del ejemplo 2.6.4 genera $\alpha < 2^\lambda$ con $B = F_\alpha$. Por último, $x(\alpha, \delta) \in \bigcap_{\gamma \in L} U_\gamma$. $\square$

Sean κ y λ un par de cardinales con $\kappa \geq \lambda \geq \omega$. La pareja (κ, λ) es un *calibre* para un espacio topológico X si y sólo si para cualquier conjunto I de cardinalidad κ y para cualquier familia $\{U_\gamma : \gamma \in I\} \subseteq \tau_X^+$, existe $J \in [I]^\lambda$ de tal modo que $\bigcap_{\gamma \in J} U_\gamma \neq \emptyset$.

Una observación pertinente es que si κ es un calibre para X ó λ es un calibre para X , entonces (κ, λ) es un calibre para X . En la sección 2.8 exploraremos la noción correspondiente a precalibres y precalibres débiles al exponer resultados duales a los que Shelah presenta en [71] para calibres. Para fines del ejemplo 2.6.7, únicamente necesitamos el siguiente teorema cuya demostración se puede consultar en [71, Theorem 2.6, p. 255] (compárese con el teorema 2.8.9).

Teorema 2.6.6. Sean $\{X_\xi : \xi < \lambda\}$ una colección de espacios topológicos, μ un número cardinal tal que $\mu > \text{cf}(\mu) > \omega$ y $\{\mu_\alpha : \alpha < \text{cf}(\mu)\}$ una sucesión de cardinales regulares y no numerables con las siguientes características:

1. $\sup\{\mu_\alpha : \alpha < \text{cf}(\mu)\} = \mu$;
2. para cada $\alpha < \text{cf}(\mu)$, $\max\{\text{cf}(\mu), \sup\{\mu_\beta : \beta < \alpha\}\} < \mu_\alpha$, y
3. $(\mu_{\alpha+1}, \mu_\alpha)$ es un calibre para X_ξ , siempre que $\alpha < \text{cf}(\mu)$ y $\xi < \lambda$.

En estas circunstancias, μ es un calibre para $\prod_{\xi < \lambda} X_\xi$.

Ejemplo 2.6.7. Si Γ es un conjunto de cardinales, entonces existe un espacio de Hausdorff X_Γ con $\mathcal{C}(X_\Gamma) = \{\mu \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\mu) > \omega \wedge \mu \notin \Gamma \wedge \text{cf}(\mu) \notin \Gamma\}$.

Demostración. Cuando $\Gamma = \emptyset$, el cubo $D(2)^\omega$ satisface las propiedades deseadas (véase el ejemplo 2.5.8). Si $\Gamma \neq \emptyset$, entonces para cada $\lambda \in \Gamma$ definimos X_λ como en los ejemplos 2.6.4 y 2.6.5. Consideremos la colección $\Gamma' := \{\mu \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\mu) > \omega \wedge \mu \notin \Gamma \wedge \text{cf}(\mu) \notin \Gamma\}$ y el producto $X_\Gamma := \prod_{\lambda \in \Gamma} X_\lambda$.

La inclusión $\mathcal{C}(X_\Gamma) \subseteq \Gamma'$ es consecuencia de la proposición 2.5.2. Además, $\Gamma' \subseteq \mathcal{C}(X_\lambda)$ siempre que $\lambda \in \Gamma$. Ahora, si $\mu \in \Gamma'$ es regular, entonces la pertenencia $\mu \in \bigcap \{\mathcal{C}(X_\lambda) : \lambda \in \Gamma\}$ combinada con el teorema 2.5.5 garantiza la relación $\mu \in \mathcal{C}(X_\Gamma)$.

Cuando $\mu \in \Gamma'$ es singular, fijamos una sucesión de cardinales regulares y no numerables $\{\mu_\alpha : \alpha < \text{cf}(\mu)\}$ con las siguientes propiedades:

1. $\sup\{\mu_\alpha : \alpha < \text{cf}(\mu)\} = \mu$, y
2. para cada $\alpha < \text{cf}(\mu)$, $\max\{\text{cf}(\mu), \sup\{\mu_\beta : \beta < \alpha\}\} < \mu_\alpha$.

Como para cualesquiera $\lambda \in \Gamma$ y $\alpha < \text{cf}(\mu)$ se satisface que μ_α ó $\mu_{\alpha+1}$ es un calibre para X_λ , se deduce que $(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1})$ es un calibre para X_λ y, por ende, el teorema 2.6.6 asegura que μ es un calibre para X_Γ . $\square$

2.7. Un resultado de factorización

En esta sección mencionaremos un importante resultado de factorización debido a Gerlits.

Definición 2.7.1. Si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y Y también es un espacio, una función $f : \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha \rightarrow Y$ *depende únicamente* de $J \subseteq \lambda$ si para cualesquiera $x, y \in \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, la condición $x|_J = y|_J$ implica que $f(x) = f(y)$. Más aún, se dice que f *depende de menos de κ coordenadas* si existe $J \in [\lambda]^{<\kappa}$ de tal modo que f depende únicamente de J .

Una parte de la topología general (véanse, por ejemplo, [21] y [78]) está dedicada a investigar qué combinaciones de propiedades se pueden imponer sobre los espacios $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ y Y para garantizar que una función continua entre ellos se puede factorizar en el sentido del párrafo anterior; es decir, bajo qué condiciones existe un conjunto $J \subseteq \lambda$ de cierta cardinalidad y una función continua $\hat{f} : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow Y$ con la propiedad de que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_J \downarrow & \nearrow \hat{f} & \\ \prod_{\alpha \in J} X_\alpha & & \end{array}$$

Figura 2.1: Factorización de una función continua.

Curiosamente, las condiciones de cadena también sirven, en ciertos casos específicos, para garantizar que una función continua definida en un producto topológico se factoriza. La demostración del siguiente teorema es bastante técnica y utiliza el resultado combinatorio conocido como el *Lema de Hajnal* (véase [36, 0.3, p. 2]), pero el lector interesado puede encontrar los detalles correspondientes en [36, 5.16, p. 121].

Teorema 2.7.2. (Gerlits) Sea λ un número cardinal. Supongamos que $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ y Y son espacios de Hausdorff. Sea $f : \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha \rightarrow Y$ una función continua y fijemos un calibre no numerable κ para el producto $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$. Si $D(2)^\kappa$ no se encaja en Y , entonces f depende de menos de κ coordenadas.

Además, una combinación de los teoremas 2.5.5, 2.5.7, 2.5.9 y 2.7.2 implica el siguiente corolario.

Corolario 2.7.3. Sea λ un número cardinal. Supongamos que $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ y Y son espacios de Hausdorff. Sean $f : \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha \rightarrow Y$ una función continua y ϕ una función cardinal topológica monótona tal que $\phi(D(2)^\kappa) = \kappa$ y $\phi(Y) < \kappa$. Consideremos los siguientes enunciados.

1. κ es regular y $\kappa \in C(X_\alpha)$ siempre que $\alpha < \lambda$.
2. $\lambda < \text{cf}(\kappa)$ y $\kappa \in C(X_\alpha)$ para todo $\alpha < \lambda$.
3. $d(X_\alpha) < \text{cf}(\kappa)$ para cada $\alpha < \lambda$.

Si se satisface alguna de las condiciones anteriores, entonces f depende de menos de κ coordenadas.

2.8. Precalibres singulares para productos topológicos

El propósito de esta sección es exponer el material contenido en [57] para demostrar la versión para precalibres y precalibres débiles del teorema 2.5.7.

A pesar de que cada resultado incluido en este apartado del texto será enunciado para precalibres y precalibres débiles, las demostraciones serán únicamente para las afirmaciones correspondientes a los precalibres para no saturar las pruebas.

Comenzamos esta parte del trabajo con la siguiente generalización del concepto de precalibre y precalibre débil.

Definición 2.8.1. Sean κ y λ un par de cardinales con $\kappa \geq \lambda \geq \omega$. La pareja (κ, λ) es un *precalibre* (resp., *precalibre débil*) para un espacio topológico X si y sólo si para cualquier conjunto I de cardinalidad κ y para cualquier familia $\{U_\gamma : \gamma \in I\} \subseteq \tau_X^+$, existe $J \in [I]^\lambda$ de tal modo que $\{U_\gamma : \gamma \in J\}$ es una familia centrada (resp., ligada).

A pesar de que estas definiciones permiten obtener una vasta cantidad de resultados (véase [16]), nosotros vamos a trabajar con ellas únicamente en este fragmento del texto para no desviarnos mucho del hilo conductor del presente escrito. A continuación vienen algunas proposiciones auxiliares que emplearemos en la demostración de los teoremas centrales de esta sección.

Claramente, mediante funciones biyectivas adecuadas, se puede verificar que (κ, λ) es un precalibre (resp., precalibre débil) para un espacio topológico X si y sólo si para toda familia $\{U_\gamma : \gamma < \kappa\}$ contenida en τ_X^+ hay $J \in [\kappa]^\lambda$ tal que $\{U_\gamma : \gamma \in J\}$ está centrado (resp., ligado).

Por otro lado, si $\mathcal{B}$ es una base para X , entonces un argumento rutinario muestra que (κ, λ) es un precalibre (resp., precalibre débil) para X si y sólo si para cada familia $\{B_\gamma : \gamma < \kappa\} \subseteq \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ existe $J \in [\kappa]^\lambda$ con $\{B_\gamma : \gamma \in J\}$ centrado (resp., ligado). Este hecho se utilizará en la demostración del teorema 2.8.9.

Lema 2.8.2. *Los siguientes enunciados se satisfacen para cualquier espacio topológico X .*

1. κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para X si y sólo si (κ, κ) es un precalibre (resp., precalibre débil) para X .
2. Cuando (λ, μ) es un precalibre (resp., precalibre débil) para X y $\lambda' \geq \lambda \geq \mu \geq \mu'$, (λ', μ') es un precalibre (resp., precalibre débil) para X .
3. Si $\kappa > \mu \geq \text{cf}(\mu) > \text{cf}(\kappa)$ y, para cada $\kappa > \lambda \geq \mu$ regular, (λ, μ) no es un precalibre (resp., precalibre débil) para X , entonces (κ, μ) no es un precalibre (resp., precalibre débil) para X .

Demostración. Los incisos (1) y (2) se desprenden directamente de las definiciones. Enfoquémonos en verificar el inciso (3). Primero, como κ es singular, existe una (κ, μ^+) -sucesión $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ (véase el lema 1.2.5). Para cada $\alpha < \text{cf}(\kappa)$, definamos $J_\alpha := [\kappa_\alpha, \kappa_{\alpha+1})$ y empleemos la hipótesis de (3) para hallar $\{U_\gamma : \gamma \in J_\alpha\} \subseteq \tau_X^+$ tal que, para cualquier $J \in [J_\alpha]^\mu$, la familia $\{U_\gamma : \gamma \in J\}$ no es centrada.

Ahora, con el objetivo de ver que (κ, μ) no es un precalibre para X , consideremos la colección $\{U_\gamma : \gamma \in [\kappa_0, \kappa)\}$ y fijemos $J \in [[\kappa_0, \kappa)]^\mu$. Para cada $\gamma \in J$, denotemos por $f(\gamma)$ al único ordinal menor a $\text{cf}(\kappa)$ con la propiedad de que $\gamma \in J_{f(\gamma)}$. De este modo, las relaciones $|J| = \mu$ y $\text{cf}(\kappa) < \text{cf}(\mu)$ implican la existencia de $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ tal que $|f^{-1}\{\alpha\}| = \mu$. Así, al definir $J' := J \cap J_\alpha$, inferimos que $J' \in [J_\alpha]^\mu$. Finalmente, como $\{U_\gamma : \gamma \in J'\}$ no es centrada, concluimos que $\{U_\gamma : \gamma \in J\}$ tampoco lo es. $\square$

Definición 2.8.3. Sean κ un cardinal singular y X un espacio topológico. Una colección formada por cardinales regulares no numerables $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ satisface la condición $P(\kappa, X)$ (resp., $WP(\kappa, X)$) si las siguientes propiedades son ciertas:

1. $\sup\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\} = \kappa$;
2. para cada $\alpha < \text{cf}(\kappa)$, $\max\{\text{cf}(\kappa), \sup\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\}\} < \kappa_\alpha$, y
3. $(\kappa_{\alpha+1}, \kappa_\alpha)$ es un precalibre (resp., precalibre débil) para X , siempre que $\alpha < \text{cf}(\kappa)$.

Lema 2.8.4. *Si un cardinal singular κ es precalibre (resp., precalibre débil) para un espacio topológico X , entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *Para cualquier $\mu < \kappa$, existe $\mu < \lambda < \kappa$ regular tal que (λ, μ) es un precalibre (resp., precalibre débil) para X .*
2. *Existe una colección $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ que satisface la condición $P(\kappa, X)$ (resp., $WP(\kappa, X)$).*

Demostración. Para probar la afirmación del inciso (1) fijemos $\mu < \kappa$ y observemos que $\mu^+ < \kappa$. Ahora, si $\text{cf}(\kappa) \geq \mu^+$, entonces al tomar $\lambda := \text{cf}(\kappa)$, la proposición 2.2.1 garantiza que X tiene precalibre λ y, por ende, el inciso (2) del lema 2.8.2 indica que (λ, μ^+) es un precalibre para X . Por otro lado, cuando $\mu^+ > \text{cf}(\kappa)$, utilizamos una combinación de los incisos (2) y (3) del lema 2.8.2 para encontrar $\kappa > \lambda \geq \mu^+$ regular tal que (λ, μ^+) es un precalibre para X . En cualquier caso, el inciso (2) del lema 2.8.2 nos permite concluir que existe $\mu < \lambda < \kappa$ regular tal que (λ, μ) es un precalibre para X .

Ahora, con el objetivo de probar el inciso (2), fijemos una sucesión estrictamente creciente de números cardinales $\{\lambda_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ con $\sup\{\lambda_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\} = \kappa$.

Afirmación. Existe una colección $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ que satisface las siguientes condiciones para cada $\alpha < \text{cf}(\kappa)$:

1. $\max\{\text{cf}(\kappa), \lambda_\alpha, \sup\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\}\} < \kappa_\alpha < \kappa$;
2. κ_α es regular y no numerable, y
3. $(\kappa_{\alpha+1}, \kappa_\alpha)$ es un precalibre para X .

Construiremos la colección por recursión. Supongamos que para alguna $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ hemos logrado construir $\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\}$ con las propiedades deseadas. En estas circunstancias, si $\mu := \max\{\text{cf}(\kappa), \lambda_\alpha, \sup\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\}\}$, entonces el inciso (1) del presente lema genera $\mu < \kappa_\alpha < \kappa$ regular tal que (κ_α, μ) es un precalibre para X . En especial, se deduce a partir del inciso (2) del lema 2.8.2 que si $\alpha = \gamma + 1$, entonces $(\kappa_{\gamma+1}, \kappa_\gamma)$ es un precalibre para X .

Finalmente, es claro que las propiedades (1) a (3) de la Afirmación garantizan que $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ satisface la condición $P(\kappa, X)$. $\square$

Con un argumento similar al expuesto en la proposición 2.5.3 se puede demostrar la siguiente afirmación.

Lema 2.8.5. *Sean X y Y un par de espacios topológicos. Si κ, λ y μ son cardinales tales que $\kappa \geq \lambda \geq \mu \geq \omega$, (κ, λ) es un precalibre (resp., precalibre débil) para Y y (λ, μ) es un precalibre (resp., precalibre débil) para X , entonces (κ, μ) es un precalibre (resp., precalibre débil) para $X \times Y$.*

Los siguientes dos corolarios se desprenden del lema 2.8.5.

Corolario 2.8.6. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\{X_m : m < n\}$ una familia de espacios topológicos y $\{\kappa_m : m \leq n\}$ una sucesión creciente de números cardinales. Si para cada $m < n$ se satisface que (κ_{m+1}, κ_m) es un precalibre (resp., precalibre débil) para X_m , entonces (κ_n, κ_0) es un precalibre (resp., precalibre débil) para $\prod_{m < n} X_m$.

Corolario 2.8.7. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\{X_m : m < n\}$ una familia de espacios topológicos y κ un número cardinal. Si κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para cada uno de los X_m , entonces κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para $\prod_{m < n} X_m$.

En el siguiente teorema demostramos una versión más detallada del Claim 2.4.(B) de [71]. Al parecer, basándose en los comentarios de la página 19 de [16], este resultado ha sido probado en un par de documentos un tanto inaccesibles, a saber, en la tesis doctoral [1] escrita en griego por Argyros, y en una carta que Hagler y Haydon enviaron a Comfort y Negrepontis en 1977. Aunque el teorema 2.8.8 sería el equivalente a dejar que κ sea igual a ω en [16, Theorem 1.9, p. 13] (cabe señalar que existen algunas diferencias importantes), decidimos que valía la pena incluir una prueba completa de este resultado.

Teorema 2.8.8. Sean κ un cardinal y $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ una sucesión de cardinales regulares no numerables con las siguientes propiedades:

1. $\kappa > \text{cf}(\kappa) > \omega$;
2. $\sup\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\} = \kappa$, y
3. para cada $\alpha < \text{cf}(\kappa)$, $\max\{\text{cf}(\kappa), \sup\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\}\} < \kappa_\alpha$.

Si $\{A(\alpha, \gamma) : \alpha < \text{cf}(\kappa) \wedge \gamma < \kappa_\alpha\}$ es una familia de conjuntos finitos, entonces existen $m < \omega$, $I \in [\text{cf}(\kappa)]^{\text{cf}(\kappa)}$, $\{J_\alpha : \alpha \in I\}$, $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ y A que satisfacen las siguientes condiciones para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$ distintos:

1. $J_\alpha \in [\kappa_\alpha]^{\kappa_\alpha}$;
2. $A_\alpha \cap A_\beta = A$;
3. si $\gamma, \delta \in J_\alpha$ son diferentes, entonces $A(\alpha, \gamma) \cap A(\alpha, \delta) = A_\alpha$;
4. cuando $\gamma \in J_\alpha$ y $\delta \in J_\beta$, $A(\alpha, \gamma) \cap A(\beta, \delta) = A$, y
5. $|A_\alpha| = m$.

Demostración. Primero, para cada $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ empleemos el teorema 1.2.3 para hallar $J'_\alpha \in [\kappa_\alpha]^{\kappa_\alpha}$ y A_α tales que, para cualesquiera $\gamma, \delta \in J'_\alpha$ distintos, se satisface que $A(\alpha, \gamma) \cap A(\alpha, \delta) = A_\alpha$. Luego, la condición $\text{cf}(\kappa) > \omega$ implica que la función $f : \text{cf}(\kappa) \rightarrow \omega$ definida mediante $f(\alpha) := |A_\alpha|$ tiene una fibra de tamaño $\text{cf}(\kappa)$; en símbolos, existe $m < \omega$ de tal modo que $I' := f^{-1}\{m\}$ es un elemento de $[\text{cf}(\kappa)]^{\text{cf}(\kappa)}$ con $|A_\alpha| = m$, siempre que $\alpha \in I'$. Además, una aplicación del teorema 1.2.3 a la familia $\{A_\alpha : \alpha \in I'\}$ permite encontrar $I \in [I']^{\text{cf}(\kappa)}$ y A tales que $A_\alpha \cap A_\beta = A$, siempre que $\alpha, \beta \in I$ son distintos.

Ahora, sea $B := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ y definamos recursivamente un par de sucesiones $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ y $\{J_\alpha : \alpha \in I\}$ mediante las siguientes reglas:

$$B_\alpha := B \cup \bigcup \{A(\beta, \delta) : \beta \in I \wedge \beta < \alpha \wedge \delta \in J_\beta\} \text{ y}$$

$$J_\alpha := \{\gamma \in J'_\alpha : (A(\alpha, \gamma) \setminus A_\alpha) \cap B_\alpha = \emptyset\}.$$

Resulta que dado $\alpha \in I$, tenemos

$$|B_\alpha| \leq \left| B \cup \bigcup \{A(\beta, \delta) : \beta < \alpha \wedge \delta \in J_\beta\} \right| \leq \text{cf}(\kappa) \cdot \sup\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\} < \kappa_\alpha.$$

Por esta razón, como $\{A(\alpha, \gamma) \setminus A_\alpha : \gamma \in J'_\alpha\}$ es una familia ajena por pares, deducimos que $|J'_\alpha \setminus J_\alpha| < \kappa_\alpha$ y por ende $|J_\alpha| = \kappa_\alpha$.

En este punto del argumento es claro que m , I , $\{J_\alpha : \alpha \in I\}$, $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ y A satisfacen las condiciones (1), (2), (3) y (5). Para verificar (4), tomemos $\alpha, \beta \in I$ distintos, $\gamma \in J_\alpha$ y $\delta \in J_\beta$. Supongamos sin perder generalidad que $\beta < \alpha$ y concentrémonos en demostrar que $A(\alpha, \gamma) \cap A(\beta, \delta) = A$. Primero, como $\gamma \in J_\alpha$, la relación $(A(\alpha, \gamma) \setminus A_\alpha) \cap B_\alpha = \emptyset$ implica que $(A(\alpha, \gamma) \setminus A_\alpha) \cap A(\beta, \delta) = \emptyset$ y por lo tanto $A(\alpha, \gamma) \cap A(\beta, \delta) \subseteq A_\alpha$. Por otra parte, como $\delta \in J_\beta$, la condición $(A(\beta, \delta) \setminus A_\beta) \cap B_\beta = \emptyset$ indica que $(A(\beta, \delta) \setminus A_\beta) \cap A_\alpha = \emptyset$ y así $A(\beta, \delta) \cap A_\alpha \subseteq A_\beta$.

De este modo, las inclusiones $A(\alpha, \gamma) \cap A(\beta, \delta) \subseteq A_\alpha$ y $A(\beta, \delta) \cap A_\alpha \subseteq A_\beta$ garantizan que $A(\alpha, \gamma) \cap A(\beta, \delta) \subseteq A$. En consecuencia, $A = A_\alpha \cap A_\beta \subseteq A(\alpha, \gamma) \cap A(\beta, \delta) \subseteq A$, es decir, $A(\alpha, \gamma) \cap A(\beta, \delta) = A$. $\square$

Para los resultados que siguen necesitamos hacer algunas convenciones de notación. Sean $\{X_\xi : \xi < \lambda\}$ una colección de espacios topológicos y A un subconjunto no vacío de λ . Utilizaremos el símbolo X_A para denotar al espacio producto $\prod_{\xi \in A} X_\xi$. Adicionalmente, $\pi_A : X_\lambda \rightarrow X_A$ será la proyección canónica. Por último, cuando $A = \{\xi\}$, escribiremos simplemente π_ξ en vez de $\pi_{\{\xi\}}$.

Teorema 2.8.9. *Sean λ un número cardinal, $\{X_\xi : \xi < \lambda\}$ una colección de espacios topológicos, κ un número cardinal tal que $\kappa > \text{cf}(\kappa) > \omega$ y $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ una sucesión de cardinales. Si para cada $\xi < \lambda$, κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para X_ξ y $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ satisface la condición $P(\kappa, X_\xi)$ (resp., $WP(\kappa, X_\xi)$), entonces κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para X_λ .*

Demostración. Sea $\{U_\gamma : \gamma < \kappa\}$ un subconjunto de $\tau_{X_\lambda}^+$ formado por abiertos canónicos. Además, para cada $\gamma < \kappa$, fijemos $B_\gamma \in [\lambda]^{<\omega}$ y, para toda $\xi \in B_\gamma$, $U(\gamma, \xi) \in \tau_{X_\xi}^+$ de tal forma que $U_\gamma = \bigcap \{\pi_\xi^{-1}[U(\gamma, \xi)] : \xi \in B_\gamma\}$. Para el argumento que viene convendrá suponer sin perder generalidad que $\bigcap_{\gamma < \kappa} B_\gamma \neq \emptyset$.

El teorema 2.8.8 permite suponer, sin perder generalidad, que existen $m < \omega$, $\{A_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ y A de tal modo que las siguientes condiciones se cumplen para cualesquiera $\alpha, \beta < \text{cf}(\kappa)$ distintos:

1. $A_\alpha \cap A_\beta = A$;
2. si $\gamma, \delta \in [\kappa_\alpha, \kappa_{\alpha+1})$ son diferentes, entonces $B_\gamma \cap B_\delta = A_\alpha$;
3. cuando $\gamma \in [\kappa_\alpha, \kappa_{\alpha+1})$ y $\delta \in [\kappa_\beta, \kappa_{\beta+1})$, $B_\gamma \cap B_\delta = A$, y
4. $|A_\alpha| = m$.

En especial, los incisos (2) y (3) implican la siguiente propiedad: si $\beta \leq \alpha < \text{cf}(\kappa)$, $\gamma \in [\kappa_\alpha, \kappa_{\alpha+1})$, $\delta \in [\kappa_\beta, \kappa_{\beta+1})$ y $\gamma \neq \delta$, entonces $(B_\gamma \setminus A_\alpha) \cap B_\delta = \emptyset$. Esta observación será relevante más adelante.

Afirmación 1. Existe $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{\pi_A[U_\gamma] : \gamma \in J\}$ es una familia centrada.

En efecto, como $\bigcap_{\gamma < \kappa} B_\gamma \neq \emptyset$, es claro que A es un conjunto no vacío. Además, como π_A es una función abierta, la colección $\{\pi_A[U_\gamma] : \gamma < \kappa\}$ es un subconjunto de $\tau_{X_A}^+$. De este modo, el corolario 2.8.7 garantiza la existencia de $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{\pi_A[U_\gamma] : \gamma \in J\}$ es centrada.

Para simplificar la notación supondremos, sin perder generalidad, que $J = \kappa$. En otras palabras, supondremos de ahora en adelante que $\{\pi_A[U_\gamma] : \gamma < \kappa\}$ es una familia centrada.

Afirmación 2. Existe una colección $\{J_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ que satisface las siguientes condiciones para cada $\alpha < \text{cf}(\kappa)$:

1. $J_\alpha \subseteq [\kappa_{\alpha+m}, \kappa_{\alpha+m+1})$;
2. $|J_\alpha| = \kappa_\alpha$, y
3. $\{\pi_{A_{\alpha+m}}[U_\gamma] : \gamma \in J_\alpha\}$ es una familia centrada.

Para demostrar esta Afirmación 2, fijemos $\alpha < \text{cf}(\kappa)$. En virtud de que las colecciones $\{X_\xi : \xi \in A_{\alpha+m}\}$ y $\{\kappa_{\alpha+l} : 1 \leq l \leq m+1\}$ satisfacen las condiciones del corolario 2.8.6, tenemos que $(\kappa_{\alpha+m+1}, \kappa_{\alpha+1})$ es un precalibre para el espacio $X_{A_{\alpha+m}}$. De este modo, el inciso (2) del lema 2.8.2 asegura que $(\kappa_{\alpha+m+1}, \kappa_\alpha)$ también es un precalibre para $X_{A_{\alpha+m}}$. Así, como $\{\pi_{A_{\alpha+m}}[U_\gamma] : \gamma \in [\kappa_{\alpha+m}, \kappa_{\alpha+m+1})\}$ es una colección de subconjuntos abiertos

y no vacíos de $X_{A_{\alpha+m}}$, existe $J_\alpha \in [[\kappa_{\alpha+m}, \kappa_{\alpha+m+1}]]^{\kappa_\alpha}$ tal que $\{\pi_{A_{\alpha+m}}[U_\gamma] : \gamma \in J_\alpha\}$ es una familia centrada.

Sea $J := \bigcup_{\alpha < \text{cf}(\kappa)} J_\alpha$. Claramente, $|J| = \kappa$. Nuestro último objetivo es verificar que $\{U_\gamma : \gamma \in J\}$ es una familia centrada.

Sea I un subconjunto finito y no vacío de J . Empleemos la Afirmación 1 para hallar un punto $q \in \bigcap \{\pi_A[U_\gamma] : \gamma \in I\}$. Por otro lado, si $F := \{\alpha < \text{cf}(\kappa) : I \cap J_\alpha \neq \emptyset\}$, usamos la Afirmación 2 para fijar $r^\alpha \in \bigcap \{\pi_{A_{\alpha+m}}[U_\gamma] : \gamma \in I \cap J_\alpha\}$ para cada $\alpha \in F$. Luego, si para cada $\gamma \in J$ le llamamos $\alpha(\gamma)$ al único ordinal menor a $\text{cf}(\kappa)$ tal que $\gamma \in J_{\alpha(\gamma)}$, definimos

$$r := \left\{ \left(\xi, r^{\alpha(\gamma)}(\xi) \right) : \gamma \in I \wedge \xi \in A_{\alpha(\gamma)+m} \setminus A \right\}.$$

Por último, para $\gamma \in I$ y $\xi \in B_\gamma \setminus A_{\alpha(\gamma)+m}$, tomemos $p(\gamma, \xi) \in U(\gamma, \xi)$ y hagamos

$$s := \left\{ (\xi, p(\gamma, \xi)) : \gamma \in I \wedge \xi \in B_\gamma \setminus A_{\alpha(\gamma)+m} \right\}.$$

Afirmación 3. $\{q, r, s\}$ es una familia compatible de funciones.

En efecto, por un lado q es una función por ser un elemento de X_A . Por otra parte si $\gamma, \delta \in I$ son tales que $\alpha(\gamma) \neq \alpha(\delta)$, entonces $\alpha(\gamma) + m \neq \alpha(\delta) + m$ y por ende

$$(A_{\alpha(\gamma)+m} \setminus A) \cap (A_{\alpha(\delta)+m} \setminus A) = (A_{\alpha(\gamma)+m} \cap A_{\alpha(\delta)+m}) \setminus A = \emptyset;$$

en consecuencia, r es una función. Por último, si $\gamma, \delta \in I$ son distintos y tales que $\alpha(\gamma) \geq \alpha(\delta)$, entonces

$$(B_\gamma \setminus A_{\alpha(\gamma)+m}) \cap (B_\delta \setminus A_{\alpha(\delta)+m}) \subseteq (B_\gamma \setminus A_{\alpha(\gamma)+m}) \cap B_\delta = \emptyset;$$

en particular, s es una función.

Ahora, como $\text{dom}(q) = A$, $\text{dom}(r) = \bigcup \{A_{\alpha(\gamma)+m} \setminus A : \gamma \in I\}$ y $\text{dom}(s) = \bigcup \{B_\gamma \setminus A_{\alpha(\gamma)+m} : \gamma \in I\}$, es fácil verificar que $\{\text{dom}(q), \text{dom}(r), \text{dom}(s)\}$ es una colección ajena por pares. Por un lado, $\text{dom}(q)$ claramente es ajeno con $\text{dom}(r) \cup \text{dom}(s)$; además, si $\gamma, \delta \in I$ son diferentes y suponemos sin perder generalidad que $\alpha(\gamma) \geq \alpha(\delta)$, entonces

$$(B_\gamma \setminus A_{\alpha(\gamma)+m}) \cap (A_{\alpha(\delta)+m} \setminus A) \subseteq (B_\gamma \setminus A_{\alpha(\gamma)+m}) \cap B_\delta = \emptyset;$$

en especial, $\text{dom}(r) \cap \text{dom}(s) = \emptyset$.

Finalmente, como la Afirmación 3 permite extender a $q \cup r \cup s$ a un punto $p \in X_\lambda$, es claro que $p \in \bigcap_{\gamma \in I} U_\gamma$. En suma, κ es un precalibre para X_λ . $\square$

Concluiremos esta sección con las versiones deseadas para precalibres y precalibres débiles del teorema 2.5.7.

Teorema 2.8.10. *Si X es un espacio topológico con precalibre (resp., precalibre débil) κ , $\text{cf}(\kappa) > \omega$ y λ es un número cardinal, entonces la potencia X^λ también tiene precalibre (resp., precalibre débil) κ .*

Demostración. Cuando κ es regular, el teorema 2.5.5 garantiza que κ es un precalibre para X^λ . Si κ es singular, empleamos el inciso (2) del lema 2.8.4 para hallar una sucesión $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ que satisfaga la condición $P(\kappa, X)$. Finalmente, el teorema 2.8.9 permite concluir que X^λ tiene precalibre κ . $\square$

Teorema 2.8.11. *Si λ es un número cardinal y $\{X_\xi : \xi < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos, cada uno con precalibre (resp., precalibre débil) κ , y $\text{cf}(\kappa) > \lambda$, entonces X_λ también tiene precalibre (resp., precalibre débil) κ .*

Demostración. Para κ regular, el teorema 2.5.5 certifica que κ es un precalibre para X_λ . Si κ es singular, empleamos la desigualdad $\lambda < \text{cf}(\kappa)$ para construir una sucesión como la que necesita el teorema 2.8.9. Fijemos una sucesión estrictamente creciente de números cardinales $\{\lambda_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ con $\sup\{\lambda_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\} = \kappa$.

Afirmación. Existe una colección $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ que satisface las siguientes condiciones para cada $\alpha < \text{cf}(\kappa)$:

1. $\max\{\text{cf}(\kappa), \lambda_\alpha, \sup\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\}\} < \kappa_\alpha < \kappa$;
2. κ_α es regular y no numerable, y
3. $(\kappa_{\alpha+1}, \kappa_\alpha)$ es un precalibre para X_ξ , siempre que $\xi < \lambda$.

Por recursión, supongamos que para alguna $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ hemos obtenido $\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\}$ con las propiedades deseadas. Si $\mu := \max\{\text{cf}(\kappa), \lambda_\alpha, \sup\{\kappa_\beta : \beta < \alpha\}\}$, podemos utilizar el inciso (1) del lema 2.8.4 para encontrar $\mu < \kappa_\alpha^\xi < \kappa$ de tal modo que (κ_α^ξ, μ) es un precalibre para X_ξ , siempre que $\xi < \lambda$. Luego, si hacemos $\kappa_\alpha := (\sup\{\kappa_\alpha^\xi : \xi < \lambda\})^+$, las relaciones $\lambda < \text{cf}(\kappa) < \kappa$ implican que $\kappa_\alpha < \kappa$; además, el inciso (2) del lema 2.8.2 asegura que, si $\alpha = \gamma + 1$, entonces $(\kappa_{\gamma+1}, \kappa_\gamma)$ es un precalibre para X_ξ , para cada $\xi < \lambda$.

Por último, como los incisos (1) a (3) de la Afirmación garantizan que $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ tiene las propiedades que necesitamos para emplear el teorema 2.8.9, concluimos que X_λ tiene precalibre κ . $\square$

Para referencias futuras, el siguiente teorema reúne los resultados demostrados en los teoremas 2.5.5, 2.5.6, 2.5.7, 2.8.10 y 2.8.11 (véanse [57], [67] y [71].)

Teorema 2.8.12. *Sean κ un cardinal infinito, λ un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios topológicos, X un espacio topológico y $A \in \{C, P, WP\}$.*

1. $\text{UR} \cap \bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha) \subseteq A(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha)$.

2. Si $\lambda < \text{cf}(\kappa)$ y $\kappa \in \bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha)$, entonces $\kappa \in A(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha)$.
3. $\text{UC} \cap A(X^\lambda) = \text{UC} \cap A(X)$.

3

Celularidad en productos topológicos

En este capítulo vemos cómo se relacionan las condiciones de cadena en conjuntos preordenados con las de espacios topológicos. También estudiamos las relaciones entre los calibres y precalibres de un espacio topológico X y aquéllos de su espacio de Gleason $G(X)$ asociado a él. Recordemos que $G(X)$ es la colección de ultrafiltros de abiertos regulares de X con la topología generada por conjuntos de la forma $U^* := \{\mathcal{U} \in G(X) : U \in \mathcal{U}\}$ en donde U es un abierto regular de X .

Además, tratamos el problema clásico de la celularidad en producto de espacios topológicos. Vemos cómo la celularidad de un producto se modifica según el sistema de axiomas de la teoría de conjuntos que consideremos. En especial, exponemos cómo CH , por un lado, y $\text{MA} + \neg\text{CH}$, por el otro, producen realidades radicalmente opuestas con respecto a la celularidad de productos. Naturalmente, estudiamos el papel especial que tiene la línea de Souslin en esta discusión.

3.1. Precalibres y celularidad

El inciso (1) de nuestro primer resultado es consecuencia de la proposición 2.1.7, mientras que el inciso (2) se desprende de la proposición 1.7.1. Para verificar esto último hay que utilizar la proposición 2.1.2 y el hecho de que, si X y Y son espacios topológicos, entonces el producto topológico $X \times Y$ cumple la relación $c(X \times Y) \leq \kappa$ si y sólo si el producto directo $\tau_X^+ \times \tau_Y^+$ satisface la desigualdad $c(\tau_X^+ \times \tau_Y^+) \leq \kappa$.

Proposición 3.1.1. *Sean X y Y un par de espacios topológicos y κ un cardinal infinito. Los siguientes enunciados son válidos.*

1. *Cuando X tiene precalibre débil κ^+ , también satisface que $c(X) \leq \kappa$.*
2. *Si X tiene precalibre débil κ^+ y $c(Y) \leq \kappa$, entonces $c(X \times Y) \leq \kappa$.*

Corolario 3.1.2. Si X y Y son espacios topológicos, entonces los siguientes enunciados son ciertos.

1. Cuando X tiene la propiedad (K) , también tiene celularidad numerable.
2. Si X satisface la propiedad Knaster y Y tiene la ccc, entonces $X \times Y$ también es ccc.

El teorema 2.5.5 y el corolario 3.1.2(2) se pueden combinar para obtener un corolario más.

Corolario 3.1.3. Si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos ccc y $\left| \{\alpha < \lambda : X_\alpha \text{ no tiene la propiedad } 1\} \right| < \lambda$, entonces el producto $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ es ccc.

3.2. El enunciado $A(\kappa)$

El primer inciso del corolario 3.1.2 motiva la siguiente cuestión:

Pregunta 3.2.1. ¿Es cierto que un espacio con celularidad numerable tiene precalibre débil ω_1 ?

Una observación relevante es que el espacio $\Sigma_\omega(\omega_1)$ del ejemplo 2.6.1 es un espacio de Tychonoff numerablemente compacto que tiene celularidad numerable y no tiene calibre ω_1 .

La pregunta 3.2.1 está íntimamente relacionada con el problema de la preservación de la celularidad en los productos topológicos. Con el objetivo de exponer algunos aspectos de esta conexión, mencionamos a continuación una terna de resultados básicos cuyas demostraciones se pueden encontrar, respectivamente, en [32, Corollary 11.3, p. 42], [32, Theorem 11.6, p. 43] y [32, Theorem 11.7, p. 44].

Teorema 3.2.2. Si κ es un número cardinal, λ es un cardinal infinito, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y $X := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, entonces los siguientes enunciados son ciertos.

1. Si $d(X_\alpha) \leq \kappa$ para cualquier $\alpha < \lambda$, entonces $c(X) \leq \kappa$.
- 2.

$$c(X) = \sup \left\{ c \left(\prod_{\alpha \in F} X_\alpha \right) : F \in [\lambda]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \right\}.$$

3. (Kurepa)

$$c(X) \leq 2^{\lambda \cdot \sup \{c(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}}.$$

En consecuencia, cualquier producto de espacios separables tiene celularidad numerable; un producto de espacios ccc es ccc si todo subproducto finito es ccc, y cualquier producto numerable de espacios ccc tiene celularidad a lo sumo $\mathfrak{c}$.

El teorema 3.2.2 es nuestra primera aproximación en aras de responder la pregunta 3.2.1.

Definición 3.2.3. Si κ es un cardinal infinito, el enunciado $A(\kappa)$ es la siguiente oración: “si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos, entonces $c(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha) < \kappa$ siempre que $c(X_\alpha) < \kappa$ para cualquier $\alpha < \lambda$ ”.

La siguiente equivalencia muestra que en el caso específico de los cardinales sucesores, comprobar el enunciado $A(\cdot)$ se reduce al caso de dos factores.

Proposición 3.2.4. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un cardinal sucesor κ .*

1. $A(\kappa)$.
2. *Para cualesquiera dos espacios X y Y tales que $c(X) < \kappa$ y $c(Y) < \kappa$ se satisface que $c(X \times Y) < \kappa$.*

Demostración. Claramente, (1) implica (2). Para comprobar la implicación restante observemos que si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos con $c(X_\alpha) < \kappa$ para todo $\alpha < \lambda$, entonces el inciso (2) y un argumento inductivo garantizan que todos los subproductos finitos de $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ tienen celularidad menor a κ ; en consecuencia, como κ es sucesor, el teorema 3.2.2(b) garantiza que $c(X) < \kappa$. $\square$

Por esta razón, surge una nueva pregunta que está estrechamente relacionada con la pregunta 3.2.1:

Pregunta 3.2.5. ¿Bajo qué condiciones es cierto el enunciado $A(\omega_1)$? Equivalentemente, ¿qué se necesita para que el producto de espacios con celularidad numerable posea esta propiedad?

El resto del capítulo está dedicado a demostrar que la respuesta para la pregunta 3.2.5 depende de los axiomas independientes a ZFC de la teoría de conjuntos que elijamos aumentar en nuestras hipótesis. En particular, probaremos en las siguientes páginas que el enunciado $A(\omega_1)$ es independiente de ZFC (véanse los corolarios 3.5.8 y 3.6.13). Más información al respecto de la independencia de enunciados en matemáticas se puede encontrar en [40] y [41]. Además, al lector interesado en el problema de la celularidad en los productos topológicos le recomendamos consultar [16, Cap. 7], [88] y [89].

3.3. La topología de los conos

Sean $(P, \leq)$ un conjunto preordenado y $p \in P$. Los conjuntos $p^\perp$ y $p^\uparrow$ son, respectivamente, $\{q \in P : q \leq p\}$ y $\{q \in P : p \leq q\}$. Al conjunto $p^\perp$ se le llama el *cono* de p . Resulta que la colección $\{p^\perp : p \in P\}$ es base para una topología en P conocida como la *topología de los conos*. De ahora en adelante, el símbolo $X(P)$ representa al conjunto P equipado con esta topología.

El siguiente resultado es inmediato y muestra una conexión entre las condiciones de cadena de P y $X(P)$.

Lema 3.3.1. *Si $(P, \leq)$ es un conjunto preordenado y κ es un cardinal infinito, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. $c(P) = c(X(P))$.
2. κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para P si y sólo si κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para $X(P)$.

Para un conjunto preordenado $(P, \leq)$, el *conjunto preordenado dual* de P , denotado por P^* , es el conjunto P equipado con el *orden dual* de $\leq$, denotado por $\leq^*$; es decir, para cualesquiera $p, q \in P^*$ se satisface que $p \leq^* q$ si y sólo si $q \leq p$. A la topología del espacio $X(P^*)$ se le denomina en [25] como “forcing topology”. Observemos que $X(P^*)$ es simplemente el conjunto P equipado con la topología generada por la colección $\{p^\uparrow : p \in P\}$.

El siguiente resultado establece una conexión entre los espacios topológicos en general con aquellos construidos mediante un conjunto preordenado.

Proposición 3.3.2. *Si X es un espacio topológico, existe un conjunto parcialmente ordenado P que satisface las siguientes condiciones:*

1. $c(X) = c(X(P^*))$ y
2. si κ es un cardinal infinito, entonces κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para X si y sólo si κ es un precalibre (resp., precalibre débil) para $X(P^*)$.

Demostración. Sea P el conjunto

$$\left\{ \mathcal{U} \subseteq \tau_X^+ : 0 < |\mathcal{U}| < \omega \wedge \bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset \right\}$$

ordenado parcialmente con la contención directa. Notemos primero que si $\mathcal{U}$ es una familia celular infinita en X , entonces $\{\mathcal{V}^\uparrow : \mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$ es una familia celular en $X(P^*)$ equipotente con $\mathcal{U}$; en consecuencia, $c(X) \leq c(X(P^*))$. Por otra parte, si

$\mathbb{U} \subseteq \mathcal{P}(\tau_X^+)$ cumple que $\{\mathcal{U}^\uparrow : \mathcal{U} \in \mathbb{U}\}$ es una familia celular en $X(P^*)$, entonces $\{\bigcap \mathcal{U} : \mathcal{U} \in \mathbb{U}\}$ es una familia celular en X y, por ende, $c(X(P^*)) \leq c(X)$.

Para verificar el segundo inciso haremos únicamente el argumento para precalibres. Supongamos que $X(P^*)$ tiene precalibre κ y sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de τ_X^+ . Luego, como $\{\{U_\alpha\}^\uparrow : \alpha < \kappa\}$ es una familia de abiertos en $X(P^*)$, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{\{U_\alpha\}^\uparrow : \alpha \in J\}$ es una familia centrada y, por consiguiente, $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada.

Recíprocamente, supongamos que X tiene precalibre κ y sea $\{\mathcal{U}_\alpha^\uparrow : \alpha < \kappa\}$ una familia de abiertos en $X(P^*)$. Así, $\{\bigcap \mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de τ_X^+ y, por lo tanto, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{\bigcap \mathcal{U}_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada; en especial, $\{\mathcal{U}_\alpha^\uparrow : \alpha < \kappa\}$ es una familia centrada. $\square$

3.4. El espacio de Gleason

Sean X un espacio topológico, $\text{AR}(X)$ la colección de abiertos regulares de X y $\text{AR}(X)^+ := \text{AR}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

Definición 3.4.1. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\text{AR}(X)$ es un *filtro* si:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$;
2. $U \cap V \in \mathcal{F}$ siempre que $U, V \in \mathcal{F}$, y
3. si $U \in \mathcal{F}$ y $V \in \text{AR}(X)$ satisfacen $U \subseteq V$, entonces $V \in \mathcal{F}$.

Adicionalmente, un filtro en $\text{AR}(X)$ es un *ultrafiltro* si ningún filtro en $\text{AR}(X)$ lo contiene propiamente. Con estos antecedentes, el símbolo $G(X)$ representará al conjunto de todos los ultrafiltros en $\text{AR}(X)$.

Para cada $U \in \text{AR}(X)$ consideremos el conjunto $U^* := \{\mathcal{F} \in G(X) : U \in \mathcal{F}\}$. Resulta que la colección $\{U^* : U \in \text{AR}(X)^+\}$ es base para una topología en $G(X)$. Al conjunto $G(X)$ equipado con esta topología le llamaremos el *espacio de Gleason* de X (véase [28]). El lector familiarizado con esta construcción reconocerá al espacio $G(X)$ como el espacio de Stone del álgebra booleana completa $\text{AR}(X)$ (véase [54, Definition (c), p. 171]). Un hecho conocido es que $G(X)$ es un espacio compacto de Hausdorff, cero-dimensional y extremadamente disconexo (véanse [54, Theorem (d)(1), p. 171] y [54, Theorem (d), p. 448]).

En el próximo lema recopilamos algunas propiedades que necesitamos de la familia $\{U^* : U \in \text{AR}(X)\}$.

Lema 3.4.2. Los siguientes enunciados son verdaderos para cualquier espacio topológico X y $U, V \in \text{AR}(X)$.

1. $U \neq \emptyset$ si y sólo si $U^* \neq \emptyset$.
2. $U \cap V \in \text{AR}(X)$ y $(U \cap V)^* = U^* \cap V^*$.
3. $U \subseteq V$ si y sólo si $U^* \subseteq V^*$.

Demostración. Para el enunciado del inciso (1) observemos que si $\mathcal{F} \in U^*$, entonces U es no vacío porque $U \in \mathcal{F}$. Por otra parte, si $U \in \text{AR}(X)^+$, entonces un argumento rutinario muestra que $\mathcal{G} := \{V \in \text{AR}(X) : U \subseteq V\}$ es un filtro en $\text{AR}(X)$ con $U \in \mathcal{G}$. Luego, $\mathbb{F} := \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es un filtro en } \text{AR}(X) \text{ y } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}\}$ es un conjunto no vacío que está parcialmente ordenado por la contención directa. Además, si $\mathbb{G}$ es una cadena no vacía en $\mathbb{F}$, un razonamiento simple muestra que $\bigcup \mathbb{G}$ es un elemento de $\mathbb{F}$ que acota superiormente a $\mathbb{G}$. En consecuencia, el teorema 1.5.1 produce un elemento maximal $\mathcal{F}$ de $\mathbb{F}$. Así, $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en $\text{AR}(X)$ con $U \in \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F} \in U^*$.

El inciso (2) es cierto puesto que $U \cap V \in \text{AR}(X)$ por el lema 1.4.1(2) y, si $\mathcal{F} \in G(X)$, entonces $U \cap V \in \mathcal{F}$ si y sólo si $U, V \in \mathcal{F}$; es decir, $\mathcal{F} \in (U \cap V)^*$ si y sólo si $\mathcal{F} \in U^* \cap V^*$.

La implicación directa del inciso (3) es evidente. Para la implicación restante supongamos que $U \not\subseteq V$. En virtud de que la diferencia $U \setminus \text{int } \bar{V}$ es no vacía, existe $x \in U$ con $x \notin \bar{V}$. Sea $W \in \tau_X(x)$ tal que $V \cap W = \emptyset$. Luego, $O := U \cap \text{int } \bar{W}$ es un elemento de $\text{AR}(X)$ (véase el lema 1.4.1(2)) con $x \in O$ y $O \cap V \subseteq \text{int } \bar{W} \cap V = \text{int}(\bar{W} \cap V) \subseteq \text{int } \bar{W} \cap \bar{V} = \emptyset$. Por esta razón, si $\mathcal{F} \in G(X)$ cumple $O \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} \in U^* \setminus V^*$, es decir, $U^* \not\subseteq V^*$. $\square$

De acuerdo con nuestro siguiente resultado, cualquier espacio topológico está íntimamente relacionado con su espacio de Gleason.

Proposición 3.4.3. *Sean X un espacio topológico, κ un cardinal infinito y λ un número cardinal. Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. Si $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es un subconjunto de $\text{AR}(X)$, entonces $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en X si y sólo si $\{U_\alpha^* : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en $G(X)$.
2. $c(X) = c(G(X))$.
3. $P(X) = P(G(X))$ y $WP(X) = WP(G(X))$.
4. $C(X) \subseteq C(G(X))$.
5. $w(G(X)) \leq |\text{AR}(X)|$; si X es T_2 , entonces $|\text{AR}(X)| = w(G(X))$.
6. $\pi w(G(X)) \leq \pi w(X)$; si X es semirregular, entonces $\pi w(X) = \pi w(G(X))$.

Adicionalmente, si X es compacto y T_2 , entonces:

$$7. d(X) = d(G(X)) \text{ y}$$

$$8. C(X) = C(G(X)).$$

Demostración. Para el inciso (1) supongamos que $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es un subconjunto de $\text{AR}(X)$. Observemos que si $\alpha < \beta < \lambda$, entonces el lema 3.4.2 garantiza que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ si y sólo si $U_\alpha^* \cap U_\beta^* = (U_\alpha \cap U_\beta)^* \neq \emptyset$; en consecuencia, $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en X si y sólo si $\{U_\alpha^* : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en $G(X)$.

Para el segundo inciso notemos primero que si $\{U_\alpha^* : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en $G(X)$, entonces el inciso (1) indica que $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en X . Por otro lado, si $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en X , entonces $\{\text{int } \overline{U_\alpha} : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en X contenida en $\text{AR}(X)$ (véase el lema 1.4.1(1)). De este modo, el inciso (1) garantiza que $\{(\text{int } \overline{U_\alpha})^* : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en $G(X)$. Esto muestra que $c(X) = c(G(X))$.

Una prueba similar a la expuesta para (2) demuestra (3). Además, si $\kappa \in C(X)$, entonces $\kappa \in P(X)$ y así, por el inciso (3), $\kappa \in P(G(X))$. De esta manera, la proposición 2.3.2 garantiza que κ es un calibre para $G(X)$. Por otra parte, el inciso (5) es una consecuencia de [16, Theorem B.14, p. 270].

Para demostrar (6) es claro que si $\mathcal{V}$ es una π -base para X , entonces $\{(\text{int } \overline{V})^* : V \in \mathcal{V}\}$ es una π -base para $G(X)$ (véase el lema 3.4.2(3)); así, $\pi w(G(X)) \leq \pi w(X)$. Para la segunda parte de (6) notemos que si X es semirregular, $\lambda := \pi w(G(X))$ y $\{U_\alpha^* : \alpha < \lambda\}$ es una π -base para $G(X)$, entonces $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una π -base para X . Efectivamente, si $U \in \tau_X^+$ y $V \in \text{AR}(X)^+$ cumple $V \subseteq U$, entonces como V^* es un abierto no vacío de $G(X)$, existe $\alpha < \lambda$ con $U_\alpha^* \subseteq V^*$. Así, el lema 3.4.2(3) certifica que $U_\alpha \subseteq V$. En suma, $\pi w(X) \leq \pi w(G(X))$.

Cuando X es compacto y T_2 , como existe una función irreducible y cerrada $\pi : G(X) \rightarrow X$ (véase [16, Theorem B.19, p. 272]), el inciso (6) es consecuencia directa del lema 1.4.3. Finalmente, la relación $C(X) = C(G(X))$ es consecuencia del inciso (4) y la proposición 2.5.1. $\square$

Con respecto a los incisos (4) y (7) de la proposición 3.4.3, no es difícil producir ejemplos de espacios no compactos pero con buenas propiedades topológicas que no satisfagan la relación $C(X) = C(G(X))$. Por ejemplo, el siguiente resultado se infiere a partir de las proposiciones 2.3.2 y 3.4.3(3).

Proposición 3.4.4. *Si X es un espacio topológico y $\kappa \in P(X) \setminus C(X)$, entonces $\kappa \in C(G(X)) \setminus C(X)$.*

En especial, podemos aplicar la proposición 3.4.4 a uno de los ejemplos que construimos en la sección 2.5.

Ejemplo 3.4.5. *Para todo cardinal infinito κ existe un espacio de Hausdorff, cero-dimensional y numerablemente compacto X_κ con $\kappa \in C(G(X_\kappa)) \setminus C(X_\kappa)$.*

Demostración. Si X_κ es como en el ejemplo 2.5.8, entonces la proposición 3.4.4 confirma que X_κ tiene las propiedades deseadas. $\square$

En particular, los espacios de Gleason nos proporcionan más soluciones parciales a la pregunta 3.2.1.

Teorema 3.4.6. *Los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier cardinal infinito κ .*

1. *Todo conjunto preordenado con celularidad numerable tiene precalibre κ .*
2. *Cualquier espacio topológico con celularidad numerable tiene precalibre κ .*
3. *Todo espacio compacto de Hausdorff con celularidad numerable tiene calibre κ .*

Demostración. Claramente, (2) implica (3) por la proposición 2.3.2. Por otra parte, la implicación de (1) a (2) se cumple ya que si X es un espacio topológico ccc, entonces τ_X^+ es un conjunto ordenado parcialmente por la contención directa. Por esta razón, únicamente resta invocar la hipótesis del inciso (1) y la proposición 2.1.2 para obtener que X tiene precalibre κ . Finalmente, (3) implica (1) porque si P es un conjunto preordenado con celularidad numerable, entonces el espacio de Gleason $G(X(P))$, el lema 3.3.1 y la proposición 3.4.3 permiten concluir que P tiene precalibre κ . $\square$

Cerramos esta sección con un lema auxiliar que será clave al final de la sección 3.6.

Lema 3.4.7. *Si X y Y son espacios cero-dimensionales y $X \times Y$ no tiene celularidad numerable, entonces $G(X) \times G(Y)$ no tiene celularidad numerable.*

Demostración. Sea $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia celular en $X \times Y$. En virtud de que X y Y son cero-dimensionales, para cada $\alpha < \omega_1$ existen $U_\alpha \in \text{CA}(X)$ y $V_\alpha \in \text{CA}(Y)$ con $\emptyset \neq U_\alpha \times V_\alpha \subseteq W_\alpha$. Nuestro objetivo es demostrar que $\{U_\alpha^* \times V_\alpha^* : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular en $G(X) \times G(Y)$. Efectivamente, si para $\alpha, \beta < \omega_1$ existe $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in (U_\alpha^* \times V_\alpha^*) \cap (U_\beta^* \times V_\beta^*)$, entonces las relaciones $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{F}$ y $V_\alpha, V_\beta \in \mathcal{G}$ implican que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$. Así, $\emptyset \neq (U_\alpha \cap U_\beta) \times (V_\alpha \cap V_\beta) = (U_\alpha \times V_\alpha) \cap (U_\beta \times V_\beta) \subseteq W_\alpha \cap W_\beta$ y, por ende, $\alpha = \beta$. Por lo tanto, $G(X) \times G(Y)$ no tiene celularidad numerable. $\square$

3.5. $\text{MA}(\omega_1)$ implica $\text{A}(\omega_1)$

En [60] se afirma que Kunen, Rowbottom y Solovay probaron que bajo el Axioma de Martin para ω_1 , $\text{MA}(\omega_1)$, tener “celularidad numerable” es una propiedad productiva. El objetivo de esta sección es presentar una demostración de ese resultado. Es decir, mostraremos que el enunciado $\text{A}(\omega_1)$ (véase la definición 3.2.3) es una consecuencia

de $MA(\omega_1)$. Además, probaremos que éste también responde afirmativamente la pregunta 3.2.1. Sin más preámbulo, el concepto fundamental de este apartado del texto es el siguiente.

Definición 3.5.1. Si κ es un cardinal infinito, entonces el *Axioma de Martin para κ* , $MA(\kappa)$, es el enunciado: “si $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de subconjuntos densos y abiertos de un espacio ccc, compacto y T_2 , entonces $\bigcap_{\alpha < \kappa} U_\alpha \neq \emptyset$ ”.

Por ejemplo, $MA(\omega)$ es un caso especial del Teorema de Categoría de Baire (véase [20, 3.9.3, p. 197]), en el cual la hipótesis ccc no es necesaria. Por otro lado, $\{[0, 1] \setminus \{x\} : x \in [0, 1]\}$ es una familia de subconjuntos densos y abiertos del intervalo $[0, 1]$ que satisface la relación $\bigcap \{[0, 1] \setminus \{x\} : x \in [0, 1]\} = \emptyset$; en especial, este ejemplo muestra que $MA(c)$ es falso.

El *Axioma de Martin*, MA , es el enunciado: “ $MA(\kappa)$ es cierto para cualquier cardinal $\omega \leq \kappa < c$ ”. Una consecuencia de [30, 103, p. 354] es que si κ es un cardinal sucesor, entonces el enunciado “ $MA + c = \kappa$ ” es consistente con ZFC; en particular, es consistente el enunciado “ $MA + c = \omega_2$ ” y, por ende, también lo es $MA(\omega_1)$.

La versión de $MA(\kappa)$ que necesitamos está en términos de órdenes parciales. Para enunciarla es indispensable recordar que un *filtro* F en un conjunto preordenado $(P, \leq)$ es un conjunto $F \subseteq P$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $F \neq \emptyset$;
2. para cualesquiera $p, q \in F$ se cumple que $p \mid q$, y
3. si $p \in P$ y $q \in F$ cumplen $q \leq p$, entonces $p \in F$.

Además, si $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos de P y F tiene intersección no vacía con todos los elementos de $\mathcal{D}$, diremos que F es un filtro $\mathcal{D}$ -genérico.

En [54, Theorem (i), p. 201] se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 3.5.2. Si κ es un cardinal infinito, los siguientes enunciados son equivalentes.

1. $MA(\kappa)$.
2. Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado ccc y $\mathcal{D}$ es una familia de a lo sumo κ subconjuntos densos de P , entonces existe un filtro $\mathcal{D}$ -genérico.

Los siguientes dos resultados son la adaptación de [54, 3S, p. 229] en el contexto del presente escrito.

Lema 3.5.3. Si X es un espacio topológico ccc, κ es un cardinal regular no numerable y $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una subcolección decreciente de τ_X , entonces existe $\alpha < \kappa$ con $\overline{V_\beta} = \overline{V_\alpha}$ para toda $\beta > \alpha$.

Demostración. Supongamos por el contrario que para toda $\alpha < \kappa$ existe $\beta \in (\alpha, \kappa)$ con $\overline{V_\alpha} \not\subseteq \overline{V_\beta}$. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $\beta(\alpha) := \min\{\beta \in (\alpha, \kappa) : V_\alpha \setminus \overline{V_\beta} \neq \emptyset\}$. Además, definamos por recursión una colección de ordinales $\{\gamma_\alpha : \alpha < \kappa\}$ del siguiente modo: $\gamma_0 := 0$ y si $0 < \alpha < \kappa$, entonces $\gamma_\alpha := \sup\{\beta(\gamma_\delta) : \delta < \alpha\} + 1$. Observe que $\{\gamma_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de κ en virtud del lema 1.2.1.

Nuestro objetivo es demostrar que $\mathcal{V} := \{V_{\gamma_\alpha} \setminus \overline{V_{\beta(\gamma_\alpha)}} : \alpha < \kappa\}$ es una familia celular no numerable en X . Claramente, $\mathcal{V}$ es un subconjunto de τ_X^+ . Además, si $\alpha < \delta < \kappa$, entonces $\beta(\gamma_\alpha) \in \{\beta(\gamma_\varepsilon) : \varepsilon < \delta\}$, lo cual implica que $\beta(\gamma_\alpha) < \gamma_\delta$ y, por esta razón, $V_{\gamma_\delta} \subseteq \overline{V_{\beta(\gamma_\alpha)}}$. Así,

$$(V_{\gamma_\alpha} \setminus \overline{V_{\beta(\gamma_\alpha)}}) \cap (V_{\gamma_\delta} \setminus \overline{V_{\beta(\gamma_\delta)}}) = \emptyset.$$

Por lo tanto, X no es un espacio con celularidad numerable, una contradicción. $\square$

Teorema 3.5.4. *Si X es un espacio topológico ccc, κ es un cardinal regular no numerable y $\text{MA}(\kappa)$ es cierto, entonces κ es un precalibre para X . En particular, $\text{MA}(\omega_1)$ garantiza que $w\check{s}(X) = \omega$.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de τ_X^+ . Si $|\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}| < \kappa$, el lema 1.2.2 proporciona $J \in [\kappa]^\kappa$ con $U_\alpha = U_\beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in J$. Por este motivo, $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$; en particular, $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada. Cuando $|\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}| = \kappa$, el lema 1.2.2 produce $J \in [\kappa]^\kappa$ con $U_\alpha \neq U_\beta$ siempre que $\alpha, \beta \in J$ son distintos.

Para cada $\alpha < \kappa$ sea $V_\alpha := \bigcup_{\beta > \alpha} U_\beta$. En vista de que $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ satisface las hipótesis del lema 3.5.3, existe el mínimo número ordinal $\alpha < \kappa$ con $\overline{V_\beta} = \overline{V_\alpha}$ para toda $\beta \in (\alpha, \kappa)$. Luego, como V_α tiene celularidad numerable por la proposición 2.1.9(1), el conjunto $\mathcal{P} := \tau_{V_\alpha}^+$, ordenado parcialmente por la contención directa, tiene celularidad numerable (véase la proposición 2.1.2(1)).

Nuestra siguiente meta es probar que si $\mathcal{D}_\beta := \{U \in \mathcal{P} : \exists \gamma \in (\beta, \kappa)(U \subseteq U_\gamma)\}$ para toda $\beta \in (\alpha, \kappa)$, entonces cada $\mathcal{D}_\beta$ es un subconjunto denso de $\mathcal{P}$. Efectivamente, si $\beta \in (\alpha, \kappa)$ y $V \in \mathcal{P}$, las relaciones $V \in \tau_{V_\alpha}^+$ y $\overline{V_\alpha} = \overline{V_\beta}$ garantizan que $V \cap V_\beta \neq \emptyset$ y, por ende, existe $\gamma \in (\beta, \kappa)$ con $V \cap U_\gamma \neq \emptyset$. De esta forma, el conjunto $U := V \cap U_\gamma$ satisface $U \in \mathcal{D}_\beta$ y $U \subseteq V$.

Ahora, el enunciado $\text{MA}(\kappa)$ produce un filtro $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$ que es $\{\mathcal{D}_\beta : \beta \in (\alpha, \kappa)\}$ -genérico. Sea $J := \{\alpha < \kappa : U_\alpha \in \mathcal{F}\}$. Notemos que si $\beta \in (\alpha, \kappa)$, entonces por la genericidad de $\mathcal{F}$ hay $U \in \mathcal{F} \cap \mathcal{D}_\beta$; en consecuencia, existe $\gamma \in (\beta, \kappa)$ con $U \subseteq U_\gamma$. Así, como $U_\gamma \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro en $\mathcal{P}$, resulta que $U_\gamma \in \mathcal{F}$, es decir, $\gamma \in J$. Por lo tanto, J es un subconjunto cofinal de κ , lo cual implica que $|J| = \kappa$ en virtud del lema 1.2.1.

Para terminar, si $F \in [J]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, entonces como $\{U_\alpha : \alpha \in F\}$ es un subconjunto finito del filtro $\mathcal{F}$, el hecho de que $\mathcal{F}$ es una familia formada por elementos compatibles por pares en el orden $\mathcal{P}$ genera $U \in \mathcal{P}$ con $U \subseteq U_\alpha$ para todo $\alpha \in F$; por consiguiente, $\bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha \neq \emptyset$. En suma, $J \in [\kappa]^\kappa$ y $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada. $\square$

El teorema 3.5.4 tiene varios corolarios interesantes que reunimos a continuación. Por ejemplo, el siguiente resultado se obtiene a partir del teorema 3.4.6.

Corolario 3.5.5. *Si κ es un cardinal regular no numerable, entonces bajo $MA(\kappa)$ los siguientes enunciados son verdaderos.*

1. *Todo conjunto preordenado con celularidad numerable tiene precalibre κ .*
2. *Cualquier espacio topológico con celularidad numerable tiene precalibre κ .*
3. *Todo espacio compacto de Hausdorff con celularidad numerable tiene calibre κ .*

En especial, el corolario 3.5.5 para $\kappa = \omega_1$ contesta afirmativamente la pregunta 3.2.1 bajo $MA(\omega_1)$. Más aún, como las proposiciones 1.6.5 y 2.1.7 garantizan que tener precalibre débil ω_1 implica tener celularidad numerable, resulta que los conceptos de “precalibre ω_1 ”, “precalibre débil ω_1 ” y “celularidad numerable” son indistinguibles bajo $MA(\omega_1)$.

Corolario 3.5.6. *Los siguientes enunciados se satisfacen si $MA(\omega_1)$ se cumple.*

1. *Todo conjunto preordenado con celularidad numerable tiene precalibre ω_1 .*
2. *Cualquier espacio topológico con celularidad numerable tiene precalibre ω_1 .*
3. *Todo espacio compacto de Hausdorff con celularidad numerable tiene calibre ω_1 .*

Corolario 3.5.7. *Si suponemos $MA(\omega_1)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier espacio topológico X .*

1. *X tiene precalibre ω_1 hereditariamente.*
2. *X tiene la propiedad (K) hereditariamente.*
3. *X tiene celularidad numerable hereditariamente.*
4. *X tiene amplitud numerable.*

Finalmente, una combinación del teorema 2.5.5 con el corolario 3.5.6 responde la pregunta 3.2.5:

Corolario 3.5.8. $MA(\omega_1)$ implica $A(\omega_1)$.

A las personas interesadas en obtener más información del Axioma de Martin se les recomienda consultar [23], [30], [40] y [72].

3.6. CH implica $\neg A(\omega_1)$

De acuerdo con Galvin, Laver fue el primero en demostrar (sin publicarlo) que, bajo CH, existen un par de conjuntos parcialmente ordenados con celularidad numerable cuyo producto directo ya no es ccc. Posteriormente, Galvin estableció en [25] un fortalecimiento del resultado de Laver al mostrar que CH implica la existencia de un par de espacios compactos de Hausdorff, cero-dimensionales, extremadamente disconexos y con celularidad numerable de tal manera que su producto topológico no es ccc.

El objetivo de esta sección es presentar todos los detalles del resultado de Galvin (véase el teorema 3.6.11) siguiendo el camino indicado en [54, 3T, p. 230] y con una aplicación del material de la sección 3.4. Además, obtendremos un par de consecuencias interesantes del teorema de Galvin (véanse el teorema 3.6.12 y el corolario 3.6.14) que permitirán responder de manera distinta las preguntas 3.2.1 y 3.2.5 a como fueron contestadas con el corolario 3.5.5 y el corolario 3.5.8.

Para cualquier $K \subseteq [\omega_1]^2$ definamos

$$X_K := \{A \subseteq \omega_1 : [A]^2 \subseteq K \text{ y } A \text{ es maximal con respecto a esta propiedad}\}.$$

En otras palabras, un conjunto $A \subseteq \omega_1$ es un elemento de X_K si y sólo si $[A]^2 \subseteq K$ y, si $B \subseteq \omega_1$ cumple $[A]^2 \subseteq [B]^2 \subseteq K$, entonces $A = B$.

Lema 3.6.1. *Si $A \subseteq \omega_1$ satisface $|A| \geq 2$ y $[A]^2 \subseteq K$, entonces existe $B \in X_K$ tal que $A \subseteq B$.*

Demostración. Si $\mathcal{P} := \{B \subseteq \omega_1 : A \subseteq B \wedge [B]^2 \subseteq K\}$, entonces $(\mathcal{P}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y no vacío. Ahora, si $\mathcal{C}$ es una cadena no vacía en $\mathcal{P}$ vamos a demostrar que $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{P}$. Claramente cualquier elemento de $\mathcal{C}$ está contenido en $\bigcup \mathcal{C}$ y $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ porque $\mathcal{C}$ es no vacío. Además, si $\{\alpha, \beta\} \in [\bigcup \mathcal{C}]^2$, entonces existen $C, D \in \mathcal{C}$ tales que $\alpha \in C$ y $\beta \in D$. De esta manera, como $\mathcal{C}$ es una cadena, si suponemos sin perder generalidad que $C \subseteq D$, entonces $\{\alpha, \beta\} \in [D]^2 \subseteq K$; en consecuencia, $\{\alpha, \beta\} \in K$, lo cual demuestra que $[\bigcup \mathcal{C}]^2 \subseteq K$ y, por ende, que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{P}$.

Así, el teorema 1.5.1 produce un elemento $B \in \mathcal{P}$ que es $\subseteq$ -maximal. Observe que por definición de $\mathcal{P}$ se cumplen las relaciones $A \subseteq B$ y $[B]^2 \subseteq K$. Para comprobar que $B \in X_K$ supongamos que $C \subseteq \omega_1$ satisface $[B]^2 \subseteq [C]^2 \subseteq K$. Resulta entonces que C pertenece a $\mathcal{P}$ y, por lo tanto, la maximalidad de B implica la relación $B = C$. En suma, $B \in X_K$ y $A \subseteq B$. $\square$

Sea $\varphi_K : [\omega_1]^{<\omega} \rightarrow \mathcal{P}(X_K)$ la función determinada mediante

$$\varphi_K(F) := \{A \in X_K : F \subseteq A\}.$$

Lema 3.6.2. *Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. Si $\alpha, \beta < \omega_1$ cumplen $\alpha \neq \beta$ y $\{\alpha, \beta\} \notin K$, entonces $\varphi_K(\{\alpha\}) \cap \varphi_K(\{\beta\}) = \emptyset$.
2. Para $F, G \in [\omega_1]^{<\omega}$ se satisface que $\varphi_K(F \cup G) = \varphi_K(F) \cap \varphi_K(G)$.
3. Cuando $F \in [\omega_1]^{<\omega}$ verifica $|F| \geq 2$, $\varphi_K(F) = \emptyset$ si y sólo si $[F]^2 \setminus K \neq \emptyset$.

Demostración. Para el inciso (1) observemos que si $A \in \varphi_K(\{\alpha\}) \cap \varphi_K(\{\beta\})$, entonces $\{\alpha, \beta\} \in [A]^2 \subseteq K$, una contradicción. El inciso (2) es consecuencia de que un conjunto $A \subseteq \omega_1$ cumple $F \cup G \subseteq A$ si y sólo si $F \subseteq A$ y $G \subseteq A$. Para (3) notemos que si $A \in \varphi_K(F)$, entonces $[F]^2 \subseteq [A]^2 \subseteq K$; en particular, $[F]^2 \setminus K = \emptyset$. Por otra parte, si $[F]^2 \setminus K = \emptyset$, es decir, $[F]^2 \subseteq K$, entonces el lema 3.6.1 produce $A \in X_K$ con $F \subseteq A$. Así, $A \in \varphi_K(F)$. $\square$

Lema 3.6.3. La colección $\Phi_K := \{\varphi_K(F) : F \in [\omega_1]^{<\omega}\}$ es una base para una topología en X_K que denotaremos por τ_K . Además, X_K equipado con esta topología es un espacio de Hausdorff cero-dimensional y cumple que $w(X_K) \leq \omega_1$.

Demostración. En virtud de que $\varphi_K(\emptyset) = X_K$ y Φ_K es cerrada bajo intersecciones finitas por el lema 3.6.2(2), Φ_K es base para una topología en X_K .

Ahora, para verificar que (X_K, τ_K) es un espacio T_2 , sean $A, B \in X_K$ distintos y supongamos sin perder generalidad que existe $\alpha \in A \setminus B$. Si para cualquier $\beta \in B$ se constata que $\{\alpha, \beta\} \in K$, entonces el conjunto $B' := B \cup \{\alpha\}$ es un subconjunto de ω_1 que satisface $[B]^2 \subseteq [B']^2 \subseteq K$ y $B \neq B'$, una contradicción a la maximalidad de B . Por esta razón, existe $\beta \in B$ con $\{\alpha, \beta\} \notin K$ y, por ende, el lema 3.6.2(1) garantiza que $\varphi_K(\{\alpha\})$ y $\varphi_K(\{\beta\})$ son elementos ajenos de τ_K que separan a A y B .

Luego, si $F \in [\omega_1]^{<\omega}$ y $A \in X_K \setminus \varphi_K(F)$, entonces existe $\beta \in F \setminus A$ porque $F \not\subseteq A$. Por maximalidad, existe $\alpha \in A$ con $\{\alpha, \beta\} \notin K$. Luego, como $\{\alpha, \beta\} \in [F \cup A]^2 \setminus K$, el lema 3.6.2(3) implica que $\varphi_K(\{\alpha\} \cup F) = \emptyset$; equivalentemente, $\varphi_K(\{\alpha\}) \cap \varphi_K(F) = \emptyset$ por el lema 3.6.2(2). Por lo tanto, $A \in \varphi_K(\{\alpha\}) \subseteq X_K \setminus \varphi_K(F)$. En consecuencia, $X_K \setminus \varphi_K(F)$ es un elemento de τ_K . Esto demuestra que (X_K, τ_K) es cero-dimensional.

Finalmente, como $|\Phi_K| \leq |[\omega_1]^{<\omega}| = \omega_1$, concluimos que $w(X_K) \leq \omega_1$. $\square$

Lema 3.6.4. Si para cada $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ se satisface que $\varphi_K(\{\alpha\}) \neq \emptyset$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

1. X_K tiene celularidad numerable.
2. Si $\mathcal{F} \subseteq [\omega_1]^{<\omega}$ es ajena por pares y cumple:
 - (a) $[F]^2 \subseteq K$ para toda $F \in \mathcal{F}$ y
 - (b) $[F \cup G]^2 \setminus K \neq \emptyset$ siempre que $F, G \in \mathcal{F}$ son distintos,
 entonces $\mathcal{F}$ es numerable.

Demostración. Para (1) implica (2) supongamos que $\mathcal{F} \subseteq [\omega_1]^{<\omega}$ es ajena por pares y cumple (a) y (b). Observemos primero que $I := \{\alpha < \omega_1 : \{\alpha\} \in \mathcal{F}\}$ es un conjunto numerable porque si $\alpha < \beta < \omega_1$ satisfacen $\{\alpha\}, \{\beta\} \in \mathcal{F}$, entonces (b) garantiza que $\{\alpha, \beta\} \notin K$ y, por ende, el lema 3.6.2(1) garantiza que $\varphi_K(\{\alpha\}) \cap \varphi_K(\{\beta\}) = \emptyset$. En consecuencia, si I es no numerable y $J := I \cap (\omega_1 \setminus \omega)$, entonces $\{\varphi_K(\{\alpha\}) : \alpha \in J\}$ es una familia celular no numerable en X_K , una contradicción a (1).

Consideremos entonces la familia $\mathcal{G} := \mathcal{F} \setminus \{F \in \mathcal{F} : |F| \leq 1\}$. Claramente, $\mathcal{G}$ es un subconjunto ajeno por pares de $[\omega_1]^{<\omega}$ que satisface (a) y (b). Además, cada elemento de $\mathcal{G}$ tiene al menos dos puntos. Más aún, si logramos verificar que $\mathcal{G}$ es numerable, lo expuesto en el párrafo anterior garantizará que $\mathcal{F}$ es numerable también.

Para terminar esta implicación, notemos que si $F, G \in \mathcal{G}$ son distintos, entonces la condición (b) y los incisos (2) y (3) del lema 3.6.2 aseguran que $\varphi_K(F) \cap \varphi_K(G) = \emptyset$; en consecuencia, $\{\varphi_K(F) : F \in \mathcal{G}\}$ es una familia celular en X_K y por ende es numerable, lo cual implica que $\mathcal{G}$ también lo es y, por extensión, que $\mathcal{F}$ lo es.

Para (2) implica (1) sea $\mathcal{G} \subseteq [\omega_1]^{<\omega}$ de tal modo que $\{\varphi_K(G) : G \in \mathcal{G}\} \subseteq \tau_K^+$ y $\varphi_K(F) \cap \varphi_K(G) = \emptyset$ para $F, G \in \mathcal{G}$ distintos. Observemos que $\mathcal{G}$ satisface (a) por el lema 3.6.2(3), y cumple (b) por una combinación de los incisos (2) y (3) del lema 3.6.2. Supongamos en busca de una contradicción que $\mathcal{G}$ no es numerable y sea $\{G_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una enumeración sin repeticiones de $\mathcal{G}$.

Por el teorema 1.2.3, existen $J \in [\omega_1]^{\omega_1}$ y $G \in [\omega_1]^{<\omega}$ tales que $G_\alpha \cap G_\beta = G$, siempre que $\alpha, \beta \in J$ son distintos. Consideremos la familia $\mathcal{F} := \{G_\alpha \setminus G : \alpha \in J\}$. Resulta que $\mathcal{F}$ es un subconjunto de $[\omega_1]^{<\omega}$ ajeno por pares que satisface (a) pues, si $\alpha \in J$, la inclusión $G_\alpha \setminus G \subseteq G_\alpha$ implica que $[G_\alpha \setminus G]^2 \subseteq [G_\alpha]^2 \subseteq K$.

Para constatar que $[(G_\alpha \setminus G) \cup (G_\beta \setminus G)]^2 \setminus K \neq \emptyset$ para $\alpha, \beta \in J$ distintos, supongamos por el contrario que $[(G_\alpha \setminus G) \cup (G_\beta \setminus G)]^2 \subseteq K$. Recordemos además que $[G_\alpha]^2 \subseteq K$ y $[G_\beta]^2 \subseteq K$. Vamos a demostrar que $[G_\alpha \cup G_\beta]^2 \subseteq K$ para obtener un absurdo. Sean $\{\gamma, \delta\} \in [G_\alpha \cup G_\beta]^2$ y supongamos sin perder generalidad que $\gamma \in G_\alpha$. Si $\delta \in G_\alpha$, entonces $\{\gamma, \delta\} \in [G_\alpha]^2$. En caso contrario, $\delta \in G_\beta \setminus G_\alpha$; en especial, $\delta \notin G$. Ahora, si $\gamma \in G_\beta$ entonces $\{\gamma, \delta\} \in [G_\beta]^2$. Si esto no sucede, $\gamma \in G_\alpha \setminus G_\beta$; en particular, $\gamma \notin G$. De este modo, $\{\gamma, \delta\} \in [(G_\alpha \setminus G) \cup (G_\beta \setminus G)]^2$. Este razonamiento demuestra la contención $[G_\alpha \cup G_\beta]^2 \subseteq K$, lo cual es imposible.

La contradicción del párrafo previo surgió de haber supuesto que $\mathcal{F}$ no cumplía la condición (b). De esta manera, $\mathcal{F}$ satisface las hipótesis que requiere (2) y, por ende, $\mathcal{F}$ es numerable, i.e., $\{G_\alpha \setminus G : \alpha \in J\}$ es numerable. No obstante, observemos que si $\alpha, \beta \in J$ son distintos, entonces $G_\alpha \neq G_\beta$. De esta manera, si suponemos sin perder generalidad que hay $\gamma \in G_\alpha \setminus G_\beta$, entonces $\gamma \notin G$ y, por lo tanto, $\gamma \in (G_\alpha \setminus G) \setminus (G_\beta \setminus G)$; en particular, $G_\alpha \setminus G \neq G_\beta \setminus G$. Este argumento demuestra que la función $J \rightarrow \{G_\alpha \setminus G : \alpha \in J\}$ dada por $\alpha \mapsto G_\alpha \setminus G$ es inyectiva. Así, $\{G_\alpha \setminus G : \alpha \in J\}$ es no numerable, un absurdo nuevamente. En conclusión, $\mathcal{G}$ es numerable y, por ende, X_K tiene celularidad numerable. $\square$

Sea $\mathbb{F} := \{\mathcal{F} \subseteq [\omega_1]^{<\omega} : \mathcal{F} \text{ es una familia ajena por pares y } |\mathcal{F}| = \omega\}$.

Lema 3.6.5. $|\mathbb{F}| = \mathfrak{c}$.

Demostración. Comencemos por observar que $\mathfrak{c} = 2^\omega \leq \omega_1^\omega \leq \mathfrak{c}^\omega = (2^\omega)^\omega = 2^\omega = \mathfrak{c}$; en consecuencia, $\omega_1^\omega = \mathfrak{c}$ y, por ende, es suficiente comprobar que $|\mathbb{F}| = \omega_1^\omega$. Adicionalmente, es claro que

$$|\mathbb{F}| \leq \left| \left[[\omega_1]^{<\omega} \right]^\omega \right| \leq \left| [\omega_1]^{<\omega} \right|^\omega = \omega_1^\omega.$$

Para verificar la desigualdad restante consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} F(\omega, \omega_1) &:= \{f \subseteq \omega \times \omega_1 : f \text{ es una función de } \omega \text{ en } \omega_1\} \text{ y} \\ \mathbb{G} &:= \{\mathcal{G} \subseteq [\omega \times \omega_1]^{<\omega} : \mathcal{G} \text{ es una familia ajena por pares y } |\mathcal{G}| = \omega\}. \end{aligned}$$

Notemos que para cualquier $f \in F(\omega, \omega_1)$ se cumple que

$$\mathcal{S}(f) := \{(n, f(n)) : n < \omega\}$$

es un elemento de $\mathbb{G}$. Además, si $f, g \in F(\omega, \omega_1)$ son distintos, entonces existe $n < \omega$ con $f(n) \neq g(n)$ y, por lo tanto, $\{(n, f(n))\} \in \mathcal{S}(f) \setminus \mathcal{S}(g)$. Esto demuestra que $\mathcal{S}$ define una función inyectiva de $F(\omega, \omega_1)$ en $\mathbb{G}$. Por lo tanto, $\omega^{\omega_1} = |F(\omega, \omega_1)| \leq |\mathbb{G}|$.

Finalmente, si $f : \omega \times \omega_1 \rightarrow \omega_1$ es una función biyectiva, entonces un argumento rutinario muestra que la función $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{F}$ definida como $\mathcal{G} \mapsto \{f[G] : G \in \mathcal{G}\}$ es biyectiva. En suma, $\omega^{\omega_1} \leq |\mathbb{G}| = |\mathbb{F}| \leq \omega^{\omega_1}$, es decir, $|\mathbb{F}| = \omega^{\omega_1}$. $\square$

Empleemos el lema 3.6.5 para fijar $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, una enumeración sin repeticiones de $\mathbb{F}$, y para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ etiquetemos fielmente a $\mathcal{F}_\alpha$ como $\{F(\alpha, n) : n < \omega\}$. Observe que bajo CH tenemos la igualdad $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Para cada $\alpha < \omega_1$ definamos $K_\alpha := K \cap [\alpha]^2$ y $K(\alpha) := \{\beta < \alpha : \{\alpha, \beta\} \in K\}$. Además, si $\beta < \alpha$ y $F \in [\omega_1]^{<\omega}$, entonces

$$\begin{aligned} W(\beta, \alpha, F) &:= \{n < \omega : [F(\beta, n) \cup F]^2 \subseteq K_\alpha\} \text{ y} \\ Z(\beta, \alpha, F) &:= \{n \in W(\beta, \alpha, F) : F(\beta, n) \subseteq K(\alpha)\}. \end{aligned}$$

Lema 3.6.6. Supongamos CH y que las siguientes condiciones se satisfacen para cada $\alpha < \omega_1$:

1. $K(\alpha) \neq \emptyset$ siempre que $\alpha \geq \omega$ y
2. si $\beta < \alpha$, $\bigcup \mathcal{F}_\beta \subseteq \alpha$, $F \subseteq \alpha \setminus \bigcup \mathcal{F}_\beta$ es finito y $W(\beta, \alpha, F)$ es infinito, entonces $Z(\beta, \alpha, F)$ es infinito.

En estas circunstancias, $\varphi_K(\{\alpha\}) \neq \emptyset$ para cualquier $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$, y X_K tiene celularidad numerable.

Demostración. Si $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$, entonces la condición (1) implica la existencia de $\beta \in K(\alpha)$. De esta forma, como $\{\alpha, \beta\} \in K$ se cumple que $[\{\alpha, \beta\}]^2 \setminus K = \emptyset$ y, por lo tanto, el lema 3.6.2(3) certifica que $\varphi_K(\{\alpha, \beta\}) \neq \emptyset$. Así, si A pertenece a $\varphi_K(\{\alpha, \beta\})$, se obtiene que $A \in \varphi_K(\{\alpha\})$.

Para la segunda parte de este lema supongamos en busca de una contradicción que X_K no tiene celularidad numerable. En este caso, existe una familia no numerable $\mathcal{F} \subseteq [\omega_1]^{<\omega}$ que satisface las condiciones (a) y (b) del lema 3.6.4. Sea $\beta < \omega_1$ de tal forma que $\mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}$. Observemos ahora que, como $\mathcal{F}_\beta$ es numerable y cada uno de sus elementos es finito, $\bigcup \mathcal{F}_\beta$ es un subconjunto numerable de ω_1 y, por ende, existe $\beta < \alpha < \omega_1$ con $\bigcup \mathcal{F}_\beta \subseteq \alpha$. Por otra parte, como $\mathcal{F}$ es no numerable y ajena por pares, la función $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \omega_1$ determinada mediante $F \mapsto \min F$ es cofinal en ω_1 . De esta manera, existe $G \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\alpha < \min G$.

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ una enumeración estrictamente creciente de G . Además, para cada $1 \leq i \leq m$ definamos $G_i := \{\alpha_j : j < i\}$. Nótese que para toda $1 \leq i \leq m$ se cumplen las relaciones $\beta < \alpha_i$, $\bigcup \mathcal{F}_\beta \subseteq \alpha_i$ y $G_i \subseteq \alpha_i \setminus \bigcup \mathcal{F}_\beta$.

Afirmación. Para toda $1 \leq i \leq m$ se satisface que $W(\beta, \alpha_i, G_i)$ y $Z(\beta, \alpha_i, G_i)$ son infinitos.

La demostración de la Afirmación es por inducción finita sobre m . Comencemos por observar que para cada $n < \omega$ se cumplen las relaciones $[F(\beta, n)]^2 \subseteq K$ (véase el lema 3.6.4) y $F(\beta, n) \subseteq \alpha_1$; en consecuencia, $[F(\beta, n)]^2 \subseteq K_{\alpha_1}$. De esta manera, $\omega = W(\beta, \alpha_1, G_1)$ y así, la hipótesis del presente lema implica que $Z(\beta, \alpha_1, G_1)$ es infinito. Supongamos ahora que para alguna $1 \leq i < m$ hemos demostrado que todos los elementos de la colección $\{W(\beta, \alpha_j, G_j) : j \leq i\} \cup \{Z(\beta, \alpha_j, G_j) : j \leq i\}$ son conjuntos infinitos.

Para verificar que $W(\beta, \alpha_{i+1}, G_{i+1})$ es infinito vamos a mostrar que $Z(\beta, \alpha_i, G_i)$ está contenido en él. Si $n \in Z(\beta, \alpha_i, G_i)$, entonces $n \in W(\beta, \alpha_i, G_i)$ y $F(\beta, n) \subseteq K(\alpha_i)$. Para comprobar que $n \in W(\beta, \alpha_{i+1}, G_{i+1})$ necesitamos que $[F(\beta, n) \cup G_{i+1}]^2 \subseteq K_{\alpha_{i+1}}$. Esto es consecuencia de los siguientes hechos: $[F(\beta, n) \cup G_i]^2 \subseteq K_{\alpha_i} \subseteq K_{\alpha_{i+1}}$ porque $n \in W(\beta, \alpha_i, G_i)$; $[F(\beta, n)]^2 \subseteq K_{\alpha_{i+1}}$ porque $F(\beta, n) \subseteq \alpha_{i+1}$; $[G_{i+1}]^2 \subseteq [G]^2 \cap [\alpha_{i+1}]^2 \subseteq K \cap [\alpha_{i+1}]^2 \subseteq K_{\alpha_{i+1}}$ porque $G_{i+1} \subseteq \alpha_{i+1}$ y $\mathcal{F}$ satisface la condición (a) del lema 3.6.4, y $[F(\beta, n) \cup \{\alpha_i\}]^2 \subseteq K_{\alpha_{i+1}}$ porque $F(\beta, n) \subseteq K(\alpha_i)$.

De esta manera, $Z(\beta, \alpha_i, G_i) \subseteq W(\beta, \alpha_{i+1}, G_{i+1})$ y así, como $Z(\beta, \alpha_i, G_i)$ es infinito, $W(\beta, \alpha_{i+1}, G_{i+1})$ también lo es. Finalmente, la hipótesis de este lema implica que $Z(\beta, \alpha_{i+1}, G_{i+1})$ es infinito. Esto completa la inducción.

Para terminar, un argumento similar al expuesto en la prueba de la Afirmación muestra que si $n \in Z(\beta, \alpha_m, G_m)$, entonces las condiciones $n \in W(\beta, \alpha_m, G_m)$ y $F(\beta, n) \subseteq K(\alpha_m)$ implican que $[F(\beta, n) \cup G]^2 \subseteq K$, lo cual es una contradicción al hecho de que $\mathcal{F}$ satisface la condición (b) del lema 3.6.4. En suma, X_K tiene celularidad numerable. $\square$

Lema 3.6.7. Si $K, M \subseteq [\omega_1]^2$ son ajenos y para cada $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ se satisface que $\varphi_K(\{\alpha\}) \neq \emptyset \neq \varphi_M(\{\alpha\})$, entonces $X_K \times X_M$ no tiene celularidad numerable.

Demostración. Supongamos que $\alpha, \beta \in \omega_1 \setminus \omega$ son distintos y tales que existe una pareja

$$(A, B) \in (\varphi_K(\{\alpha\}) \times \varphi_M(\{\alpha\})) \cap (\varphi_K(\{\beta\}) \times \varphi_M(\{\beta\})).$$

Luego, como $A \in X_K$, $B \in X_M$ y $\{\alpha, \beta\} \subseteq A \cap B$, se cumple que $\{\alpha, \beta\} \in [A]^2 \cap [B]^2 \subseteq K \cap M$, una contradicción. En consecuencia, $\{\varphi_K(\{\alpha\}) \times \varphi_M(\{\alpha\}) : \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$ es una familia celular no numerable en $X_K \times X_M$. $\square$

Lema 3.6.8. Sea $\{\mathcal{G}_n : n < \omega\}$ un subconjunto de $\mathbb{F}$ y enumeremos sin repeticiones a cada $\mathcal{G}_n$ como $\{G(n, m) : m < \omega\}$. Si $\alpha < \omega_1$ es tal que $\bigcup \{\mathcal{G}_n : n < \omega\} \subseteq \alpha$, entonces los siguientes enunciados son ciertos.

1. Si $\mathcal{D} \subseteq \bigcup \{\mathcal{G}_n : n < \omega\}$ es un conjunto finito y $n < \omega$, entonces existe $m < \omega$ tal que $G(n, m)$ es ajeno con cada elemento de $\mathcal{D}$.
2. Existen conjuntos ajenos A y B tales que $A \cup B \subseteq \alpha$, y tanto $\{m < \omega : G(n, m) \subseteq A\}$ como $\{m < \omega : G(n, m) \subseteq B\}$ son infinitos para cada $n < \omega$.

Demostración. Para el inciso (1) supongamos, en busca de una contradicción, que para cualquier $m < \omega$ existe $D_m \in \mathcal{D}$ con $D_m \cap G(n, m) \neq \emptyset$. Luego, como $\mathcal{D}$ es un conjunto finito la función $\omega \rightarrow \mathcal{D}$ determinada mediante $m \mapsto D_m$ tiene una fibra de cardinalidad ω ; es decir, existe $D \in \mathcal{D}$ de tal forma que $J := \{m < \omega : D_m = D\}$ es infinito. De esta manera, como $\mathcal{G}_n$ es ajena por pares, la función $J \rightarrow D$ definida como $m \mapsto \min(D \cap G(n, m))$ es inyectiva, lo cual implica que D es infinito, una contradicción.

Para probar el inciso (2) demostraremos primero el siguiente enunciado.

Afirmación 1. Existe una familia de conjuntos $\{\mathcal{D}_n : n < \omega\}$ que satisface las siguientes condiciones para cada $n < \omega$:

1. $\mathcal{D}_n$ es un subconjunto finito y ajeno por pares de $\bigcup \{\mathcal{G}_m : m < \omega\}$ y
2. si $m \leq n$, entonces $\mathcal{D}_m \subseteq \mathcal{D}_n$ y $|\mathcal{D}_n \cap \mathcal{G}_m| \geq n$.

La demostración de la Afirmación 1 es por recursión. Para la base de la recursión es suficiente tomar $D \in \mathcal{G}_0$ y definir $\mathcal{D}_0 := \{D\}$. Supongamos que para alguna $n < \omega$ hemos construido la colección $\{\mathcal{D}_m : m \leq n\}$ con las propiedades deseadas. Con el enunciado del inciso (1) del presente lema podemos contruir mediante recursión finita una colección $\{k_i : i < n+1\} \subseteq \omega$ de tal forma que, para cualquier $i < n$, $G(n+1, k_i)$ es ajeno con cada elemento de $\bigcup \{\mathcal{D}_m : m \leq n\} \cup \{G(n+1, k_j) : j < i\}$. De esta forma, si

$\mathcal{D}_n := \bigcup \{ \mathcal{D}_m : m \leq n \} \cup \{ G(n+1, k_i) : i < n+1 \}$, entonces claramente $\mathcal{D}_n$ cumple las condiciones (1) y (2) de la Afirmación 1.

Sea $\mathcal{D} := \bigcup \{ \mathcal{D}_n : n < \omega \}$. Por la Afirmación 1, $\mathcal{D}$ es una familia ajena por pares con $\mathcal{D} \subseteq \bigcup \{ \mathcal{G}_n : n < \omega \}$ y tal que $|\mathcal{D} \cap \mathcal{G}_n| = \omega$ para cada $n < \omega$. Concluiremos la demostración auxiliados de la siguiente afirmación que probaremos mediante recursión.

Afirmación 2. Existe una colección $\{m(i, j, k) : i < \omega, j < \omega \wedge k < 2\} \subseteq \omega$ que satisface las siguientes propiedades para cualquier $n < \omega$:

1. $\{G(i, m(i, j, k)) : i < n, j < n \wedge k < 2\} \subseteq \mathcal{D}$ y
2. si $i, i' < n, j, j' < n$ y $k, k' < 2$, entonces la condición $(i, j, k) \neq (i', j', k')$ implica que $G(i, m(i, j, k)) \neq G(i', m(i', j', k'))$.

En efecto, para la base de la recursión simplemente empleemos que $|\mathcal{D} \cap \mathcal{G}_0| = \omega$ para encontrar números naturales $m(0, 0, 0)$ y $m(0, 0, 1)$ tales que $G(0, m(0, 0, 0))$ y $G(0, m(0, 0, 1))$ son elementos distintos de $\mathcal{D}$. Ahora supongamos que para alguna $n < \omega$ hemos construido la colección $\{m(i, j, k) : i \leq n, j \leq n \wedge k < 2\}$ con las condiciones deseadas. Comencemos por definir la colección $\{m(i, n+1, k) : i \leq n \wedge k < 2\}$ por recursión finita sobre $n < \omega$.

Primero, como $|\mathcal{D} \cap \mathcal{G}_0| = \omega$, existen naturales $m(0, n+1, 0)$ y $m(0, n+1, 1)$ tales que $G(0, m(0, n+1, 0))$ y $G(0, m(0, n+1, 1))$ son elementos distintos de $\mathcal{D}$, y

$$\{G(i, m(i, j, k)) : i < n, j < n \wedge k < 2\} \cap \{G(0, m(0, n+1, k)) : k < 2\} = \emptyset.$$

Supongamos ahora que para alguna $l < n$ hemos obtenido $\{m(l, n+1, k) : i \leq l \wedge k < 2\}$ con las propiedades requeridas. En este caso, como $|\mathcal{D} \cap \mathcal{G}_{l+1}| = \omega$, existen naturales $m(l+1, n+1, 0)$ y $m(l+1, n+1, 1)$ tales que $G(l+1, m(l+1, n+1, 0))$ y $G(l+1, m(l+1, n+1, 1))$ son elementos distintos de $\mathcal{D}$, y

$$\begin{aligned} & (\{G(i, m(i, j, k)) : i < n, j < n \wedge k < 2\} \cup \{G(i, m(i, n+1, k)) : i \leq l \wedge k < 2\}) \cap \\ & \{G(l+1, m(l+1, n+1, k)) : k < 2\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Esto completa nuestra recursión.

Por último, como $|\mathcal{D} \cap \mathcal{G}_{n+1}| = \omega$, existe $\{m(n+1, j, k) : j \leq n+1 \wedge k < 2\}$ de tal forma que todos los conjuntos en $\{G(n+1, m(n+1, j, k)) : j \leq n+1 \wedge k < 2\}$ son elementos distintos de $\mathcal{D}$, y

$$\begin{aligned} & (\{G(i, m(i, j, k)) : i < n, j < n \wedge k < 2\} \cup \{G(i, m(i, n+1, k)) : i \leq n \wedge k < 2\}) \cap \\ & \{G(n+1, m(n+1, j, k)) : j \leq n+1 \wedge k < 2\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Así, es claro que la colección $\{m(i, j, k) : i \leq n+1, j \leq n+1 \wedge k < 2\}$ satisface las propiedades deseadas, lo cual termina la demostración de la Afirmación 2.

Para concluir definamos

$$A := \bigcup \{G(i, m(i, j, 0)) : i, j < \omega\} \quad \text{y} \quad B := \bigcup \{G(i, m(i, j, 1)) : i, j < \omega\}.$$

Evidentemente, $A \cup B \subseteq \alpha$. Además, como elementos distintos de $\mathcal{D}$ tienen intersección vacía, las condiciones (1) y (2) de la Afirmación 2 implican que A y B son ajenos. Finalmente, para cada $i < \omega$ se satisface que

$$\begin{aligned} \{m(i, j, 0) : j < \omega\} &\subseteq \{m < \omega : G(i, m) \subseteq A\} \text{ y} \\ \{m(i, j, 1) : j < \omega\} &\subseteq \{m < \omega : G(i, m) \subseteq B\}; \end{aligned}$$

en consecuencia, $\{m < \omega : G(i, m) \subseteq A\}$ y $\{m < \omega : G(i, m) \subseteq B\}$ son conjuntos infinitos. $\square$

Para el siguiente resultado es indispensable estar bien familiarizado con la notación previa al lema 3.6.6.

Lema 3.6.9. *Bajo CH, existen subconjuntos ajenos de $[\omega_1]^2$, K^0 y K^1 , que satisfacen las condiciones del lema 3.6.6.*

Demostración. La piedra angular de nuestra construcción yace en el siguiente enunciado.

Afirmación. Existen colecciones $\{L(\alpha, i) : (\alpha, i) \in \omega_1 \times 2\}$ y $\{M(\alpha, i) : (\alpha, i) \in \omega_1 \times 2\}$ que satisfacen las siguientes condiciones para cada $\alpha < \omega_1$:

1. $L(\alpha, 0) \neq \emptyset \neq L(\alpha, 1)$, $L(\alpha, 0) \cup L(\alpha, 1) \subseteq \alpha$ y $L(\alpha, 0) \cap L(\alpha, 1) = \emptyset$;
2. $M(\alpha, i) := \{\{\beta, \gamma\} : \beta < \alpha+1 \wedge \gamma \in L(\beta, i)\}$, y
3. si $\beta < \alpha$, $\bigcup \mathcal{F}_\beta \subseteq \alpha$, $F \subseteq \alpha \setminus \bigcup \mathcal{F}_\beta$ es finito y

$$W(\beta, \alpha, F, i) := \{n < \omega : [F(\beta, n) \cup F]^2 \subseteq (M(\alpha, i))_\alpha\}$$

es infinito, entonces

$$Z(\beta, \alpha, F, i) := \{n \in W(\beta, \alpha, F, i) : F(\beta, n) \subseteq (M(\alpha, i))(\alpha)\}$$

es infinito.

Supongamos que para alguna $\alpha < \omega_1$ hemos definido la colección $\{L(\beta, i) : (\beta, i) \in \alpha \times 2\}$ con las propiedades deseadas. Definamos una colección de ternas T mediante la siguiente regla: $(\beta, F, i) \in T$ si y sólo si $\beta < \alpha$, $i < 2$, $\bigcup \mathcal{F}_\beta \subseteq \alpha$, $F \subseteq \alpha \setminus \bigcup \mathcal{F}_\beta$ es finito y $W(\beta, \alpha, F, i)$ es infinito. Observemos que, como α es numerable y cada F es un subconjunto finito de un conjunto numerable, entonces T es un conjunto numerable. Para cada $(\beta, F, i) \in T$ sea $\mathcal{G}(\beta, F, i) := \{F(\beta, n) : n \in W(\beta, \alpha, F, i)\}$. Por el lema 3.6.8 aplicado a la familia $\{\mathcal{G}(\beta, F, i) : (\beta, F, i) \in T\}$ y al ordinal α , existen conjuntos ajenos $L(\alpha, 0)$ y $L(\alpha, 1)$ tales que $L(\alpha, 0) \cup L(\alpha, 1) \subseteq \alpha$ y, para cualquier terna $(\beta, F, i) \in T$, tanto $\{n \in W(\beta, \alpha, F, i) : F(\beta, n) \subseteq L(\alpha, 0)\}$ como $\{n \in W(\beta, \alpha, F, i) : F(\beta, n) \subseteq L(\alpha, 1)\}$ son infinitos.

Claramente la condición (1) se cumple. Definamos $M(\alpha, i)$ como indica (2) y demostremos que (3) también se verifica. Sean $\beta < \alpha$, $\bigcup \mathcal{F}_\beta \subseteq \alpha$ y $F \subseteq \alpha \setminus \bigcup \mathcal{F}_\beta$ finito con $W(\beta, \alpha, F, i)$ infinito. Para terminar esta parte de la prueba es suficiente demostrar la contención $\{n \in W(\beta, \alpha, F, i) : F(\beta, n) \subseteq L(\alpha, i)\} \subseteq Z(\beta, \alpha, F, i)$. Esto último es consecuencia de la inclusión $L(\alpha, i) \subseteq (M(\alpha, i))(\alpha)$.

Ahora, para cada $i < 2$ sea $K^i := \{\{\alpha, \beta\} : \alpha < \omega_1 \wedge \beta \in L(\alpha, i)\}$. Mostraremos a continuación que K^0 y K^1 son ajenos y satisfacen las condiciones del lema 3.6.6. Primero, si $\{\alpha, \beta\} \in K^0 \cap K^1$ entonces tendríamos dos casos: $\beta \in L(\alpha, i)$ para cada $i < 2$, lo cual es absurdo por la condición (1); o bien, $\alpha \in L(\beta, i)$ y $\beta \in L(\alpha, 1-i)$, no obstante, (1) implicaría que $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \alpha$, una contradicción una vez más. En resumen, $K^0 \cap K^1 = \emptyset$.

De ahora en adelante fijemos $i < 2$. Para verificar la condición (1) del lema 3.6.6 sea $\omega \leq \alpha < \omega_1$. Si β es un elemento de $L(\alpha, i)$ (véase el inciso (1) de la Afirmación), entonces como $\beta < \alpha$ se tiene que β pertenece a $(K^i)(\alpha)$; en particular, $(K^i)(\alpha) \neq \emptyset$.

En este momento conviene observar que para cualquier $\alpha < \omega_1$ se satisfacen las relaciones $(K^i)_\alpha = (M(\alpha, i))_\alpha$ y $(K^i)(\alpha) = (M(\alpha, i))(\alpha)$ (véase (2) en nuestra Afirmación). Finalmente, para demostrar la condición (2) del lema 3.6.6, sean $\beta < \alpha$, $\bigcup \mathcal{F}_\beta \subseteq \alpha$ y $F \subseteq \alpha \setminus \bigcup \mathcal{F}_\beta$ finito de tal modo que

$$W := \{n < \omega : [F(\beta, n) \cup F]^2 \subseteq (K^i)_\alpha\}$$

es infinito. Notemos ahora que la igualdad $(K^i)_\alpha = (M(\alpha, i))_\alpha$ implica que W coincide con $W(\beta, \alpha, F, i)$ y, por ende, el inciso (3) de la Afirmación constata que $Z(\beta, \alpha, F, i)$ es infinito. Para concluir la prueba basta observar que si

$$Z := \{n \in W : F(\beta, n) \subseteq (K^i)(\alpha)\},$$

entonces las relaciones $W(\beta, \alpha, F, i) = W$ y $(M(\alpha, i))(\alpha) = (K^i)(\alpha)$ implican que $Z = Z(\beta, \alpha, F, i)$; en particular, Z es infinito. $\square$

En suma, una combinación de los lemas 3.6.3, 3.6.6 y 3.6.7 implica el siguiente teorema.

Teorema 3.6.10. *En ZFC + CH, si K^0 y K^1 son como en el lema 3.6.9, entonces X_{K^0} y X_{K^1} son espacios de Hausdorff cero-dimensionales que tienen celularidad numerable, pero $X_{K^0} \times X_{K^1}$ no tiene celularidad numerable.*

Una consecuencia del teorema 3.6.10 es el resultado de Galvin que prometimos al principio de la sección.

Teorema 3.6.11. *(Galvin) Bajo CH existen espacios compactos de Hausdorff, cero-dimensionales y extremadamente desconexos X_0 y X_1 de tal forma que ambos tienen celularidad numerable, pero $X_0 \times X_1$ no tiene celularidad numerable.*

Demostración. Sean $X_0 := G(X_{K^0})$ y $X_1 := G(X_{K^1})$, donde X_{K^0} y X_{K^1} son como en el teorema 3.6.10. Resulta que tanto X_0 como X_1 son espacios compactos de Hausdorff, cero-dimensionales y extremadamente desconexos. También, como X_{K^0} y X_{K^1} tienen celularidad numerable, la proposición 3.4.3(2) indica que X_0 y X_1 también tienen celularidad numerable. Finalmente, el lema 3.4.7 asegura que $X_0 \times X_1$ no tiene celularidad numerable. $\square$

Además, como se menciona en [60, Corollary, p. 180], con el teorema 3.6.11 disponible es posible construir un sólo espacio que tenga todas las propiedades deseadas.

Teorema 3.6.12. *CH implica la existencia de un espacio compacto de Hausdorff, cero-dimensional, extremadamente desconexo con celularidad numerable y tal que su cuadrado no tiene celularidad numerable.*

Demostración. Sea X la suma topológica $G(X_0) \oplus G(X_1)$, donde X_0 y X_1 son como en el teorema 3.6.11. Resulta que X es un espacio compacto de Hausdorff, cero-dimensional, extremadamente desconexo con celularidad numerable porque $G(X_0)$ y $G(X_1)$ lo son (véanse el lema 1.4.2, la proposición 2.4.1 y la proposición 3.4.3(2)). Para terminar observemos que X^2 no tiene celularidad numerable porque $G(X_0) \times G(X_1)$ es homeomorfo a un subespacio abierto de él y $G(X_0) \times G(X_1)$ no tiene celularidad numerable (véanse la proposición 2.1.9(1) y el lema 3.4.7). $\square$

En particular, el teorema 3.6.12 responde de cierta forma la pregunta 3.2.5:

Corolario 3.6.13. *CH implica $\neg A(\omega_1)$.*

Además, una combinación del teorema 2.5.6, el corolario 3.1.2(1) y el teorema 3.6.12 produce un resultado más:

Corolario 3.6.14. *CH produce un espacio compacto de Hausdorff, cero-dimensional, extremadamente desconexo con celularidad numerable y que no tiene la propiedad (K) .*

Así, el corolario 3.6.14 ofrece una respuesta negativa consistente a la pregunta 3.2.1. Finalmente conviene destacar que Argyros, Mercourakis y Negrepontis encontraron en [2, Theorem 2.3, p. 207], bajo CH, un compacto de Corson X (es decir, un subespacio compacto de un Σ -producto de rectas reales) con celularidad numerable y cuadrado no ccc; en especial, X no tiene la propiedad (K) .

3.7. El Problema de Souslin

Esta breve sección es principalmente de carácter informativo y tiene como objetivo comentar brevemente la relación que tiene el Problema de Souslin con el material expuesto en el presente capítulo. Nuestra intención es explicar de manera concisa esta conexión y proveer referencias suficientes para nuestros lectores en caso de que estén interesados en profundizar más por su cuenta.

Una de las caracterizaciones famosas de los números reales es por medio de sus propiedades de orden y se debe a Cantor. Este resultado indica que si $(X, \leq_X)$ es un orden lineal, denso en sí mismo, separable, completo y no acotado, entonces $(X, \leq_X)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}, \leq)$. Estos conceptos y una prueba elegante de este teorema que emplea el Lema de Rasiowa-Sikorski se pueden hallar en [48].

En virtud del teorema anterior, una cuestión natural que surge es si podemos debilitar la hipótesis de separabilidad y pedir únicamente que $(X, \leq_X)$ satisfaga la ccc para obtener la misma conclusión. Esta pregunta fue hecha originalmente por Souslin en [73] y es conocida como el *Problema de Souslin*. A los contraejemplos para el Problema de Souslin (es decir, a los órdenes lineales, densos en sí mismos, ccc, completos y no acotados que no son isomorfos a los números reales) se les conoce como *líneas de Souslin*. La *Hipótesis de Souslin*, comúnmente abreviada como SH, es el enunciado: «no existen líneas de Souslin».

Un resultado notable que estableció por primera vez el matemático croata Kurepa en [44] es que, si X es una línea de Souslin, entonces el producto topológico X^2 no tiene celularidad numerable. A continuación expondremos una prueba sencilla de este enunciado.

Teorema 3.7.1. *Si X es una línea de Souslin, entonces X^2 no tiene celularidad numerable.*

Demostración. Nuestras hipótesis son que existe un orden lineal $\leq_X$ en X que lo convierte en un espacio topológico linealmente ordenado con celularidad numerable y no separable. Construiremos por recursión transfinita sobre ω_1 sucesiones $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq X$, $\{y_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq X$ y $\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq X$ con las siguientes características para cualquier $\alpha < \omega_1$:

1. $x_\alpha <_X y_\alpha <_X z_\alpha$;

2. $(x_\alpha, y_\alpha) \neq \emptyset \neq (y_\alpha, z_\alpha)$, y
3. si $\beta < \alpha$, entonces $y_\beta \notin (x_\alpha, z_\alpha)$.

Observemos primero que $A := \{x \in X : \{x\} \in \tau_X\}$ es numerable porque X tiene celularidad numerable. Ahora, supongamos que para alguna $\alpha < \omega_1$ hemos construido $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$, $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\{z_\beta : \beta < \alpha\}$ con las propiedades deseadas. En virtud de que $A \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$ no es denso en X por ser un conjunto numerable en un espacio no separable, existen $x_\alpha, z_\alpha \in X$ con $(x_\alpha, z_\alpha) \neq \emptyset$ y $(x_\alpha, z_\alpha) \cap (A \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}) = \emptyset$. De esta manera, como (x_α, z_α) es infinito porque es no vacío y no tiene puntos aislados, existe $y_\alpha \in (x_\alpha, z_\alpha)$ con $(x_\alpha, y_\alpha) \neq \emptyset \neq (y_\alpha, z_\alpha)$.

Para finalizar, resulta que $\{(x_\alpha, y_\alpha) \times (y_\alpha, z_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular de cardinalidad ω_1 en X^2 ; en consecuencia, X^2 no tiene celularidad numerable. $\square$

En especial, podemos deducir a partir de este resultado que el enunciado $A(\omega_1)$ implica SH y que $\neg$ SH contesta negativamente la pregunta 3.2.1.

Por otro lado, el mismo Kurepa comenzó el estudio sistemático de las estructuras de orden conocidas como *árboles* en [43]. En este artículo demostró que la existencia de una línea de Souslin es equivalente a la existencia de un tipo especial de árbol denominado *árbol de Souslin*. Resta comentar que Jensen demostró en [34] que, mediante el uso del principio combinatorio *Diamante*, $\diamond$, se puede construir un árbol de Souslin; en otras palabras, $\diamond$ implica $\neg$ SH. Una exposición sucinta de este hecho se puede encontrar [41, Theorem 7.8, p. 82].

En particular, se infiere de los párrafos previos que el enunciado SH es también independiente de ZFC. Las personas que quieran profundizar en el tema pueden comenzar con la lectura de [40, Cap. III, § 2] y [41, Cap. II, § 4].

4

Grupos topológicos y espacios de Šanin

Una de las estructuras topologico-algebraicas fundamentales es, claro está, la de grupo topológico; es decir, una terna $(G, \cdot, \tau)$ en donde $(G, \cdot)$ es un grupo abstracto y τ es una topología en G que hace continuas las operaciones $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ y $x \rightarrow x^{-1}$.

En este capítulo se analizan los calibres y precalibres en grupos topológicos. Demostramos el teorema de Arkhangels'kii-Tkachenko el cual determina los precalibres débiles de los grupos topológicos Lindelöf Σ . Para ello empleamos herramientas combinatorios obtenidas del teorema de Ramsey $\omega \rightarrow (\omega)_k^r$, y del teorema de Ęrdos-Dushnik-Miller $\kappa \rightarrow (\kappa, \omega)^2$.

Además, en este capítulo, nos adentramos en el estudio más cuidadoso de espacios de Šanin resolviendo cuándo un espacio de Gleason y una compactación de Stone-Ćech son espacios de Šanin.

Finalmente, analizamos las relaciones entre calibres y densidad, y en particular discutimos sobre la separabilidad en espacios de Šanin.

4.1. Precalibres débiles en grupos topológicos

A lo largo de este trabajo hemos ofrecido varios ejemplos de espacios topológicos X tales que algún cardinal κ satisface ser un precalibre pero no un calibre para X . Una pregunta natural es si es factible hacer lo propio con precalibres y precalibres débiles, es decir, ¿será posible construir un ejemplo de un espacio topológico X de tal modo que un cardinal κ es un precalibre débil pero no un precalibre para X ? Esta cuestión resulta ser independiente de ZFC en el caso de ω_1 .

Por un lado, vimos en el corolario 3.5.6 que, bajo $\text{MA}(\omega_1)$, un espacio topológico tiene precalibre ω_1 si y sólo si tiene la propiedad (K) (esto es, precalibre débil ω_1). Por esta razón, $\text{MA}(\omega_1)$ implica que los conceptos “precalibre ω_1 ” y “precalibre débil ω_1 ” son equivalentes. Por otro lado, Kunen y Tall demostraron en [42] que, bajo CH, el

espacio de Stone sobre el álgebra de medida reducida formada por los subconjuntos Lebesgue medibles del intervalo $[0, 1]$, módulo los conjuntos de medida cero, es un espacio compacto y T_2 que posee la propiedad (K) , pero no tiene precalibre ω_1 .

Un resultado famoso que Tkachenko demostró en [80] establece que todos los grupos topológicos σ -compactos tienen celularidad numerable. En los siguientes párrafos expondremos la demostración de un resultado más fuerte también debido a él. Esta sección está dedicada a demostrar que si G es un grupo topológico Lindelöf Σ y H es un subgrupo de G , entonces $WP(H) = UC$. Alcanzaremos este objetivo mediante una combinación adecuada del material expuesto en la sección 2.1, la sección 5.4 de [6] y la sección 4 de [79].

Un *grupo topológico* es una terna $(G, \cdot, \tau)$ donde $(G, \cdot)$ es un grupo algebraico, (G, τ) es un espacio topológico y tanto la operación $\cdot : G \times G \rightarrow G$ como la función $G \rightarrow G$ dada por $g \mapsto g^{-1}$ son funciones continuas.

Por otra parte, si X es un espacio de Tychonoff y βX es su compactación de Stone-Čech (véase [91]), diremos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de βX *separa* a X de $\beta X \setminus X$ si para cualesquiera $x \in X$ y $y \in \beta X \setminus X$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \in F$ y $y \notin F$.

Definición 4.1.1. Un espacio de Tychonoff X es *Lindelöf Σ* si existe una familia numerable $\mathcal{F}$ formada por subconjuntos compactos de βX que separa a X de $\beta X \setminus X$ (véase [86]).

Por ejemplo, es claro que todos los espacios σ -compactos son Lindelöf Σ : si $\{K_n : n < \omega\}$ es una descomposición en conjuntos compactos de un espacio de Tychonoff X , entonces $\{K_n : n < \omega\}$ es una familia numerable de compactos en βX que separa a X de $\beta X \setminus X$.

Ahora necesitamos hacer un breve intermedio de combinatoria de conjuntos.

Definición 4.1.2. Si κ, λ, μ y ν son números cardinales, la relación $\kappa \rightarrow (\lambda)_{\nu}^{\mu}$ significa que para todo conjunto X de cardinalidad κ y cualquier función $f : [X]^{\mu} \rightarrow \nu$, existe un conjunto $Y \in [X]^{\lambda}$ de tal manera que $f \upharpoonright_{[Y]^{\mu}}$ es constante.

Uno de los resultados más conocidos en esta área es el Teorema de Ramsey (véase [22, Theorem 10.2, p. 66]):

Teorema 4.1.3. Si r y k son enteros positivos, entonces $\omega \rightarrow (\omega)_k^r$.

Otro resultado más es el Teorema de Erdős-Dushnik-Miller y su demostración se puede consultar en [22, Theorem 11.1, p. 70]:

Teorema 4.1.4. Si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa \rightarrow (\kappa, \omega)^2$; es decir, para cualquier conjunto X de cardinalidad κ y para cualquier función $f : [X]^2 \rightarrow 2$, existe un conjunto $Y \in [X]^{\omega}$ de tal forma que $f \upharpoonright_{[Y]^2} = \{0\}$, o bien, existe un conjunto $Z \in [X]^{\kappa}$ con la propiedad de que $f \upharpoonright_{[Z]^2} = \{1\}$.

Por último, recordemos que si X es un conjunto, $x \in X$ y $\mathcal{C}$ es una cubierta de X , entonces la *estrella* de x con respecto a $\mathcal{C}$ es el conjunto $\text{st}(x, \mathcal{C}) := \bigcup \{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$. Con estos conceptos y resultados auxiliares, estamos listos para comenzar.

Lema 4.1.5. *Sean X un conjunto y $n < \omega$. Si $\{x_m : m < \omega\}$ es un subconjunto de X y $\{\mathcal{C}_m : m < \omega\}$ es una sucesión de cubiertas para X con $|\mathcal{C}_m| \leq n$, siempre que $m < \omega$, entonces existe $J \in [\omega]^\omega$ tal que, para cualesquiera $r, s, t \in J$ con $r < s < t$, se satisface que $x_s \in \text{st}(x_r, \mathcal{C}_t) \cap \text{st}(x_t, \mathcal{C}_r)$.*

Demostración. Para cada $m < \omega$ sea $\{C(m, i) : i < n\}$ una enumeración de $\mathcal{C}_m$. Dados $\{r, s\} \in [\omega]^2$ con $r < s$, definamos $f(\{r, s\}) = (i, j)$ si $x_r \in C(s, i)$ y $x_s \in C(r, j)$. El teorema 4.1.3 aplicado a la función $f : [\omega]^2 \rightarrow n \times n$ genera $(i, j) \in n \times n$ y $J \in [\omega]^\omega$ tal que $f[[J]^2] = \{(i, j)\}$. Sean $r < s < t$ elementos arbitrarios de J . Las condiciones $f(\{r, s\}) = (i, j)$, $f(\{s, t\}) = (i, j)$ y $f(\{r, t\}) = (i, j)$ implican que $x_s \in C(r, j)$, $x_s \in C(t, i)$, $x_r \in C(t, i)$ y $x_t \in C(r, j)$. De esta manera, concluimos que $x_s \in C(t, i) \cap C(r, j) \subseteq \text{st}(x_r, \mathcal{C}_t) \cap \text{st}(x_t, \mathcal{C}_r)$. $\square$

Lema 4.1.6. *Sean X un espacio Lindelöf Σ y κ un cardinal con $\text{cf}(\kappa) > \omega$. Si $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de X y $\{\mathcal{C}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas para X , entonces existe $J \in [\kappa]^\kappa$ de tal forma que $\text{st}(x_\alpha, \mathcal{C}_\beta) \cap \text{st}(x_\beta, \mathcal{C}_\alpha) \neq \emptyset$, siempre que $\alpha, \beta \in J$ sean distintos.*

Demostración. Fijemos una familia numerable $\mathcal{F}$ formada por subconjuntos compactos de βX que separa a X de $\beta X \setminus X$ y supongamos, sin perder generalidad, que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $\mathcal{D}_\alpha$ un subconjunto de $\tau_{\beta X}$ tal que $\mathcal{C}_\alpha = \{U \cap X : U \in \mathcal{D}_\alpha\}$.

Afirmación 1. Para cada $\alpha < \kappa$ existe $F_\alpha \in \mathcal{F}$ con $x_\alpha \in F_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{D}_\alpha$.

Sea $\alpha < \kappa$. Para toda $y \in \beta X \setminus X$ existe $F_y \in \mathcal{F}$ de tal forma que $x_\alpha \in F_y$ y $y \in X \setminus F_y$. Así, como $\mathcal{C}_\alpha \cup \{X \setminus F_y : y \in \beta X \setminus X\}$ cubre al compacto βX , existe $G \in [\beta X \setminus X]^{<\omega}$ con $\beta X \setminus X \subseteq \bigcup \{X \setminus F_y : y \in G\}$. En consecuencia, $F_\alpha = \bigcap \{F_y : y \in G\}$ es un elemento de $\mathcal{F}$ tal que $x_\alpha \in F_\alpha \subseteq X = \bigcup \mathcal{C}_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{D}_\alpha$.

Ahora, como $\text{cf}(\kappa) > \omega$, la asignación $\kappa \rightarrow \mathcal{F}$ definida mediante $\alpha \mapsto F_\alpha$ tiene una fibra de tamaño κ ; es decir, existen $F \in \mathcal{F}$ y $J \in [\kappa]^\kappa$ con $F_\alpha = F$, siempre que $\alpha \in J$. En vista de esto podemos suponer, sin perder generalidad, que $J = \kappa$.

Luego, como F es un subconjunto compacto de βX , para cada $\alpha < \kappa$ existe $\mathcal{E}_\alpha \in [\mathcal{D}_\alpha]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq \bigcup \mathcal{E}_\alpha$. Adicionalmente, como la condición $\text{cf}(\kappa) > \omega$ implica que la función $\kappa \rightarrow \omega$ definida mediante $\alpha \mapsto |\mathcal{E}_\alpha|$ tiene una fibra de cardinalidad κ , podemos suponer sin perder generalidad que existe $n < \omega$ con $|\mathcal{E}_\alpha| = n$ siempre que $\alpha < \kappa$.

Por esta razón, le podemos aplicar el lema 4.1.5 a las colecciones $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $\{\mathcal{E}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ para asegurar lo siguiente:

Afirmación 2. Para cualquier $I \in [\kappa]^\omega$, existe $J \in [I]^\omega$ tal que $x_\beta \in \text{st}(x_\alpha, \mathcal{E}_\gamma) \cap \text{st}(x_\gamma, \mathcal{E}_\alpha)$, siempre que $\alpha, \beta, \gamma \in J$ satisfagan $\alpha < \beta < \gamma$.

Para terminar, consideremos la función $f : [\kappa]^2 \rightarrow 2$ dada por $f(\{\alpha, \beta\}) := 0$ si y sólo si $\text{st}(x_\alpha, \mathcal{E}_\beta) \cap \text{st}(x_\beta, \mathcal{E}_\alpha) = \emptyset$. El teorema 4.1.4 garantiza que existe un conjunto $I \in [\kappa]^\omega$ de tal forma que $f[I]^2 = \{0\}$, o bien, existe un conjunto $J \in [\kappa]^\kappa$ con la propiedad de que $f[J]^2 = \{1\}$. Sin embargo, como la Afirmación 2 garantiza que el primer caso no puede suceder, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $\text{st}(x_\alpha, \mathcal{E}_\beta) \cap \text{st}(x_\beta, \mathcal{E}_\alpha) \neq \emptyset$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in J$ distintos.

Finalmente, si $\alpha, \beta \in J$ cumplen $\alpha \neq \beta$, la condición $\text{st}(x_\alpha, \mathcal{E}_\beta) \cap \text{st}(x_\beta, \mathcal{E}_\alpha) \neq \emptyset$, combinada con la densidad de X en βX , implica la existencia de $x \in \text{st}(x_\alpha, \mathcal{E}_\beta) \cap \text{st}(x_\beta, \mathcal{E}_\alpha) \cap X$. De esta manera, existen $U_\beta \in \mathcal{E}_\beta \subseteq \mathcal{D}_\beta$ y $U_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha \subseteq \mathcal{D}_\alpha$ tales que $\{x, x_\beta\} \subseteq U_\beta$ y $\{x, x_\alpha\} \subseteq U_\alpha$. Así, como se satisfacen las pertenencias $U_\beta \cap X \in \mathcal{E}_\beta$ y $U_\alpha \cap X \in \mathcal{E}_\alpha$, concluimos que $x \in \text{st}(x_\alpha, \mathcal{E}_\beta) \cap \text{st}(x_\beta, \mathcal{E}_\alpha)$. $\square$

Con este par de lemas preliminares, estamos listos para presentar el teorema central de esta sección.

Teorema 4.1.7. (Arhangel'skiĭ-Tkachenko) Si G es un grupo topológico Lindelöf Σ , entonces $\text{WP}(G) = \text{UC}$.

Demostración. Primero, la inclusión $\text{WP}(G) \subseteq \text{UC}$ se sigue del corolario 2.2.9. Para verificar la contención restante, tomemos un cardinal κ con $\text{cf}(\kappa) > \omega$, $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de τ_G^+ , para cada $\alpha < \kappa$, un punto $x_\alpha \in U_\alpha$. Consideremos la función continua $f : G^3 \rightarrow G$ definida mediante $f(x, y, z) := x y^{-1} z$.

Afirmación. Para toda $\alpha < \kappa$, existe una cubierta abierta $\mathcal{C}_\alpha$ de G de tal modo que si $y, z \in U$ para $U \in \mathcal{C}_\alpha$, entonces $\{f(x_\alpha, y, z), f(y, z, x_\alpha)\} \subseteq U_\alpha$.

En efecto, sean $\alpha < \kappa$ y $x \in G$. La condición $\{f(x_\alpha, x, x), f(x, x, x_\alpha)\} \subseteq U_\alpha$ combinada con la continuidad de f implica que existen colecciones de abiertos $\{V_\alpha^i(x) : i < 3\}$ y $\{W_\alpha^i(x) : i < 3\}$ con

$$\begin{aligned} (x_\alpha, x, x) &\in V_\alpha^0(x) \times V_\alpha^1(x) \times V_\alpha^2(x) \text{ y } f[V_\alpha^0(x) \times V_\alpha^1(x) \times V_\alpha^2(x)] \subseteq U_\alpha \text{ y} \\ (x, x, x_\alpha) &\in W_\alpha^0(x) \times W_\alpha^1(x) \times W_\alpha^2(x) \text{ y } f[W_\alpha^0(x) \times W_\alpha^1(x) \times W_\alpha^2(x)] \subseteq U_\alpha. \end{aligned}$$

Luego, si hacemos

$$V(x) := V_\alpha^0(x) \cap W_\alpha^2(x) \text{ y } W(x) := V_\alpha^1(x) \cap V_\alpha^2(x) \cap W_\alpha^0(x) \cap W_\alpha^1(x),$$

entonces es claro que $x_\alpha \in V(x)$, $x \in W(x)$ y

$$f[V(x) \times W(x) \times W(x)] \cup f[W(x) \times W(x) \times V(x)] \subseteq U_\alpha;$$

en especial, si $y, z \in W(x)$, entonces $\{f(x_\alpha, y, z), f(y, z, x_\alpha)\} \subseteq U_\alpha$. De este modo, $\mathcal{C}_\alpha := \{W(x) : x \in G\}$ satisface las propiedades deseadas.

Por el lema 4.1.6, podemos hallar $J \in [\kappa]^\kappa$ con $\text{st}(x_\alpha, \mathcal{C}_\beta) \cap \text{st}(x_\beta, \mathcal{C}_\alpha) \neq \emptyset$, siempre que $\alpha, \beta \in J$ son distintos. Finalmente, si $\alpha, \beta \in J$ son diferentes y $x \in \text{st}(x_\alpha, \mathcal{C}_\beta) \cap \text{st}(x_\beta, \mathcal{C}_\alpha)$, entonces existen $U \in \mathcal{C}_\alpha$ y $V \in \mathcal{C}_\beta$ tales que $x, x_\beta \in U$ y $x_\alpha, x \in V$; en consecuencia, $f(x_\alpha, x, x_\beta) \in U_\alpha \cap U_\beta$.

En suma, $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia ligada, lo cual termina la demostración de que κ es un precalibre débil para G . $\square$

Corolario 4.1.8. *Si G es un grupo topológico Lindelöf Σ y H es un subgrupo de G , entonces $\text{WP}(H) = \text{UC}$.*

Demostración. Con nuestras hipótesis se satisfacen las siguientes dos condiciones: H es un subconjunto denso de $\bar{H}$ y $\bar{H}$ es un subgrupo cerrado de G ; en especial, $\bar{H}$ es Lindelöf Σ (véase [86, Proposition 2, p. 226]). De este modo, la proposición 2.1.6 y el teorema 4.1.7 constatan que $\text{WP}(H) = \text{WP}(\bar{H}) = \text{UC}$. $\square$

A la luz del teorema 4.1.7, surge la siguiente pregunta natural: ¿es cierto que todo cardinal con cofinalidad no numerable es un precalibre de cualquier grupo topológico Lindelöf Σ ?; dicho de otro modo, ¿es cierto que $\text{P}(G) = \text{UC}$, siempre que G es un grupo topológico Lindelöf Σ ?

Con la cuestión anterior en mente, consideremos el caso más sencillo concerniente a ω_1 . Mencionamos al principio de la sección que en presencia del Axioma de Martin para ω_1 , $\text{MA}(\omega_1)$, los conceptos “precalibre ω_1 ” y “precalibre débil ω_1 ” coinciden (véase el corolario 3.5.6). En especial, como ω_1 es un precalibre débil para cualquier grupo topológico σ -compacto deducimos que, bajo $\text{MA}(\omega_1)$, todos los grupos topológicos Lindelöf Σ tienen precalibre ω_1 .

Por otra parte, si $\alpha D(\omega_1)$ es la compactación por un punto del espacio discreto $D(\omega_1)$ y $A(\alpha D(\omega_1))$ es el grupo abeliano libre sobre ésta, entonces $A(\alpha D(\omega_1))$ es un grupo topológico σ -compacto (véase [46, Corollary 1, p. 305]). Más aún, Shakhmatov demostró en [70] que si $V[G]$ es una extensión genérica de un modelo de ZFC obtenida por medio del orden parcial $\text{Fn}(\omega_1, \omega)$, entonces en el modelo $V[G]$ se satisface que ω_1 no es un precalibre para $A(\alpha D(\omega_1))$. En consecuencia, el enunciado “todo grupo topológico Lindelöf Σ tiene precalibre ω_1 ” es independiente de ZFC.

4.2. Propiedades de los espacios de Šanin

En el capítulo 2 presentamos muchos resultados al respecto del comportamiento de los calibres en los espacios topológicos en general. Lo que haremos en las siguientes páginas es recopilar algunas propiedades que tienen aquellos espacios con una amplia colección de calibres; concretamente, los espacios de Šanin.

Definición 4.2.1. Un espacio topológico X es un *espacio de Šanin* si satisface la inclusión $UR \subseteq C(X)$. Similarmente, diremos que X es un *espacio fuertemente Šanin* si verifica la contención $UC \subseteq C(X)$.

La pregunta inmediata que surge a partir de la definición anterior es si estos conceptos coinciden. Resulta que si el π -peso del espacio está convenientemente acotado la respuesta a esta cuestión es afirmativa. El siguiente enunciado es una consecuencia de la proposición 2.2.3.

Proposición 4.2.2. Si X es un espacio de Šanin, entonces

$$UR \cup \{\kappa \in \mathbb{CN} : \kappa > \pi w(X) \wedge \text{cf}(\kappa) > \omega\} \subseteq C(X).$$

En especial, cuando $\pi w(X) < \aleph_{\omega_1}$, X es fuertemente Šanin.

No obstante, es posible construir muchos ejemplos de espacios de Šanin que no son fuertemente Šanin.

Ejemplo 4.2.3. Si Γ es un conjunto de cardinales singulares, entonces existe un espacio de Hausdorff X_Γ de tal modo que $C(X_\Gamma) = \{\kappa \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\kappa) > \omega \wedge \kappa \notin \Gamma\}$. En especial, X_Γ es un espacio de Šanin que no es fuertemente Šanin.

Demostración. Consideremos al espacio X_Γ como en el ejemplo 2.6.7. En vista de que $C(X_\Gamma) = \{\kappa \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\kappa) > \omega \wedge \kappa \notin \Gamma \wedge \text{cf}(\kappa) \notin \Gamma\}$, únicamente necesitamos recordar que un cardinal singular no puede ser la cofinalidad de algún cardinal infinito para concluir que X_Γ satisface las propiedades deseadas. $\square$

Las clases de los espacios de Šanin y fuertemente Šanin han revelado tener mucha estabilidad. A continuación reunimos varios resultados que hemos demostrado indirectamente en las secciones 2.1–2.5. Por ejemplo, el siguiente resultado se deduce a partir de las proposiciones 2.1.6, 2.1.9, 2.1.11 y 2.1.12.

Proposición 4.2.4. Los siguientes enunciados son ciertos.

1. Si un espacio topológico admite un subespacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin) denso, entonces el espacio también tiene la misma característica.
2. Todos los subespacios abiertos de un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin) son un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin).
3. Cualquier subespacio cerrado regular de un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin) es un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin).
4. Para un espacio topológico X , las siguientes propiedades son equivalentes:

- (a) X es de Šanin (resp., fuertemente Šanin);
- (b) cualquier subconjunto ω -denso de X es de Šanin (resp., fuertemente Šanin),
y
- (c) existe un subconjunto ω -denso de X que es de Šanin (resp., fuertemente Šanin).

Además, sabemos que la propiedad de Šanin también se pierde en ciertos casos. Con respecto a los subconjuntos densos, el ejemplo 2.5.8 muestra que, para cualquier cardinal regular y no numerable κ , el cubo de Cantor $D(2)^\kappa$ es un espacio fuertemente Šanin que admite un subespacio denso y numerablemente compacto X_κ con $\kappa \notin C(X_\kappa)$; en especial, X_κ no es un espacio de Šanin.

Por otra parte, el siguiente resultado se verifica gracias a las proposiciones 2.1.7 y 2.1.8.

Proposición 4.2.5. *Cada espacio separable es fuertemente Šanin y todos los espacios de Šanin tienen celularidad numerable.*

Con la proposición 4.2.5 podemos argumentar que la propiedad de Šanin tampoco se hereda a los subconjuntos compactos. Por ejemplo, la compactación de Stone-Čech de los números naturales, $\beta\omega$, es un espacio fuertemente Šanin por ser separable. Sin embargo, en [91, Theorem, p. 144] se prueba que el residuo, $\beta\omega \setminus \omega$, admite una familia celular de cardinalidad $\mathfrak{c}$; en consecuencia, $\omega_1 \in C(\beta\omega) \setminus C(\beta\omega \setminus \omega)$ (véase la proposición 2.1.7), lo cual muestra que $\beta\omega \setminus \omega$ no es un espacio de Šanin.

Además, la propiedad de Šanin no se hereda a los subespacios cerrados y discretos; verbigracia, el plano de Sorgenfrey $\mathbb{S}^2$ es un espacio separable (por ende, fuertemente Šanin) y la antidiagonal A es un subespacio cerrado y discreto de $\mathbb{S}^2$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$. De este modo, la relación $C(A) = \{\kappa \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\kappa) > \mathfrak{c}\}$ (véase el ejemplo 5.2.1) implica que A no tiene calibre ω_1 ; en consecuencia, A no es un espacio de Šanin.

Con respecto a las funciones entre espacios topológicos, los siguientes resultados de preservación se desprenden de la proposición 2.5.1.

Proposición 4.2.6. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función entre espacios topológicos, entonces los siguientes enunciados se verifican.*

1. Si X es un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin) y f es función continua y suprayectiva, entonces Y es un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin).
2. Cuando Y es un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin) y f es una función abierta e inyectiva, X es un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin).

Para sumas topológicas, la proposición 2.4.3 implica el siguiente resultado.

Proposición 4.2.7. *Si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una colección de espacios, entonces la suma topológica $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ es un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin) si y sólo si $\lambda \leq \omega$ y cada sumando es un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin).*

Con respecto a los productos topológicos, tenemos que explicar ambos resultados por separado porque las demostraciones difieren ligeramente.

Proposición 4.2.8. *Si λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios, entonces el producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ es un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin) si y sólo si cada factor es un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin).*

Demostración. La implicación directa en ambos resultados es cierta en virtud de la proposición 4.2.6 puesto que las proyecciones canónicas son continuas y suprayectivas. La implicación recíproca en el caso de los espacios de Šanin es consecuencia del teorema 2.5.5. Finalmente, si cada factor es fuertemente Šanin, los calibres regulares se preservan en el producto gracias al teorema 2.5.5 y, si $\kappa \in \text{UC}$ es singular, entonces las hipótesis del teorema 2.5.11 se satisfacen, lo cual implica que κ es un calibre para $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$. $\square$

Adicionalmente, si a los espacios fuertemente Šanin les imponemos la propiedad de Hausdorff obtenemos un resultado que vale la pena mencionar.

Proposición 4.2.9. *Sea X un espacio fuertemente Šanin, infinito y T_2 . Si λ es un número cardinal y D es un subconjunto denso de X^λ , entonces*

1. $C(X^\lambda) = P(X^\lambda) = \text{WP}(X^\lambda) = \text{UC}$ y
2. $P(D) = \text{WP}(D) = \text{UC}$.

Demostración. Nuestras hipótesis garantizan que X^λ es un espacio de Hausdorff infinito; por ende, el corolario 2.2.9 garantiza que $\text{WP}(X^\lambda) \subseteq \text{UC}$. Por otra parte, la proposición 4.2.8 constata que $\text{UC} \subseteq C(X^\lambda)$. Finalmente, el inciso (2) es consecuencia de la proposición 2.1.6 y el corolario 2.2.9. $\square$

Finalmente, cualquier subespacio denso de cualquier potencia de la recta real $\mathbb{R}$ satisface las igualdades del inciso (2) de la proposición 4.2.9. En especial, si denotamos por $C_p(X)$ a la familia de funciones continuas de un espacio de Tychonoff X en $\mathbb{R}$ equipado con la topología de la convergencia puntual, un resultado clásico de C_p -teoría garantiza que $C_p(X)$ es un subespacio denso de $\mathbb{R}^X$ (véase [4, Proposition 3.3.6, p. 9]). En suma, la siguiente proposición es verdadera.

Proposición 4.2.10. *Si X es un espacio de Tychonoff, entonces*

1. $C(\mathbb{R}^X) = P(\mathbb{R}^X) = \text{WP}(\mathbb{R}^X) = \text{UC}$ y
2. $P(C_p(X)) = \text{WP}(C_p(X)) = \text{UC}$.

4.3. Ejemplos de espacios de Šanin

Una clase amplia de espacios que está incluida en los espacios fuertemente Šanin es la clase de los compactos diádicos. Recordemos que un espacio de Hausdorff X es un *compacto diádico* si es imagen continua de un cubo de Cantor $D(2)^\kappa$.

Proposición 4.3.1. *Si X es un compacto diádico, entonces $C(X) = P(X) = WP(X) = UC$. En especial, X es un espacio fuertemente Šanin.*

Demostración. Supongamos que X es imagen continua del cubo $D(2)^\kappa$. El inciso (2) del ejemplo 2.5.8 garantiza que $D(2)^\kappa$ es fuertemente Šanin. Así, la proposición 4.2.6 asegura la contención $UC \subseteq C(X)$. Para terminar, la inclusión $WP(X) \subseteq UC$ se sigue de que X es infinito y T_2 (véase el corolario 2.2.9). $\square$

Con el material que hemos expuesto hasta el momento no es difícil construir espacios de Šanin y fuertemente Šanin. Por ejemplo, es inmediato que el espacio de Gleason (véase la sección 3.4) sobre un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin) es nuevamente un espacio de Šanin (resp., fuertemente Šanin) que además es compacto, T_2 , cero-dimensional y extremadamente disconexo (véase la proposición 3.4.3(4) más adelante). En consecuencia, el siguiente enunciado es cierto.

Proposición 4.3.2. *Si X es un espacio de Šanin (fuertemente Šanin), entonces $G(X)$ es un espacio Šanin (fuertemente Šanin).*

Otra forma para obtener espacios de Šanin y fuertemente Šanin es a través de compactaciones de espacios T_2 con una amplia cantidad de precalibres. Nuestro siguiente resultado es consecuencia las proposiciones 2.1.6 y 2.3.2.

Proposición 4.3.3. *Sea γX una compactación Hausdorff de un espacio de Tychonoff X .*

1. *Si $UR \subseteq P(X)$, entonces γX es un espacio de Šanin.*
2. *Cuando $UC \subseteq P(X)$, γX es fuertemente Šanin.*

Demostramos en la proposición 4.2.10 que si X es cualquier espacio topológico, entonces su espacio de funciones continuas realvaluadas, $C(X)$, visto como subespacio de $\mathbb{R}^X$ satisface que $P(C_p(X)) = UC$. De este modo, como todos los espacios $C_p(X)$ son espacios de Tychonoff, el siguiente corolario se desprende a partir de la proposición 4.3.3.

Corolario 4.3.4. *Si X es un espacio topológico, entonces $\beta(C_p(X))$ es fuertemente Šanin.*

En virtud de que todos los espacios de Šanin tienen celularidad numerable (véase la proposición 4.2.5), es natural preguntarse si la implicación recíproca también es válida; es decir, ¿es cierto que todos los espacios con celularidad numerable son espacios de Šanin? La respuesta es negativa: el espacio $\Sigma_\omega(\omega_1)$ del ejemplo 2.6.1 es un espacio de Tychonoff numerablemente compacto que tiene celularidad numerable y no tiene calibre ω_1 .

También, una pregunta razonable es si los espacios con la propiedad de Lindelöf son espacios de Šanin. Una vez más, la respuesta a esta cuestión es negativa: el ejemplo 2.3.6 es incluso compacto y T_2 , pero no es un espacio de Šanin. En vista de que todos los espacios compactos de Hausdorff son imágenes continuas de un subespacio cerrado de un cubo de Cantor (véase [35, Theorem, p. 870]), este ejemplo también demuestra que la proposición 4.3.1 no la podemos modificar a “todas las imágenes continuas de un subconjunto cerrado de un cubo de Cantor son espacios de Šanin”.

Con respecto a la propiedad de Lindelöf hereditaria, la búsqueda de espacios con esta propiedad que no satisfagan la condición de Šanin es más delicada. La razón se debe a que si un espacio topológico es hereditariamente Lindelöf y no tiene la propiedad de Šanin, entonces necesariamente es hereditariamente Lindelöf y no separable, lo cual se relaciona con el problema de los S -espacios y L -espacios. Comentaremos someramente este tema en los siguientes párrafos.

Proposición 4.3.5. *Existe $X \in [\mathbb{R}]^{\omega_1}$ tal que $|X \cap U| = \omega_1$, siempre que $U \in \tau_{\mathbb{R}}^+$, donde $\tau_{\mathbb{R}}$ denota a la topología euclidiana usual en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Consideremos la base numerable $\mathcal{B} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\}$ y, para cada $B \in \mathcal{B}$, sea $X_B \in [B]^{\omega_1}$. Si definimos $X := \bigcup \{X_B : B \in \mathcal{B}\}$, tomamos $U \in \tau_{\mathbb{R}}^+$ y $B \in \mathcal{B}$ es tal que $B \subseteq U$, entonces se cumple que

$$\omega_1 = |X_B \cap B| \leq |X \cap B| \leq |X \cap U| \leq |X| \leq |\mathcal{B}| \cdot \sup \{|X_B| : B \in \mathcal{B}\} \leq \omega_1.$$

En suma, $|X \cap U| = \omega_1$ y, por ende, X satisface las propiedades deseadas. $\square$

Nuestro primer espacio hereditariamente Lindelöf sin la propiedad de Šanin lo construiremos a partir de la proposición 4.3.5 y del siguiente ejemplo debido a Sierpiński (véase [32, 14.7, p. 51]): si $\mathcal{B} := \{U \setminus A : U \in \tau_{\mathbb{R}} \wedge A \in [\mathbb{R}]^{<\omega}\}$ y τ es la topología generada por la base $\mathcal{B}$, entonces el espacio resultante $(\mathbb{R}, \tau)$ es de Hausdorff y hereditariamente Lindelöf.

Ejemplo 4.3.6. *Existe un espacio topológico X de cardinalidad ω_1 con las siguientes propiedades:*

1. *X es hereditariamente Lindelöf, T_2 y submetrizable (es decir, τ_X contiene una topología metrizable para X);*

2. ω_1 no es un calibre para X (en especial, X no es un espacio de Šanin), y
3. $P(X) = WP(X) = UC$.

Demostración. Sea X el conjunto descrito en la proposición 4.3.5 y denotemos por τ_X a la topología que hereda X del espacio $(\mathbb{R}, \tau)$. Es claro que el enunciado del inciso (1) es cierto en virtud de las propiedades de $(\mathbb{R}, \tau)$, combinadas con el hecho de que τ_X refina a la topología metrizable que hereda X del espacio $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$.

Con respecto al enunciado en (2), la piedra angular del argumento es hallar una familia de subconjuntos numerables de X con una característica especial:

Afirmación. Existe una familia de conjuntos $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq [X]^{<\omega}$ tal que, para cualquier $J \in [\omega_1]^{\omega_1}$, $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = X$.

Efectivamente, si $f : X \rightarrow \omega_1 \times \omega$ es una función biyectiva y para cada $\alpha < \omega_1$ definimos

$$A_\alpha := \bigcup \{f^{-1}[\{\beta\} \times \omega] : \beta \leq \alpha\},$$

entonces $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ satisface las condiciones deseadas.

Para ver que X no tiene calibre ω_1 , consideremos la familia $\{X \setminus A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \tau_X^+$ y observemos que si $J \in [\omega_1]^{\omega_1}$, entonces la condición $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = X$ implica que $\bigcap_{\alpha \in J} (X \setminus A_\alpha) = \emptyset$.

Para demostrar el enunciado de (3) notemos que, como X es infinito y T_2 , la inclusión $WP(X) \subseteq UC$ se desprende del corolario 2.2.9. Para verificar la contención restante, sean λ un cardinal tal que $\text{cf}(\lambda) > \omega$ y $\{U_\alpha \setminus A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de abiertos básicos de X . Adicionalmente, sea $V_\alpha \in \tau_{\mathbb{R}}$ con $U_\alpha = X \cap V_\alpha$, siempre que $\alpha < \lambda$. Lo que sigue es emplear que $\mathbb{R}$ tiene precalibre λ para hallar $J \in [\lambda]^\lambda$ tal que $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia centrada. La meta es probar que $\{U_\alpha \setminus A_\alpha : \alpha \in J\}$ también es centrada. En efecto, si $I \in [J]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha$ es un elemento de $\tau_{\mathbb{R}}^+$ y, por ende, la proposición 4.3.5 garantiza que $|\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha| = |X \cap \bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha| = \omega_1$. De este modo, $|\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha| = \omega_1$ y así, $\bigcap \{U_\alpha \setminus A_\alpha : \alpha \in I\} \neq \emptyset$. En suma, $UC \subseteq P(X)$. $\square$

Un detalle que tiene el espacio del ejemplo 4.3.6 es que no es regular. Esta era una característica común que tenían todos los espacios hereditariamente Lindelöf y no regulares que se conocían en ZFC hasta hace algunos años.

Un espacio topológico es un *S-espacio* si es T_3 , hereditariamente separable y no Lindelöf. Similarmente, un *L-espacio* es un espacio T_3 , hereditariamente Lindelöf y no separable. Desde la década de los 60 se ha realizado mucho trabajo de investigación con el objetivo de encontrar espacios topológicos con estas cualidades. Gracias al trabajo de Rudin y Todorčević (véanse [61] y [87]), hoy sabemos que la existencia de *S-espacios* es independiente de ZFC. No obstante, a pesar de que se sospechaba que algo similar sucedería con los *L-espacios*, Moore construyó en [51] el primer ejemplo en ZFC de un *L-espacio*.

En [52] viene una versión más descriptiva del espacio que Moore presentó en [51]. En vista de la naturaleza técnica de ese resultado, comentaremos a grandes rasgos por qué este espacio no tiene calibre ω_1 . Gran parte de [52] está dedicado a encontrar una función $c : [\omega_1]^2 \rightarrow 2$ con propiedades adecuadas (véase [52, Definition, p. 18]). Sin necesidad de meternos en los detalles acerca de las condiciones que satisface la función c , podemos argumentar fácilmente que los espacios que son construidos con ésta no tienen calibre ω_1 .

Para cada $\alpha < \omega_1$, definamos

$$W_\alpha := \{\alpha\} \cup \{\beta > \alpha : c(\alpha, \beta) = 1\}.$$

Así, para cualquier $X \subseteq \omega_1$, $\tau[X]$ queda definida como la topología que se obtiene al declarar a cada $X \cap W_\alpha$ como abierto y cerrado en X . En la séptima sección de [52] se demuestra que si X es un subconjunto no numerable de ω_1 , entonces X es un L -espacio. Mostraremos a continuación que ω_1 no es un calibre para todos los espacios construidos de esta manera.

Proposición 4.3.7. *Si X es un subconjunto no numerable de ω_1 , entonces $(X, \tau[X])$ no tiene calibre ω_1 .*

Demostración. Consideremos la familia $\{X \cap W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, fijemos un subconjunto J de ω_1 , y supongamos que existe $\beta \in \bigcap \{X \cap W_\alpha : \alpha \in J\}$. En este caso, deducimos inmediatamente que $\alpha \leq \beta$ para cada $\alpha \in J$. De este modo, J es un conjunto numerable y, por lo tanto, ω_1 no es un calibre para $(X, \tau[X])$. $\square$

4.4. Separabilidad y la propiedad de Šanin

Demostramos en la proposición 4.2.5 que todos los espacios separables son fuertemente Šanin. Por otra parte, el cubo de Cantor $D(2)^{\epsilon^+}$ es un espacio fuertemente Šanin que no es separable (véase el ejemplo 2.5.8(3)). Así, una pregunta razonable es bajo qué condiciones se satisface que los espacios fuertemente Šanin son separables. Expondremos a continuación parte de la tercera sección de [75] para demostrar algunos resultados en este sentido (véanse los teoremas 4.4.8 y 4.4.9).

De acuerdo con Tall, la idea original para demostrar la siguiente proposición nació en [5] y [19]. Nosotros escribiremos esencialmente la misma prueba, pero con una presentación distinta.

Proposición 4.4.1. *Si X es un espacio topológico y $d(X) = |X|$ ó $t(X) < \text{cf}(d(X))$, entonces $\text{cf}(d(X))$ y $d(X)$ no son calibres para X .*

Demostración. En vista de que ambos argumentos difieren ligeramente, podemos hacer ambos casos simultáneamente. Sean $\kappa := d(X)$ y $\lambda := \text{cf}(\kappa)$. Además, sea $\{x_\beta :$

$\beta < \kappa$ un subconjunto de X con $X = \overline{\{x_\beta : \beta < \kappa\}}$ (en el primer caso, supondremos además que $X = \{x_\beta : \beta < \kappa\}$). Por último, sea $f : \lambda \rightarrow \kappa$ una función estrictamente creciente y cofinal.

Afirmación. Para cualquier $J \in [\lambda]^\lambda$ se satisface que $X = \bigcup_{\alpha \in J} \overline{\{x_\beta : \beta < f(\alpha)\}}$.

Sean $J \in [\lambda]^\lambda$ y $x \in X$. Observe que la restricción $f \upharpoonright_J : J \rightarrow \kappa$ también es cofinal en κ . Cuando $\kappa = |X|$, existe $\gamma < \kappa$ con $x = x_\gamma$ y así, si $\alpha \in J$ cumple $\gamma < f(\alpha)$, entonces $x \in \{x_\beta : \beta < f(\alpha)\}$. Por otra parte, si $t(X) < \lambda$, la relación $x \in \overline{\{x_\beta : \beta < \kappa\}}$ produce $I \in [\kappa]^{< t(X)}$ con $x \in \overline{\{x_\beta : \beta \in I\}}$. Luego, como I no es cofinal en κ , existe $\alpha < \lambda$ tal que $I \subseteq [0, f(\alpha))$ y, por ende, $x \in \overline{\{x_\beta : \beta < f(\alpha)\}}$.

Finalmente, para cada $\alpha < \lambda$ definamos $U_\alpha := X \setminus \overline{\{x_\beta : \beta < f(\alpha)\}}$. Resulta que $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es un subconjunto de τ_X^+ . En virtud de la Afirmación, el conjunto $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha$ es vacío cuando $J \in [\lambda]^\lambda$. En consecuencia, X no tiene calibre λ ni calibre κ (véase la proposición 2.2.1). $\square$

Corolario 4.4.2. Si X es un espacio topológico con $|X| = \omega_1$ y $\omega_1 \in C(X)$, entonces X es separable.

Corolario 4.4.3. Si X es un espacio de Šanin y $\text{cf}(d(X)) > \omega$, entonces $\text{cf}(d(X)) \leq t(X)$.

Una función cardinal ϕ refleja a un cardinal infinito κ si la condición $\phi(X) \geq \kappa$ implica la existencia de $Y \in [X]^{< \kappa}$ con $\phi(Y) \geq \kappa$. Por ejemplo, un resultado clásico establece que la densidad refleja a cualquier cardinal regular, es decir, si κ es un cardinal regular y $d(X) \geq \kappa$, entonces existe $Y \subseteq X$ con $|Y| = d(Y) = \kappa$ (véase [33, Theorem 2.5, p. 54]). A partir de este hecho se desprende el siguiente lema.

Lema 4.4.4. Si X es un espacio topológico tal que $hd(X) > \kappa$, entonces existe $Y \subseteq X$ con $|Y| = d(Y) = \kappa^+$.

No es difícil comprobar que si D es un subespacio denso de X , entonces $d(X) \leq d(D) \leq d(X) \cdot t(X)$ (véase [32, Theorem 3.9, p. 17]). En especial, para cualquier subconjunto Y de X se verifica que

$$d(\overline{Y}) \leq d(Y) \leq d(\overline{Y}) \cdot t(\overline{Y}). \quad (4.1)$$

Emplearemos estas relaciones en nuestro siguiente resultado que generaliza a [75, Theorem 3.24, p. 324].

Teorema 4.4.5. Sean X un espacio topológico y κ un cardinal con $t(X) \leq \kappa$. Si todos los subespacios cerrados de X tienen calibre κ^+ , entonces $hd(X) \leq \kappa$.

Demostración. Si $hd(X) > \kappa$, el lema 4.4.4 produce un subespacio Y de X con $d(Y) = \kappa^+$. Como la propiedad $t(\cdot) \leq \kappa$ es hereditaria, las desigualdades de (4.1) garantizan que $d(\overline{Y}) \leq \kappa^+ \leq d(\overline{Y}) \cdot \kappa$ y, por ende, obtenemos la igualdad $d(\overline{Y}) = \kappa^+$. De este modo, como $t(\overline{Y}) < cf(d(\overline{Y}))$, la proposición 4.4.1 garantiza que $\overline{Y}$ no tiene calibre κ^+ . $\square$

Un espacio topológico X es un k -espacio si para cualquier $A \subseteq X$ se satisface que A es cerrado en X siempre que, para cualquier subconjunto compacto K de X , $A \cap K$ es cerrado en K . En [68] Šapiroviskiĭ demostró que si X es un k -espacio de Hausdorff, entonces $t(X) \leq s(X)$. El próximo corolario se desprende de este resultado.

Corolario 4.4.6. *Si X es un k -espacio de Hausdorff, κ es un número cardinal y todos los subespacios cerrados de X tienen calibre κ^+ , entonces $hd(X) \leq \kappa$.*

Demostración. Bajo nuestras hipótesis se satisface que todos los subespacios cerrados de X tienen celularidad menor a κ^+ . De este modo, la proposición 2.1.6 garantiza que todos los subespacios de X tienen celularidad menor a κ^+ y, por ende, que $s(X) \leq \kappa$. Finalmente, como $t(X) \leq \kappa$, el teorema 4.4.5 garantiza que $hd(X) \leq \kappa$. $\square$

Los siguientes resultados son expansiones y consecuencias de [75, Theorem 3.26, p. 324] y [75, Theorem 3.27, p. 324].

Teorema 4.4.7. *Los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier espacio topológico X .*

1. X es hereditariamente separable
2. X es hereditariamente fuertemente Šanin.
3. X es hereditariamente Šanin.
4. X tiene calibre ω_1 hereditariamente.

Demostración. Las implicaciones (1) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (4) son evidentes (véase la proposición 4.2.5). Para ver que (1) se sigue de (4) supongamos, en busca de una contradicción, que $hd(X) > \omega$. Utilicemos el lema 4.4.4 para generar un subconjunto Y de X tal que $|Y| = d(Y) = \omega_1$. De esta manera, como Y tiene calibre ω_1 , el corolario 4.4.2 indica que Y es un espacio separable, un absurdo. $\square$

Una desigualdad famosa debida a Hajnal y Juhász establece que, si X es un espacio de Hausdorff, entonces $|X| \leq 2^{c(X) \cdot \chi(X)}$ (véase [32, Theorem 4.7, p. 20]). En especial, todos los espacios de Hausdorff primero numerables con celularidad numerable tienen tamaño a lo sumo $\mathfrak{c}$. Este hecho combinado con el corolario 4.4.2 demuestran el siguiente resultado de consistencia.

Teorema 4.4.8. *Si suponemos CH, entonces todos los espacios de Hausdorff primero numerables con calibre ω_1 son separables.*

Observése que el corolario 4.4.3 implica que si X es un espacio de Šanin con estrechez numerable y $d(X) < \aleph_\omega$, entonces necesariamente X es separable. En consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.4.9. *Si $c < \aleph_\omega$ y X es un espacio de Šanin T_2 que satisface alguna de las siguientes condiciones:*

1. *X es primero numerable; o*
2. *X tiene amplitud numerable y estrechez numerable, o*
3. *X tiene amplitud numerable y es un k -espacio,*

entonces X es separable.

Demostración. El inciso (1) se desprende de las relaciones $d(X) \leq |X| \leq 2^{c(X) \cdot \chi(X)}$. El inciso (2) se sigue de la desigualdad $d(X) \leq 2^{s(X)}$ para espacios T_2 (véase [32, Theorem 5.2, p. 23]). Finalmente, (3) es consecuencia de (2) y del resultado de Šapirovskiĭ. $\square$

En particular, el teorema 4.4.9 constata que, consistentemente, cualquier espacio de Šanin T_2 que satisfaga alguna de las condiciones (1) a (3) es fuertemente Šanin.

Finalizaremos la presente sección con un resultado de independencia que se puede obtener a partir del material expuesto en la misma.

Definición 4.4.10. Una clase de espacios topológicos $\mathcal{P}$ es una *clase de Tall* si satisface lo siguiente:

1. todos los elementos de $\mathcal{P}$ son k -espacios de Hausdorff;
2. cualquier subconjunto cerrado de un elemento de $\mathcal{P}$ es un elemento de $\mathcal{P}$, y
3. si $X \in \mathcal{P}$ tiene celularidad numerable, entonces tiene calibre ω_1 .

Por ejemplo, los espacios metrizables forman una clase de Tall. Por otra parte, una consecuencia de la proposición 2.3.3 y el corolario 3.5.6 es que, bajo $\text{MA}(\omega_1)$, los espacios localmente compactos de Hausdorff también son una clase de Tall.

Sea H el enunciado: “todos los espacios topológicos ccc tienen precalibre ω_1 ”. En el corolario 3.5.6 vimos que H se deduce a partir de $\text{MA}(\omega_1)$.

Una propiedad que tienen las clases de Tall es que, con una hipótesis relativamente débil, se obtiene la separabilidad hereditaria de los mismos. El siguiente resultado es una generalización de [75, Theorem 5.3, p. 333], en donde Tall demuestra el resultado correspondiente para espacios compactos de Hausdorff bajo el principio H .

Proposición 4.4.11. *Si $\mathcal{P}$ es una clase de Tall y $X \in \mathcal{P}$ satisface que todos sus subespacios cerrados son ccc, entonces X es hereditariamente separable.*

Demostración. Si A es un subespacio cerrado de X , entonces A es un elemento de $\mathcal{P}$ con celularidad numerable y, por lo tanto, A tiene calibre ω_1 . De este manera, todos los subespacios cerrados de X tienen calibre ω_1 y así, el corolario 4.4.6 garantiza que X es hereditariamente separable. $\square$

Corolario 4.4.12. *Los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier clase de Tall $\mathcal{P}$ y cualquier $X \in \mathcal{P}$.*

1. X es hereditariamente separable
2. X es hereditariamente fuertemente Šanin.
3. X es hereditariamente Šanin.
4. X tiene calibre ω_1 hereditariamente.
5. X tiene precalibre ω_1 hereditariamente.
6. X tiene la propiedad (K) hereditariamente.
7. X es hereditariamente ccc (equivalentemente, X tiene amplitud numerable).
8. Todos los subespacios cerrados de X tienen celularidad numerable.

Con estos resultados se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.4.13. *Los siguientes enunciados se cumplen.*

1. $[MA(\omega_1)]$ Todos los espacios localmente compactos de Hausdorff cuyos subespacios cerrados tienen la celularidad numerable son hereditariamente separables.
2. $[\neg SH]$ Existe un espacio compacto, linealmente ordenado y hereditariamente Lindelöf que no tiene la propiedad de Knaster.

Demostración. Para verificar el enunciado del inciso (1) es suficiente invocar el corolario 4.4.12 y recordar que, bajo $MA(\omega_1)$, la clase los espacios localmente compactos de Hausdorff es de Tall. Para el inciso (2) observemos que si X es la completación de Dedekind de una línea de Souslin (véase [40, Exercise III.2.19, p. 171]), entonces X es una línea Souslin compacta. Además, como $c(X) = hL(X)$ porque X es linealmente ordenado (véase [11, Theorem 5.2, p. 667]) y X tiene celularidad numerable, X es hereditariamente Lindelöf. Finalmente, como el cuadrado X^2 no tiene celularidad numerable (véase el teorema 3.7.1), se deduce que X^2 no tiene la propiedad de Knaster (véase el corolario 3.1.3) y, por ende, X tampoco la tiene (véase la proposición 2.5.3). $\square$

En consecuencia, el enunciado “todos los espacios compactos, linealmente ordenados y hereditariamente Lindelöf tienen la propiedad de Knaster” es independiente de ZFC.

5

Condiciones de cadena en espacios topológicos*

La definición clásica de calibre para un espacio topológico establece que si κ es un cardinal infinito, entonces κ es un calibre para un espacio topológico X si para cualquier conjunto I de cardinalidad κ y cualquier familia $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ formada por subconjuntos abiertos no vacíos de X se satisface que si J es un subconjunto de I de tamaño κ , la colección $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ tiene intersección no vacía (véase [67]).

No obstante, a pesar de que esta convención parece ser la aceptada en la literatura (véanse, por ejemplo, [16], [36], [64]–[67] y [71]), la lectura de [20, 2.7.11, p. 116] revela que, para Engelking, un cardinal infinito κ es un calibre para un espacio topológico X si para cualquier familia $\mathcal{U}$ formada por κ subconjuntos abiertos no vacíos de X se verifica que si $\mathcal{V}$ es una subcolección de $\mathcal{U}$ de cardinalidad κ , entonces $\bigcap \mathcal{V} \neq \emptyset$.

Naturalmente, en virtud de esta discrepancia, la inquietud matemática nos obliga a tratar de averiguar hasta qué punto realmente coinciden ambas nociones. El objetivo del presente capítulo es profundizar en las diferencias y similitudes que yacen entre estos conceptos y exponer que, contrario a lo que la intuición podría sugerir, se distinguen en bastantes aspectos.

5.1. Calibres*, precalibres* y precalibres* débiles

Sean X un espacio topológico y κ un número cardinal infinito. Recuerde que κ es un *calibre* (resp., *precalibre*; *precalibre débil*) para X si para toda familia $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$ existe $J \in [\kappa]^\kappa$ de tal manera que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ tiene intersección no vacía (resp., es centrada; es ligada).

Por otra parte, κ es un *calibre** (resp., *precalibre**; *precalibre* débil*) para X si para toda familia $\mathcal{U} \in [\tau_X^+]^\kappa$ existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^\kappa$ de tal forma que $\mathcal{V}$ tiene intersección no vacía (resp., es centrada; es ligada).

Además, estaremos trabajando con las familias:

$$\text{WP}^*(X) := \{\kappa \in \text{CN} : \kappa \text{ es un precalibre* débil para } X\};$$

$$\text{P}^*(X) := \{\kappa \in \text{CN} : \kappa \text{ es un precalibre* para } X\}, \text{ y}$$

$$\text{C}^*(X) := \{\kappa \in \text{CN} : \kappa \text{ es un calibre* para } X\}.$$

Con el mismo espíritu de las observaciones 1.6.1 y 2.1.1, nuestra exposición de la presente sección comienza con una observación.

Observación 5.1.1. A continuación presentaremos varios resultados que hablan de calibres, calibres*, precalibres, precalibres*, precalibres débiles y precalibres* débiles. En estos enunciados expondremos únicamente las demostraciones para calibres y calibres*, salvo cuando existan distinciones importantes en los argumentos.

Nosotros estamos interesados en las relaciones que privan entre las condiciones de cadena y las condiciones de cadena*. Comencemos con una equivalencia de las condiciones de cadena* en términos de familias indizadas que será útil más adelante.

Lema 5.1.2. Si X es un espacio topológico y κ es un número cardinal, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

1. κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para X .
2. Para cualquier familia $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$ enumerada sin repeticiones existe $J \in [\kappa]^\kappa$ de tal forma que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ tiene intersección no vacía (resp., es centrada; es ligada).
3. Si $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de τ_X con $|\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}| = \kappa$, entonces existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con las siguientes características:

$$(a) \{U_\alpha : \alpha \in J\} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \setminus \{\emptyset\};$$

$$(b) \text{ si } \alpha, \beta \in J \text{ son distintos, entonces } U_\alpha \neq U_\beta, \text{ y}$$

$$(c) \{U_\alpha : \alpha \in J\} \text{ tiene intersección no vacía (resp., es centrada; es ligada).}$$

Demostración. Claramente, (1) implica (2) y (3) implica (1). Para demostrar (2) implica (3), tomemos un subconjunto $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de τ_X . Por el lema 1.2.2, existe $I \in [\kappa]^\kappa$ con $\{U_\alpha : \alpha \in I\} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $U_\alpha \neq U_\beta$, siempre que $\alpha, \beta \in I$ son distintos. Luego, si

$I' := \{\alpha \in I : U_\alpha \neq \emptyset\}$, entonces $I' \in [I]^\kappa$ y, por ende, la hipótesis garantiza la existencia de $J \in [I']^\kappa$ de tal modo que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ tiene intersección no vacía (resp., es centrada; es ligada). Así, J y $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ satisfacen las condiciones deseadas. $\square$

En lo que sigue emplearemos constantemente la equivalencia definida en el lema 5.1.2, incluso sin hacer referencia explícita al mismo si es evidente su uso.

Por otra parte, argumentaremos a continuación que en términos de cardinales regulares, las condiciones de cadena son indistinguibles de las condiciones de cadena*. En concreto, tenemos el siguiente resultado.

Lema 5.1.3. *Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal regular, entonces κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil) para X si y sólo si κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil).*

Demostración. Observe que la implicación directa es inmediata y no necesita la regularidad de κ , basta con enumerar a un $\mathcal{U} \in [\tau_X^+]^\kappa$ sin repeticiones. Para verificar la implicación recíproca, supongamos que $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de τ_X^+ y definamos $f : \kappa \rightarrow \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ mediante $f(\alpha) := U_\alpha$. Si $|\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}| < \kappa$, la regularidad de κ genera $\beta < \kappa$ con $|f^{-1}\{U_\beta\}| = \kappa$. Así, la colección $\{U_\alpha : \alpha \in f^{-1}\{U_\beta\}\} = \{U_\beta\}$ satisface que $\bigcap \{U_\alpha : \alpha \in f^{-1}\{U_\beta\}\} \neq \emptyset$. Cuando $|\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}| = \kappa$, el lema 5.1.2 produce $J \in [\kappa]^\kappa$ con $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$. $\square$

Sea X un espacio topológico. Las inclusiones $C(X) \subseteq P(X) \subseteq WP(X)$ y $C^*(X) \subseteq P^*(X) \subseteq WP^*(X)$ se deducen fácilmente a partir de las definiciones. Además, el argumento expuesto en la implicación directa del lema 5.1.3 indica que $C(X) \subseteq C^*(X)$, $P(X) \subseteq P^*(X)$ y $WP(X) \subseteq WP^*(X)$. Por otro lado, ese mismo resultado asegura que $C^*(X) \cap R \subseteq C(X)$, $P^*(X) \cap R \subseteq P(X)$ y $WP^*(X) \cap R \subseteq WP(X)$, donde R denota la clase propia de los cardinales regulares. Estos renglones son la demostración de nuestro siguiente resultado.

Proposición 5.1.4. *Para cualquier espacio topológico X se verifican las siguientes inclusiones.*

1. $C(X) \subseteq P(X) \subseteq WP(X)$ y $C^*(X) \subseteq P^*(X) \subseteq WP^*(X)$.
2. $C(X) \subseteq C^*(X)$, $P(X) \subseteq P^*(X)$ y $WP(X) \subseteq WP^*(X)$.
3. $C^*(X) \cap R \subseteq C(X)$, $P^*(X) \cap R \subseteq P(X)$ y $WP^*(X) \cap R \subseteq WP(X)$.

Las relaciones expuestas en la proposición 5.1.4 las podemos exhibir de manera más amigable en el siguiente diagrama (la relación $A \rightarrow B$ significa $A \subseteq B$):

$$\begin{array}{ccccc}
\text{WP}^*(X) \cap R & \longrightarrow & \text{WP}(X) & \longrightarrow & \text{WP}^*(X) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\text{P}^*(X) \cap R & \longrightarrow & \text{P}(X) & \longrightarrow & \text{P}^*(X) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\text{C}^*(X) \cap R & \longrightarrow & \text{C}(X) & \longrightarrow & \text{C}^*(X)
\end{array}$$

Figura 5.1: Condiciones de cadena y condiciones de cadena*.

Del mismo modo que en la sección 1.3, podríamos definir cardinales similares al número de Šanin, al número de Šanin débil y al número de Knaster en términos de calibres*, precalibres*, precalibres* débiles. Este camino no conduce a algún número cardinal nuevo y la razón es porque el inciso (3) de la proposición 5.1.4 implica que, para un espacio topológico X , se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned}
k(X) &= \min\{\kappa \in \mathbb{CN} : \kappa^+ \text{ es un precalibre* débil para } X\}, \\
ws(X) &= \min\{\kappa \in \mathbb{CN} : \kappa^+ \text{ es un precalibre* para } X\} \text{ y} \\
\check{s}(X) &= \min\{\kappa \in \mathbb{CN} : \kappa^+ \text{ es un calibre* para } X\}.
\end{aligned}$$

La pregunta que ahora quisiéramos contestar es: ¿es cierto que las contenciones $\text{C}^*(X) \subseteq \text{C}(X)$, $\text{P}^*(X) \subseteq \text{P}(X)$ y $\text{WP}^*(X) \subseteq \text{WP}(X)$ también se verifican? Esta cuestión la podemos responder negativamente con el siguiente resultado:

Proposición 5.1.5. *Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal infinito tal que $o(X) < \kappa$, entonces $\kappa \in \text{C}^*(X)$. En símbolos, $\{\kappa \in \mathbb{CN} : \kappa > o(X)\} \subseteq \text{C}^*(X)$.*

Demostración. Esto resulta por vacuidad; es decir, si κ no fuera un calibre*, entonces existiría una familia $\mathcal{U}$ de abiertos de cardinalidad κ en X tal que ninguna subcolección de $\mathcal{U}$ de cardinalidad κ tiene intersección no vacía, pero no es posible que exista tal familia $\mathcal{U}$ ya que $o(X) < \kappa$. $\square$

A partir de la proposición 5.1.5 podemos deducir que, en general, no son ciertas las relaciones $\text{C}^*(X) \subseteq \text{C}(X)$, $\text{P}^*(X) \subseteq \text{P}(X)$ y $\text{WP}^*(X) \subseteq \text{WP}(X)$: si X es un espacio de Hausdorff infinito y κ es un cardinal infinito de tal modo que $|\tau_X| < \kappa$ y $\text{cf}(\kappa) = \omega$, entonces por un lado la proposición 5.1.5 indica que κ es un calibre* para X , mientras que el corolario 2.2.9 dice que κ no es un precalibre débil para X . En suma, $\kappa \in \text{C}^*(X) \setminus \text{C}(X)$, $\kappa \in \text{P}^*(X) \setminus \text{P}(X)$ y $\kappa \in \text{WP}^*(X) \setminus \text{WP}(X)$.

Por otra parte, podríamos pensar que los resultados que demostramos en la sección 2.1 tienen una versión dual con respecto a sus conceptos* correspondientes. Por

ejemplo, es natural pensar que la siguiente versión dual de la proposición 2.2.1 es cierta: si κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para X , entonces $\text{cf}(\kappa)$ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para X . Sin embargo, el razonamiento expuesto en el párrafo previo muestra que esto no es así: si $|\tau_X| < \kappa$, entonces κ es un calibre* para X , pero una combinación del corolario 2.2.9 con el inciso (3) de la proposición 5.1.4 garantiza que $\text{cf}(\kappa)$ no es un precalibre* débil para X .

A pesar de que nuestras nociones familiares no coincidan en general con sus versiones *, sí presentan algunas similitudes. Por ejemplo, nuestro siguiente resultado es la versión de la proposición 2.1.7 para precalibres* débiles.

Proposición 5.1.6. *Si X es un espacio topológico, κ es un precalibre* débil para X y $\mathcal{U}$ es una familia celular en X , entonces $|\mathcal{U}| < \kappa$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto de τ_X^+ con $|\mathcal{U}| \geq \kappa$. Si fijamos $\mathcal{V}$ en $[\mathcal{U}]^\kappa$, podemos emplear que X tiene precalibre* débil κ para hallar una familia ligada $\mathcal{W} \in [\mathcal{V}]^\kappa$. En especial, $\mathcal{U}$ no puede ser una familia celular. $\square$

Una pregunta que sugiere la proposición 5.1.6 es si el recíproco también es válido, es decir, ¿es cierto que si X es un espacio topológico, κ es un número cardinal y cualquier familia celular en X tiene cardinalidad menor a κ , entonces κ es un precalibre* débil para X ?

Un cardinal no numerable κ es *débilmente compacto* si satisface la relación $\kappa \rightarrow (\kappa)_2^2$ (véase la definición 4.1.2). En esta clase de cardinales es en la cual podemos dar un recíproco de la proposición 5.1.6. Los autores agradecen a Jorge Antonio Cruz Chapital por sugerir la demostración que expondremos a continuación.

Proposición 5.1.7. *Si X es un espacio topológico y $\kappa = \omega$, o bien, κ es débilmente compacto, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. κ es un precalibre* débil para X .
2. Si $\mathcal{U}$ es una familia celular en X , entonces $|\mathcal{U}| < \kappa$.

Demostración. La implicación de (1) hacia (2) es la proposición 5.1.6. Para la implicación restante supongamos que κ no es un precalibre* débil para X . Sea $\mathcal{U} \in [\tau_X^+]^\kappa$ de tal modo que, para cualquier $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^\kappa$, $\mathcal{V}$ no es ligada. Además, sea $f : [\mathcal{U}]^2 \rightarrow 2$ la función definida mediante la regla $f(\{U, V\}) := 0$ si y sólo si $U \cap V = \emptyset$. La relación $\kappa \rightarrow (\kappa)_2^2$ implica la existencia de $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^\kappa$ tal que $f|_{[\mathcal{V}]^2}$ es constante. Finalmente, como $\mathcal{V}$ no es ligada, f no puede ser la constante 1 en el conjunto $[\mathcal{V}]^2$ y, por ende, $\mathcal{V}$ es una familia celular en X de cardinalidad κ . $\square$

Corolario 5.1.8. *Si X es un espacio topológico infinito y ω es un precalibre* débil para X , entonces X no tiene la propiedad de Hausdorff.*

De regreso a nuestra comparación de las condiciones de cadena con las condiciones de cadena*, la proposición 5.1.5 expone un hecho interesante: a partir de cierto momento cualquier número cardinal es un calibre* por una cuestión técnica de lógica matemática, pero no es un calibre* “verdadero” para el espacio en cuestión. Por este motivo, dado un espacio topológico X , es sensato dividir a los números cardinales en dos tipos: aquellos que son calibres* para X por un argumento de vacuidad (esto es, los cardinales κ que satisfacen la relación $o(X) < \kappa$), y aquellos cardinales que tienen la oportunidad de ser condiciones de cadena* “verdaderos” para X . En virtud de este razonamiento, la siguiente pregunta surge de manera natural:

Pregunta 5.1.9. ¿Es cierto que si $\kappa \leq o(X)$ y $\kappa \in C^*(X)$, entonces $\kappa \in C(X)$?

Veremos en los teoremas 5.1.11 y 5.1.20 que, consistentemente, la respuesta a la pregunta 5.1.9 es negativa. Para ello necesitamos demostrar primero un resultado auxiliar.

Lema 5.1.10. *Si X es un espacio topológico, κ es un cardinal infinito y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia celular en X , entonces $\aleph_\kappa \notin \text{WP}(X)$. Más aún, si para cada $\alpha < \kappa$ se satisface que $o(U_\alpha) \geq \aleph_\alpha$, entonces $\aleph_\kappa \notin \text{WP}^*(X)$.*

Demostración. Para cada $\alpha < \kappa$, consideremos al conjunto

$$I_\alpha := \begin{cases} [0, \aleph_1), & \text{si } \alpha = 0, \\ [\aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1}), & \text{si } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Además, para cada ordinal $\gamma < \aleph_\kappa$ definamos $V_\gamma := U_\alpha$ si y sólo si $\gamma \in I_\alpha$. Claramente, $\{V_\gamma : \gamma < \aleph_\kappa\}$ es un subconjunto de τ_X^+ . Además, si $J \in [\aleph_\kappa]^{\aleph_\kappa}$, existen $\alpha < \beta < \kappa$ con $I_\alpha \cap J \neq \emptyset \neq I_\beta \cap J$; en consecuencia, si $\gamma \in I_\alpha \cap J$ y $\delta \in I_\beta \cap J$, entonces $V_\gamma \cap V_\delta = \emptyset$. Así, $\aleph_\kappa \notin \text{WP}(X)$.

Ahora supongamos adicionalmente que $o(U_\alpha) \geq \aleph_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$. Para toda $\alpha < \kappa$ sea $\{U(\alpha, \gamma) : \gamma < \aleph_\alpha\}$ un subconjunto de $\tau_{U_\alpha}^+$ enumerado sin repeticiones. Para cada ordinal $\gamma < \aleph_\kappa$ definamos $V_\gamma := U(\alpha, \gamma)$ si y sólo si $\gamma \in I_\alpha$. En estas circunstancias, la familia $\{V_\gamma : \gamma < \aleph_\kappa\}$ satisface $V_\gamma \neq V_\delta$, siempre que $\gamma < \delta < \aleph_\kappa$. Además, si $J \in [\aleph_\kappa]^{\aleph_\kappa}$, existen $\alpha < \beta < \kappa$ con $I_\alpha \cap J \neq \emptyset \neq I_\beta \cap J$. De este modo, si $\gamma \in I_\alpha \cap J$ y $\delta \in I_\beta \cap J$, entonces $V_\gamma \cap V_\delta = \emptyset$. Por lo tanto, $\aleph_\kappa \notin \text{WP}^*(X)$. $\square$

Con este antecedente estamos en posición para dar una respuesta negativa consistente para la pregunta 5.1.9.

Teorema 5.1.11. *Si κ es un cardinal infinito con $2^\kappa < \aleph_\kappa$ y $\text{cf}(\kappa) > \omega$, entonces existe un espacio topológico X de tal forma que X es localmente compacto y T_4 , $o(X) = 2^{\aleph_\kappa} = |X|$, $\aleph_\kappa \in C^*(X)$, $\aleph_\kappa \notin \text{WP}(X)$ y $\kappa \notin \text{WP}^*(X)$.*

Demostración. Para cada $\xi < \kappa$ sea Y_ξ el cubo de Cantor de peso κ , $D(2)^\kappa$. Además, sean $Y := \bigoplus_{\xi < \kappa} Y_\xi$, Z el cubo de Cantor de peso $\aleph_\kappa$, $D(2)^{\aleph_\kappa}$, y $X := Y \oplus Z$. Claramente, X es localmente compacto, T_4 y $o(X) = 2^{\aleph_\kappa} = |X|$ (véase el lema 1.4.6). Adicionalmente, en virtud del lema 5.1.10, $\aleph_\kappa \notin \text{WP}(Y)$ y, como $Y \in \tau_X^+$, deducimos que $\aleph_\kappa \notin \text{WP}(X)$. Por otra parte, como $\{Y_\xi : \xi < \kappa\}$ es una familia celular en X , la proposición 5.1.6 implica que $\kappa \notin \text{WP}^*(X)$.

Para verificar que $\aleph_\kappa \in C^*(X)$, supongamos que $\mathcal{U}$ es un elemento de $[\tau_X^+]^{\aleph_\kappa}$ y sea $\{U_\alpha : \alpha < \aleph_\kappa\}$ una enumeración sin repeticiones de $\mathcal{U}$. Además, para cada $\alpha < \aleph_\kappa$ sean $V_\alpha \in \tau_Y$ y $W_\alpha \in \tau_Z$ con $U_\alpha = V_\alpha \cup W_\alpha$. Observe que $|\{V_\alpha : \alpha < \aleph_\kappa\}| \leq 2^\kappa$ por el lema 1.4.5. Afirmamos que $|\{W_\alpha : \alpha < \aleph_\kappa\}| = \aleph_\kappa$. En caso contrario, como la función $\mathcal{U} \rightarrow \{V_\alpha : \alpha < \aleph_\kappa\} \times \{W_\alpha : \alpha < \aleph_\kappa\}$ determinada mediante $U_\alpha \mapsto (V_\alpha, W_\alpha)$ es inyectiva, obtenemos la contradicción:

$$\aleph_\kappa = |\mathcal{U}| \leq |\{V_\alpha : \alpha < \aleph_\kappa\}| \cdot |\{W_\alpha : \alpha < \aleph_\kappa\}| < 2^\kappa \cdot \aleph_\kappa = \aleph_\kappa.$$

Por lo anterior, existe $I \in [\aleph_\kappa]^{\aleph_\kappa}$ con $\emptyset \neq \{W_\alpha : \alpha \in I\}$ y $W_\alpha \neq W_\beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$ distintos. En estas circunstancias, como Z tiene calibre $\aleph_\kappa$ (véase el ejemplo 2.5.8(2)), existe $J \in [I]^{\aleph_\kappa}$ tal que $\bigcap_{\alpha \in J} W_\alpha \neq \emptyset$. En consecuencia, $\{U_\alpha : \alpha \in J\} \in [\mathcal{U}]^{\aleph_\kappa}$ y $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$. Así, $\aleph_\kappa \in C^*(X)$. $\square$

En el teorema 5.1.11 podría ser tentador poner la restricción más suave $2^\kappa \leq \aleph_\kappa$, no obstante, puesto que $(2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$ y $(\aleph_\kappa)^\kappa > \aleph_\kappa$ (véase [41, Lemma 10.40, p. 34]), es un resultado de ZFC que $2^\kappa \neq \aleph_\kappa$.

Por otra parte, en virtud de que el teorema 5.1.11 únicamente trata con cardinales con cofinalidad no numerable, resta averiguar si es posible conseguir un resultado similar para cardinales no numerables con cofinalidad numerable. Saldaremos esta deuda en el teorema 5.4.6 más adelante.

En virtud de que para cualquier $U \in \tau_X$ se satisface la inclusión $\tau_U^+ \subseteq \tau_X^+$, el siguiente resultado es inmediato.

Proposición 5.1.12. *Sean X un espacio topológico y $U \in \tau_X$. Si κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para X , entonces κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para U .*

Es simple comprobar que la implicación recíproca en el resultado anterior no es cierta. En efecto, si κ es un cardinal infinito con $\text{cf}(\kappa) > \omega$, y denotamos por X a la suma libre $\mathbb{R} \oplus D(\kappa)$, entonces $\mathbb{R} \in \tau_X$ y κ es un calibre para $\mathbb{R}$ (véase la proposición 2.1.8). No obstante, como $D(\kappa)$ admite una familia celular de cardinalidad κ , entonces la proposición 5.1.6 garantiza que $D(\kappa)$ no tiene precalibre* débil κ . Esto último, en virtud de la proposición 5.1.12, asegura que X no tiene precalibre* débil κ .

En el ámbito de los espacios de Hausdorff localmente H -cerrados, la proposición 5.1.12 permite obtener la siguiente extensión del corolario 2.1.10:

Corolario 5.1.13. *Si X es un espacio de Hausdorff localmente H -cerrado y Y es una extensión T_2 de X , entonces $C(X) = C(Y)$, $P(X) = P(Y)$, $WP(X) = WP(Y)$, $C^*(Y) \subseteq C^*(X)$, $P^*(Y) \subseteq P^*(X)$ y $WP^*(Y) \subseteq WP^*(X)$.*

Con respecto a la herencia de las condiciones de cadena* para subespacios densos, podemos decir qué sucede con precisión cuando hablamos de precalibres* y precalibres* débiles. Compárese el siguiente resultado con la proposición 2.1.6(2).

Proposición 5.1.14. *Si X es un espacio topológico, D es un subconjunto denso de X y κ es un precalibre* (resp., precalibre* débil) para X , entonces κ es un precalibre* (resp., precalibre* débil) para D .*

Demostración. Sean $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de τ_D^+ enumerado sin repeticiones y $U_\alpha \in \tau_X^+$ con $U_\alpha \cap D = V_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$. Luego, como la asignación $\alpha \mapsto U_\alpha$ es inyectiva y X tiene precalibre* (resp., precalibre* débil) κ , existe $J \in [\kappa]^\kappa$ de tal forma que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es centrada (resp., ligada). Así, la densidad de D garantiza que $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ es centrada (resp., ligada). $\square$

El resultado correspondiente para calibres* no es válido. Efectivamente, el ejemplo 2.5.8(2) garantiza que si κ tiene cofinalidad no numerable, entonces $D(2)^\kappa$ tiene calibre κ . Por otra parte, el Σ -producto $D := \Sigma(D(2)^\kappa, \bar{0})$ es un subespacio denso de $D(2)^\kappa$ (véase el lema 1.4.4). Además, si para cada $\alpha < \kappa$ denotamos por $\pi_\alpha : D(2)^\kappa \rightarrow D(2)$ a la proyección canónica, entonces $\{\pi_\alpha^{-1}\{1\} \cap D : \alpha < \kappa\}$ es una familia de κ abiertos de tal modo que para cualquier $J \in [\kappa]^\kappa$, $\bigcap \{\pi_\alpha^{-1}\{1\} \cap D : \alpha \in J\} = \emptyset$. En consecuencia, κ no es calibre* para D .

Pregunta 5.1.15. ¿Es cierto que si X es un espacio topológico, D es un subconjunto denso de X y κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para D , entonces κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para X ?

Demostraremos en los corolarios 5.1.23 y 5.4.9 que la respuesta para la pregunta 5.1.15 es negativa. No obstante, expondremos primero algunos casos sencillos en los cuales la respuesta es afirmativa. Por ejemplo, el siguiente resultado es una consecuencia de la proposición 2.1.6 y el lema 5.1.3.

Proposición 5.1.16. *Si X es un espacio topológico, D es un subconjunto denso de X , κ es un cardinal regular y κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para D , entonces κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para X .*

En cierta clase de extensiones, la respuesta a la pregunta 5.1.15 es afirmativa. El siguiente resultado es consecuencia de la proposición 5.4.2 y el teorema 5.4.3 que demostraremos más adelante.

Proposición 5.1.17. Sean X un espacio topológico y Y una extensión de X . Si κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para X y para el residuo $Y \setminus X$, entonces κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para Y .

Además, es posible dar una especie de recíproco para el resultado anterior mediante la proposición 5.1.12.

Proposición 5.1.18. Sean X un espacio topológico y Y una extensión de X . Si κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para Y y $Y \setminus X$ es cerrado en Y , entonces κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para X .

En especial, las proposiciones 5.1.17 y 5.1.18 implican el siguiente corolario.

Corolario 5.1.19. Si X es localmente compacto, no compacto y Hausdorff, entonces $C^*(X) = C^*(\alpha X)$, $P^*(X) = P^*(\alpha X)$ y $WP^*(X) = WP^*(\alpha X)$.

Con el resultado anterior disponible es posible fortalecer el teorema 5.1.11 de la siguiente manera:

Teorema 5.1.20. Si κ es un cardinal infinito con $2^\kappa < \aleph_\kappa$ y $\text{cf}(\kappa) > \omega$, entonces existe un espacio topológico X de tal forma que X es compacto y T_2 , $o(X) = 2^{\aleph_\kappa} = |X|$, $\aleph_\kappa \in C^*(X)$, $\aleph_\kappa \notin WP(X)$ y $\kappa \notin WP^*(X)$.

Demostración. Sea X la compactación de Alexandroff del espacio cuya existencia está asegurada por el teorema 5.1.11. Claramente, X es un espacio compacto de Hausdorff que satisface las relaciones $o(X) = 2^{\aleph_\kappa} = |X|$. Además, la proposición 2.1.6(2) garantiza que $\aleph_\kappa \notin WP(X)$, mientras que el corolario 5.1.19 asegura que $\aleph_\kappa \in C^*(X)$ y $\kappa \notin WP^*(X)$. $\square$

Pregunta 5.1.21. ¿Es posible construir en ZFC un ejemplo de un espacio de Hausdorff infinito X y un cardinal infinito κ de tal manera que $\kappa \in C^*(X)$ y $\kappa \notin C(X)$?

Ahora, con el objetivo de dar una respuesta negativa consistente para la pregunta 5.1.15, demostraremos primero el siguiente teorema.

Teorema 5.1.22. Si κ es un cardinal singular y X es un espacio topológico de tal forma que $\text{cf}(\kappa)$ no es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para X entonces existe una extensión Y de X tal que κ no es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para Y .

Demostración. Sea $\{\kappa_\xi : \xi < \text{cf}(\kappa)\}$ una $(\kappa, 0)$ -sucesión (véase el lema 1.2.5). Además, para cada $\xi < \text{cf}(\kappa)$, definamos $I_\xi := [\kappa_\xi, \kappa_{\xi+1})$. Fijemos una colección $\{y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de tal modo que $X \cap \{y_\alpha : \alpha < \kappa\} = \emptyset$ y $y_\alpha \neq y_\beta$, siempre que $\alpha < \beta < \kappa$. Empleemos que $\text{cf}(\kappa)$ no es un calibre* para X para fijar una familia $\{V_\xi : \xi < \text{cf}(\kappa)\} \subseteq \tau_X^+$ enumerada

sin repeticiones y tal que para cualquier $I \in [\text{cf}(\kappa)]^{\text{cf}(\kappa)}$, la colección $\{V_\xi : \xi \in I\}$ tiene intersección vacía. Adicionalmente, para cada $\alpha < \kappa$ definamos $U_\alpha := V_\xi \cup \{y_\alpha\}$ si y sólo si $\alpha \in I_\xi$. Finalmente, sea $Y := X \cup \{y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y consideremos la topología en Y generada por la base $\tau_X \cup \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Claramente, X es un subespacio denso de Y . Notemos además que, si $\alpha, \beta < \kappa$ y $\xi, \eta < \text{cf}(\kappa)$ son tales que $\alpha \in I_\xi$ y $\beta \in I_\eta$, entonces $U_\alpha \cap U_\beta = V_\xi \cap V_\eta$. Ahora, sea $J \in [\kappa]^\kappa$ y consideremos la colección $I := \{\xi < \text{cf}(\kappa) : I_\xi \cap J \neq \emptyset\}$. Observemos primero que, como $|J| = \kappa$, necesariamente $|I| = \text{cf}(\kappa)$; en particular, $\{V_\xi : \xi \in I\}$ tiene intersección vacía. En estas circunstancias, se satisface que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ tiene intersección vacía. De esta manera, κ no es un calibre* para Y . $\square$

El último resultado de la sección es una consecuencia de los teoremas 5.1.11 y 5.1.22.

Corolario 5.1.23. *Si κ es un cardinal regular no numerable con $2^\kappa < \aleph_\kappa$, entonces existe un espacio topológico X y una extensión Y de X de tal modo que $\aleph_\kappa \in C^*(X)$ y $\aleph_\kappa \notin \text{WP}^*(Y)$.*

5.2. Ejemplos concretos

En general, determinar con precisión las condiciones de cadena* de espacios topológicos no es una tarea sencilla. Para exhibir esta dificultad presentaremos varios ejemplos de espacios y calcularemos sus colecciones de calibres, precalibres, precalibres débiles, calibres*, precalibres* y precalibres* débiles. Cabe mencionar que el comportamiento de las primeras tres colecciones es más o menos sencillo de determinar, pero para las últimas tres familias impondremos ciertos axiomas adicionales para determinarlos por completo.

Con esta idea en mente, comencemos con el espacio más “simple” de todos: el espacio discreto.

Ejemplo 5.2.1. *Si κ es un cardinal infinito, entonces:*

1. $C(D(\kappa)) = P(D(\kappa)) = \text{WP}(D(\kappa)) = \{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) > \kappa\}$ y
2. $\{\lambda \in \text{CN} : \lambda > 2^\kappa\} \subseteq C^*(D(\kappa)) \subseteq P^*(D(\kappa)) \subseteq \text{WP}^*(D(\kappa)) \subseteq \{\lambda \in \text{CN} : \lambda > \kappa\}$.

Además, si $2^\kappa = \kappa^+$,

3. $C^*(D(\kappa)) = P^*(D(\kappa)) = \text{WP}^*(D(\kappa)) = \{\lambda \in \text{CN} : \lambda > \kappa\}$.

Demostración. Primero, como $d(D(\kappa)) = \kappa$, la proposición 2.1.8 garantiza que la inclusión $\{\lambda \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\lambda) > \kappa\} \subseteq C(D(\kappa))$ es cierta. Por otra parte, si $\text{cf}(\lambda) \leq \kappa$, entonces la colección $\{\alpha : \alpha < \text{cf}(\lambda)\}$ es una familia celular en $D(\kappa)$ de cardinalidad $\text{cf}(\lambda)$. De este modo, las proposiciones 2.1.7 y 2.2.1 indican que λ no es un precalibre débil para $D(\kappa)$ y, por ende, se satisface la contención $WP(D(\kappa)) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\lambda) > \kappa\}$. Finalmente, como las relaciones $C(D(\kappa)) \subseteq P(D(\kappa)) \subseteq WP(D(\kappa))$ siempre se cumplen, el enunciado de (1) es cierto.

Por otro lado, se deduce de la segunda parte del párrafo previo y de la proposición 5.1.6 que los cardinales menores o iguales a κ no pueden ser precalibres* débiles para $D(\kappa)$. De este modo, $WP^*(D(\kappa)) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{CN} : \lambda > \kappa\}$. Además, como $o(D(\kappa)) = 2^\kappa$, la proposición 5.1.5 garantiza que $\{\lambda \in \mathbb{CN} : \lambda > 2^\kappa\} \subseteq C^*(D(\kappa))$.

Por último, concentrémonos en verificar el inciso (3). Notemos que, como κ^+ es un cardinal regular mayor a κ , el inciso (1) mezclado con el inciso (3) de la proposición 5.1.4 garantiza que $\kappa^+ \in C^*(D(\kappa))$. Para terminar, si $2^\kappa = \kappa^+$, entonces esta última pertenencia y las relaciones del inciso (2) permiten ver que:

$$\begin{aligned} \{\lambda \in \mathbb{CN} : \lambda > \kappa\} &= \{\lambda \in \mathbb{CN} : \lambda \geq \kappa^+\} = \{\kappa^+\} \cup \{\lambda \in \mathbb{CN} : \lambda > 2^\kappa\} \\ &\subseteq C^*(D(\kappa)) \subseteq P^*(D(\kappa)) \subseteq WP^*(D(\kappa)) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{CN} : \lambda > \kappa\}; \end{aligned}$$

en consecuencia, el inciso (3) se satisface. $\square$

Con lo expuesto en el ejemplo 5.2.1 podemos caracterizar a los cardinales débilmente inaccesibles en términos de los conceptos que hemos expuesto hasta este momento (véase también [36, 7.6, p. 147]).

Proposición 5.2.2. *Si κ es un cardinal regular, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. κ es débilmente inaccesible.
2. Existe un espacio de Tychonoff X que satisface:
 - (a) κ es un calibre para X y
 - (b) $\kappa = c(X) = k(X) = w\check{s}(X) = \check{s}(X) = d(X)$.
3. Existe un espacio X de tal forma que κ es un precalibre débil para X y $c(X) = \kappa$.

Demostración. Claramente, (2) implica (3). Para ver que (1) implica (2), supongamos que κ es débilmente inaccesible y consideremos el producto topológico $X := \prod\{D(\lambda) : \lambda \in \mathbb{CN} \wedge \lambda < \kappa\}$. Para corroborar que el inciso (a) se cumple, notemos que (1) del ejemplo 5.2.1 asegura que, para cualquier $\lambda \in \mathbb{CN}$ con $\lambda < \kappa$, κ es un calibre para $D(\lambda)$.

De este modo, la regularidad de κ combinada con el teorema 2.5.5 garantizan que κ es un calibre para X .

Para demostrar el inciso (b) comencemos por observar que al ser κ débilmente inaccesible se satisfacen las igualdades $|\{\lambda \in \text{CN} : \lambda < \kappa\}| = \kappa$ y $\sup\{\lambda \in \text{CN} : \lambda < \kappa\} = \kappa$ (véase el lema 1.2.7). De este modo, obtenemos que

$$\begin{aligned} d(X) &= d\left(\prod\{D(\lambda) : \lambda \in \text{CN} \wedge \lambda < \kappa\}\right) \\ &= \log\left(\left|\{\lambda \in \text{CN} : \lambda < \kappa\}\right|\right) \cdot \sup\{d(D(\lambda)) : \lambda \in \text{CN} \wedge \lambda < \kappa\} \\ &= \log(\kappa) \cdot \sup\{\lambda : \omega \leq \lambda < \kappa\} = \log(\kappa) \cdot \kappa = \kappa. \end{aligned}$$

Además, si para cada $\lambda \in \text{CN}$ con $\lambda < \kappa$ denotamos por $\pi_\lambda : X \rightarrow D(\lambda)$ a la λ -ésima proyección, entonces la colección $\{\pi_\lambda^{-1}\{\alpha\} : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en X de cardinalidad λ . Por lo tanto, como κ es límite, $c(X) \geq \sup\{\lambda : \lambda \in \text{CN} \wedge \lambda < \kappa\} = \kappa$.

Enfoquémonos ahora en ver que (1) se deduce de (3). Para esto supongamos que existe un espacio X que tiene precalibre débil κ y verifica la relación $c(X) = \kappa$. Si $\kappa = \omega$ ó κ es un cardinal sucesor, entonces [32, Theorem 12.1, p. 45] y el párrafo que le precede, combinados con la igualdad $c(X) = \kappa$, aseguran la existencia de una familia celular de cardinalidad κ ; una contradicción la proposición 2.1.7. En consecuencia, κ es un cardinal regular, límite y no numerable, es decir, κ es débilmente inaccesible. $\square$

Corolario 5.2.3. *Si κ es un cardinal débilmente inaccesible, entonces existe un espacio de Tychonoff X sin familias celulares de cardinalidad $c(X)$ que satisface las relaciones $c(X) = \kappa = d(X)$ y $\kappa \in C(X)$.*

De vuelta a los ejemplos, también es sencillo determinar las condiciones de cadena para los espacios infinitos, cósmicos y T_2 .

Ejemplo 5.2.4. *Si X es un espacio de Hausdorff infinito y cósmico, entonces:*

1. $C(X) = P(X) = WP(X) = UC$ y
2. $\{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \omega \vee \kappa > 2^\omega\} \subseteq C^*(X) \subseteq P^*(X) \subseteq WP^*(X) \subseteq \{\kappa \in \text{CN} : \kappa > \omega\}$.

Además, si suponemos CH (es decir, si $2^\omega = \omega_1$),

3. $C^*(X) = P^*(X) = WP^*(X) = \{\kappa \in \text{CN} : \kappa > \omega\}$.

Demostración. Por un lado, como X es un espacio separable, la proposición 2.1.8 da la contención $UC \subseteq C(X)$. Por otro lado, el corolario 2.2.9 implica que $WP(X) \subseteq UC$. De este modo, el enunciado del inciso (1) es cierto.

Para demostrar (2) notemos que las hipótesis sobre X garantizan que $o(X) \leq 2^\omega$ y así, el inciso (1) y las proposiciones 5.1.4 y 5.1.5 indican que $\{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \omega \vee \kappa >$

$2^\omega\} \subseteq C^*(X)$. Además, como los espacios infinitos y T_2 tienen familias celulares infinitas, la proposición 5.1.6 implica que $WP^*(X) \subseteq \{\kappa \in \text{CN} : \kappa > \omega\}$.

Finalmente, si CH es cierta basta con utilizar (2) y observar que

$$\begin{aligned} \{\kappa \in \text{CN} : \kappa > \omega\} &= \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \omega \vee \kappa > \omega_1\} \\ &= \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \omega \vee \kappa > 2^\omega\} \\ &\subseteq C^*(X) \subseteq P^*(X) \subseteq WP^*(X) \subseteq \{\kappa \in \text{CN} : \kappa > \omega\}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.2.5. Si κ es un cardinal infinito y $X = [0, \kappa)$, o bien, $X = [0, \kappa]$, entonces:

1. $C(X) = P(X) = WP(X) = \{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) > \kappa\}$, y
2. $\{\lambda \in \text{CN} : \lambda > 2^\kappa\} \subseteq C^*(X) \subseteq P^*(X) \subseteq WP^*(X) \subseteq \{\lambda \in \text{CN} : \lambda > \kappa\}$.

Además, si $2^\kappa = \kappa^+$,

3. $C^*(X) = P^*(X) = WP^*(X) = \{\lambda \in \text{CN} : \lambda > \kappa\}$.

Demostración. En vista de que $d(X) = \kappa$ y $\{\{\alpha\} : \alpha \in S\}$ es una familia celular en X de cardinalidad κ (en donde $S := \{\alpha + 1 : \alpha < \kappa\}$), las pruebas del inciso (1) y de la relación $P^*(X) \subseteq \{\lambda \in \text{CN} : \lambda > \kappa\}$ son similares a las del ejemplo 5.2.1. Adicionalmente, como $o(X) = 2^\kappa$ (cualquier subconjunto de S es un abierto en X y $|S| = \kappa$), la proposición 5.1.5 indica que $\{\lambda \in \text{CN} : \lambda > 2^\kappa\} \subseteq C^*(X)$. Finalmente, el argumento para demostrar (3) es idéntico al dado en el inciso correspondiente del ejemplo 5.2.1. □

Una familia infinita $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es *casi ajena* si $|A \cap B| < \omega$, siempre que $A, B \in \mathcal{A}$ son distintos. Un resultado clásico garantiza la existencia de una familia casi ajena de cardinalidad $\mathfrak{c}$ (véase, por ejemplo, [41, Theorem 1.3, p. 48]). Así, para cualquier número cardinal $\omega \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$ existe una familia casi ajena de cardinalidad κ .

Lema 5.2.6. Si $\kappa \geq \omega$ es un número cardinal con $\kappa < \mathfrak{c}$ y $\text{cf}(\kappa) = \omega$, entonces existe una familia casi ajena $\mathcal{A}$ de tal forma que $|\mathcal{A}| = \kappa$ y, para cualquier $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^\kappa$, existen $A, B, C \in \mathcal{B}$ con $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Demostración. Sea $\{\kappa_n : n < \omega\}$ una sucesión estrictamente creciente de números cardinales con $\kappa_0 = 0$ y $\sup\{\kappa_n : n < \omega\} = \kappa$. También, para cada $n < \omega$, definamos $I_n := [\kappa_n, \kappa_{n+1})$. Además, empleemos la relación $\kappa < \mathfrak{c}$ para fijar una familia casi ajena $\{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ enumerada sin repeticiones. El último paso es definir, para cualquier $\alpha < \kappa$, $A_\alpha := B_\alpha \setminus n$ si y sólo si $\alpha \in I_n$.

Afirmación. La colección $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia casi ajena, indizada fielmente y de tal forma que, para cualquier $J \in [\kappa]^\kappa$, existen $\alpha, \beta, \gamma \in J$ con $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma = \emptyset$.

Primero notemos que, si $\alpha < \beta < \kappa$, y $n, m \in \omega$ cumplen $\alpha \in I_n$ y $\beta \in I_m$, entonces la relación $A_\alpha = A_\beta$ implica que $B_\alpha \setminus n = B_\beta \setminus m$. En consecuencia, B_α está contenido en la unión $n \cup B_\beta$ y, por ende, $B_\alpha = (B_\alpha \cap n) \cup (B_\alpha \cap B_\beta)$, lo cual es absurdo pues B_α es infinito, mientras que esta última unión es finita. Por esta razón, $A_\alpha \neq A_\beta$. Además, como $|A_\alpha \cap A_\beta| \leq |B_\alpha \cap B_\beta| < \omega$, y $\{A_\gamma : \gamma < \kappa\}$ está formada por subconjuntos infinitos de ω , esto demuestra que $\{A_\gamma : \gamma < \kappa\}$ es una familia casi ajena enumerada sin repeticiones.

Por otra parte, si $J \in [\kappa]^\kappa$ y $\alpha, \beta \in J$ son distintos, existe $m < \omega$ con $A_\alpha \cap A_\beta \subseteq m$. De este modo, si tomamos $n > m$ con $I_n \cap J \neq \emptyset$ y $\gamma \in I_n \cap J$, entonces se satisfacen las relaciones $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma \subseteq m \cap (B_\gamma \setminus n) = \emptyset$. En consecuencia, $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma = \emptyset$.

Finalmente, la Afirmación garantiza que $\mathcal{A} := \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es la familia requerida en el enunciado del presente lema. $\square$

Recordemos que la compactación de Stone-Čech de ω , $\beta\omega$, es el espacio de ultrafiltros en ω equipado con la topología generada por la base $\{A^* : A \subseteq \omega\}$ donde $A^* := \{\mathcal{U} \in \beta\omega : A \in \mathcal{U}\}$ para cada $A \subseteq \omega$.

Observación 5.2.7. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena en ω y $\mathcal{U} \in \beta\omega \setminus \omega$, entonces $|\mathcal{A} \cap \mathcal{U}| \leq 1$. Efectivamente, si $A, B \in \mathcal{A}$ son distintos, entonces $|A \cap B| < \omega$ y así, como $\mathcal{U}$ es libre, deducimos que $A \cap B \notin \mathcal{U}$; en consecuencia, $\{A, B\} \not\subseteq \mathcal{U}$.

Lema 5.2.8. Si $\kappa \geq \omega$ es un número cardinal con $\kappa < \mathfrak{c}$ y $\text{cf}(\kappa) = \omega$, entonces $\kappa \notin P^*(\beta\omega)$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena con las características del lema 5.2.6 y consideremos la familia $\mathbb{A} := \{A^* : A \in \mathcal{A}\}$. En virtud de que cada elemento de $\mathcal{A}$ está contenido en un ultrafiltro libre en ω , la observación 5.2.7 implica que $\mathbb{A} \in [\tau_{\beta\omega}^+]^\kappa$. Ahora, sean $\mathbb{B} \in [\mathbb{A}]^\kappa$, $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^\kappa$ con $\mathbb{B} = \{B^* : B \in \mathcal{B}\}$, y $A, B, C \in \mathcal{B}$ tales que $A \cap B \cap C = \emptyset$. De inmediato, no existe $\mathcal{U} \in \beta\omega$ de tal modo que $\{A, B, C\} \subseteq \mathcal{U}$; es decir, $A^* \cap B^* \cap C^* = \emptyset$. Así, $\mathbb{A}$ es un elemento de $[\tau_{\beta\omega}^+]^\kappa$ y, para cualquier $\mathbb{B} \in [\mathbb{A}]^\kappa$, $\mathbb{B}$ no es una familia centrada. En suma, κ no es un precalibre* para $\beta\omega$. $\square$

Ejemplo 5.2.9. Los siguientes enunciados son ciertos.

1. $C(\beta\omega) = P(\beta\omega) = WP(\beta\omega) = UC$.
2. $UC \cup \{\kappa \in \text{CN} : \kappa \geq 2^{\mathfrak{c}}\} \subseteq C^*(\beta\omega)$.
3. $P^*(\beta\omega) \subseteq UC \cup \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) = \omega \wedge \kappa > \mathfrak{c}\}$.

En especial, bajo la hipótesis $2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^+$,

4. $C^*(\beta\omega) = P^*(\beta\omega) = \{\kappa \in \text{CN} : \kappa \geq 2^{\mathfrak{c}}\} \cup \{\kappa \in \text{CN} : \kappa < 2^{\mathfrak{c}} \wedge \text{cf}(\kappa) > \omega\}$.

Demostración. Primero, como $\beta\omega$ es un espacio de Hausdorff infinito y separable, una combinación de las proposiciones 2.1.6, 2.1.7 y 2.1.8 constata que $C(\beta\omega) = P(\beta\omega) = WP(\beta\omega) = UC$.

Por otra parte, en virtud del inciso (1) y de la proposición 5.1.5, la inclusión $UC \cup \{\kappa \in CN : \kappa \geq 2^c\} \subseteq C^*(\beta\omega)$ es clara. Además, si κ es un cardinal infinito con $\kappa < c$ y $cf(\kappa) = \omega$, entonces el lema 5.2.8 asegura que $\kappa \notin P^*(\beta\omega)$; en consecuencia, $P^*(\beta\omega) \subseteq UC \cup \{\kappa \in CN : cf(\kappa) = \omega \wedge \kappa > c\}$. Finalmente, un argumento rutinario demuestra el inciso (4). $\square$

Pregunta 5.2.10. ¿Qué podemos decir de la colección $WP^*(\beta\omega)$?

Una consecuencia de las relaciones expuestas en el ejemplo 5.2.9 es que ciertas condiciones de cadena dependen enteramente de cómo se relacionan entre sí los números cardinales.

Corolario 5.2.11. *Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. $\aleph_\omega < c$ implica que $\aleph_\omega \notin P^*(\beta\omega)$.
2. $\aleph_\omega > 2^c$ implica que $\aleph_\omega \in C^*(\beta\omega)$.

Pregunta 5.2.12. ¿Es cierto que si κ es un cardinal con $c < \kappa < 2^c$ y $cf(\kappa) = \omega$, entonces κ es un calibre* para $\beta\omega$?

5.3. Espacios hiperconexos

El objetivo de esta sección es el cálculo de las condiciones de cadena en los espacios cofinitos. Para ello conviene establecer algunos resultados auxiliares de espacios hiperconexos para utilizarlos más adelante. En lo que sigue extenderemos momentáneamente y de manera natural las nociones de precalibre y precalibre débil para admitir cardinales finitos y positivos.

Primero, no es difícil construir espacios T_1 cuya colección de precalibres débiles evada segmentos iniciales de números naturales. Sean Y el conjunto ω equipado con la topología cofinita y $p \notin \omega$. Para cualquier $1 \leq n < \omega$ el espacio

$$X_n := Y \bigoplus \{(p, m) : m < n\},$$

en donde $\{(p, m) : m < n\}$ tiene la topología discreta, es un espacio T_1 que satisface la relación $[2, n+1] \cap WP(X_n) = \emptyset$.

En el otro extremo, también es posible encontrar una clase amplia de espacios cuya colección de precalibres incluye a casi todos los números cardinales. Un espacio topológico X es *hiperconexo* si para cualesquiera $U, V \in \tau_X^+$ se satisface que $U \cap V \in \tau_X^+$;

equivalentemente, X es hiperconexo si y sólo si τ_X^+ es una familia ligada. Resulta que la hiperconexidad es equivalente a una propiedad que es aparentemente más fuerte.

Proposición 5.3.1. *Un espacio topológico X es hiperconexo si y sólo si τ_X^+ es una familia centrada.*

Demostración. La implicación recíproca es clara. Para verificar la implicación directa procedamos por inducción finita. Supongamos que para algún $n < \omega$ ya se demostró que la intersección de n elementos de τ_X^+ es un conjunto no vacío. Así, si $\{U_k : k < n+1\}$ es un subconjunto de τ_X^+ , resulta entonces que $\bigcap_{k < n} U_k$ es un elemento en τ_X^+ . Por lo tanto, $\bigcap_{k < n+1} U_k$ es no vacío. $\square$

A partir de esta equivalencia se pueden obtener varias más para el concepto de la hiperconexidad en términos de precalibres y precalibres débiles. Obsérvese que 1 siempre es un precalibre de cualquier espacio X .

Proposición 5.3.2. *Consideremos los siguientes enunciados para un espacio topológico X .*

1. X es hiperconexo.
2. Cualquier número cardinal $\kappa > 0$ es precalibre para X .
3. Existe un cardinal finito $k > 1$ que es un precalibre de X .
4. Cualquier número cardinal $\kappa > 0$ es precalibre débil de X .
5. Existe un cardinal finito $k > 1$ que es un precalibre débil para X .
6. Cualquier número cardinal $\kappa > 0$ es precalibre* para X .
7. Existe un cardinal finito $k > 1$ que es un precalibre* de X .
8. Cualquier número cardinal $\kappa > 0$ es precalibre* débil de X .
9. Existe un cardinal finito $k > 1$ que es un precalibre* débil para X .

Entonces las siguientes afirmaciones se verifican.

- (a) Las proposiciones de (1) a (5) son equivalentes
- (b) $(2) \rightarrow (6)$, $(3) \rightarrow (7)$, $(4) \rightarrow (8)$ y $(5) \rightarrow (9)$.
- (c) $(6) \rightarrow (7)$, $(6) \rightarrow (8)$, $(8) \rightarrow (9)$ y $(7) \rightarrow (9)$.
- (d) (9) implica (1) cuando $o(X) \geq \omega$.

En consecuencia, los enunciados de (1) a (9) son equivalentes cuando τ_X es infinito.

Demostración. Para el inciso (a), en vista de que las implicaciones $(2) \rightarrow (3)$, $(2) \rightarrow (4)$, $(4) \rightarrow (5)$ y $(3) \rightarrow (5)$ son claras, únicamente tenemos que argumentar las implicaciones $(1) \rightarrow (2)$ y $(5) \rightarrow (1)$.

Para verificar que (1) implica (2), fijemos un número cardinal positivo κ . Como X es hiperconexo, la proposición 5.3.1 indica que τ_X^+ es una familia centrada. Así, si $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de τ_X^+ , éste se encuentra enumerado por un subconjunto de κ de cardinalidad κ (el mismo κ) y es centrada. Por lo tanto, κ es un precalibre de X .

Para ver que (5) implica (1), supongamos que $1 < k < \omega$ es un precalibre débil de X . Sean U_0 y U_1 dos abiertos no vacíos de X . Además, sea $U_i := U_0$ para cada $2 \leq i < k$. Como k es un precalibre de X , entonces para $\{U_i : i < k\}$ existe $J \in [k]^k$ con $\{U_i : i \in J\}$ es ligada. De esta manera, como el único subconjunto de k de tamaño k es él mismo, se deduce que $\{U_i : i < k\}$ es ligada. En particular $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$. Así, cualesquiera dos abiertos no vacíos de X tienen intersección no vacía, i.e., X es hiperconexo.

Observemos ahora que lo que afirma el inciso (b) es consecuencia de la proposición 5.1.4.(2), y que el enunciado del inciso (c) es evidente. Para verificar lo que asevera (d) notemos que, si $k > 1$ es un cardinal finito de tal modo que k es un precalibre* débil para X , y $U, V \in \tau_X^+$ son distintos, entonces existe $\mathcal{U} \subseteq \tau_X^+$ con $|\mathcal{U} \cup \{U, V\}| = k$. Luego, como los elementos $\mathcal{U} \cup \{U, V\}$ tienen intersección no vacía por pares, $U \cap V \neq \emptyset$, lo cual demuestra que X es hiperconexo. $\square$

Resta comentar si la restricción que tuvimos que añadir en el inciso (d) de la proposición 5.3.2 es imprescindible. Claramente, para cualquier $k \geq 4$ se satisface que k es un precalibre* débil para $D(2)$, pero $D(2)$ no es hiperconexo. Por otra parte, un argumento rutinario muestra que X es un espacio hiperconexo si y sólo si 2 es un precalibre* débil para X . El caso del número 3 necesita un breve argumento adicional.

Notemos primero que si k y l son un par de cardinales finitos tales que $l \leq k < o(X)$, entonces, si k es un precalibre* débil para X , l también es un precalibre* débil para X . En efecto, si $\mathcal{U} \in [\tau_X^+]^l$ y $\mathcal{V} \subseteq \tau_X^+$ es tal que $|\mathcal{U} \cup \mathcal{V}| = k$, entonces, como nuestra hipótesis garantiza que $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ es una familia ligada, deducimos que $\mathcal{U}$ también lo es. En particular, si $2 \leq k < o(X)$ es un precalibre* débil para X , entonces X es un espacio hiperconexo.

Para terminar esta parte, supongamos que 3 es un precalibre* débil para un espacio X . Cuando $3 < o(X)$, el párrafo anterior garantiza que X es hiperconexo; en caso contrario, la condición $o(X) \leq 3$ implica que $\tau_X = \{\emptyset, X\}$, o bien, existe $A \in P(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ con $\tau_X = \{\emptyset, X, A\}$, y en ambos casos se satisface que X es hiperconexo.

El lector tal vez podría sospechar que los espacios topológicos hiperconexos son difíciles de encontrar, sin embargo, como expondremos a continuación, existe una manera genérica de construir topologías hiperconexas a partir de familias centradas.

Sea X un conjunto. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ es un *filtro* en X si:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$;
2. $F \cap G \in \mathcal{F}$ cuando $F, G \in \mathcal{F}$, y
3. si $F \in \mathcal{F}$ y $G \subseteq X$ cumplen $F \subseteq G$, entonces $G \in \mathcal{F}$.

Adicionalmente, un filtro $\mathcal{F}$ es *libre* si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Por último, un filtro $\mathcal{U}$ en X es un *ultrafiltro* si para cualquier $F \subseteq X$ se satisface que $F \in \mathcal{U}$, o bien, $X \setminus F \in \mathcal{U}$.

Sean X un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia centrada. Si $\mathcal{S}' := \{\bigcap \mathcal{T} : \mathcal{T} \in [\mathcal{S}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$, entonces, $\tau(\mathcal{S}) := \{\bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}' \cup \{X, \emptyset\}\}$ es una topología en X . El filtro generado por $\mathcal{S}$ es $\mathcal{F}(\mathcal{S}) := \{F \subseteq X : \exists S \in \mathcal{S}' (S \subseteq F)\}$. Podemos definir también $\mathcal{U}(\mathcal{S}) := \{F \subseteq X : \forall S \in \mathcal{S}' (F \cap S \neq \emptyset)\}$. Obsérvese que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}' \subseteq \tau(\mathcal{S})$, $\tau(\mathcal{S})^+ \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{S})$ y $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ es un ultrafiltro.

Proposición 5.3.3. *Sean X un conjunto, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y τ_X una topología en X . Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. Si $\mathcal{S}$ es centrada, entonces $(X, \tau(\mathcal{S}))$ es hiperconexo (en particular, $(X, \tau(\mathcal{S}))$ no es Hausdorff si $|X| \geq 2$).
2. Cuando (X, τ_X) es hiperconexo y $\mathcal{S} \subseteq \tau_X^+$ es una subbase de τ_X , entonces $\tau_X = \tau(\mathcal{S})$.
3. En el caso en que la colección $\mathcal{S}$ separe puntos (es decir, si para cualquier $x \in X$ se satisface que $\{x\} = \bigcap \{S \in \mathcal{S} : x \in S\}$), las siguientes condiciones son equivalentes:
 - (a) $(X, \tau(\mathcal{S}))$ es infinito y T_1 ;
 - (b) el filtro $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ es libre, y
 - (c) el ultrafiltro $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ es libre en X .

Demostración. Con el objetivo de verificar el inciso (1), supongamos que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es centrada. Sean U y V dos elementos de $\tau(\mathcal{S})^+$. Por definición, existen dos subcolecciones finitas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathcal{S}$ tales que $\bigcap \mathcal{U} \subseteq U$ y $\bigcap \mathcal{V} \subseteq V$. Como $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ es una colección finita de elementos de $\mathcal{S}$ y esta colección es centrada, entonces $\bigcap \mathcal{U} \cap \bigcap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $U \cap V \neq \emptyset$. Es decir, $(X, \tau(\mathcal{S}))$ es hiperconexo.

Con el inciso (2) en mente, supongamos que $\mathcal{S} \subseteq \tau_X^+$ es una subbase de τ_X . Primero, como $\mathcal{S} \subseteq \tau_X$, cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$ es un elemento de τ_X . De este modo, $\mathcal{S}' \subseteq \tau_X$ y, por ende, $\tau(\mathcal{S}) \subseteq \tau_X$. Por otro lado, si $U \in \tau_X$ y $x \in U$, entonces la hipótesis de este inciso produce $S \in \mathcal{S}'$ tal que $x \in S \subseteq U$. En consecuencia, $U \in \tau(\mathcal{S})$ y por lo tanto obtenemos la inclusión $\tau_X \subseteq \tau(\mathcal{S})$.

Concentrémonos ahora en argumentar las equivalencias del inciso (3). Para ver que (a) implica (b), supongamos que $(X, \tau(\mathcal{S}))$ es infinito y T_1 . Sean $x \in X$ y $y \in X \setminus \{x\}$.

Como X es un espacio T_1 , existe $U \in \tau(\mathcal{S})$ con $y \in U$ y $x \notin U$. Luego, la pertenencia $U \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ implica que $x \notin \bigcap \mathcal{F}(\mathcal{S})$. En suma, $\bigcap \mathcal{F}(\mathcal{S}) = \emptyset$.

La inclusión $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{S})$ garantiza que (b) implica (c). Finalmente, supongamos que el inciso (c) es cierto y veamos que (a) también lo es. En vista de que la colección $\mathcal{S}$ separa puntos, el espacio $(X, \tau(\mathcal{S}))$ es automáticamente T_1 . Por otro lado, como $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ es libre, para cada $x \in X$ se satisface que $x \notin \bigcap \mathcal{U}(\mathcal{S})$. A partir de esto se infiere que para cualquier $x \in X$, $\{x\} \notin \mathcal{U}(\mathcal{S})$ y, como $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ es un ultrafiltro, deducimos que $X \setminus \{x\} \in \mathcal{U}(\mathcal{S})$. De esta manera, si X fuese finito, obtendríamos la contradicción $\emptyset = \bigcap \{X \setminus \{x\} : x \in X\} \in \mathcal{U}(\mathcal{S})$. Así, X es infinito. $\square$

Los ejemplos clásicos de espacios hiperconexos son los espacios infinitos equipados con la topología cofinita. Recuerde que un espacio topológico X es *cofinito* si $\tau_X = \{U \subseteq X : |X \setminus U| < \omega\} \cup \{\emptyset\}$. Lo que haremos a continuación será calcular las condiciones de cadena que hemos mencionado hasta ahora en esta clase de espacios. La siguiente observación es fundamental para lograr este objetivo.

Observación 5.3.4. Si X es un espacio cofinito y κ es un número cardinal, entonces κ es un calibre para X si y sólo si para cualquier $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq [X]^{<\omega}$ existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $\bigcup_{\alpha \in J} F_\alpha \neq X$.

Lema 5.3.5. Si X es el espacio cofinito de cardinalidad $\kappa \geq \omega$, entonces:

1. $P(X) = P^*(X) = WP(X) = WP^*(X) = \text{CN}$;
2. $\{\lambda \in \text{CN} : \kappa < \lambda\} \subseteq C^*(X)$, y
3. $\{\lambda \in \text{CN} : \lambda < \kappa \vee \text{cf}(\lambda) > \omega\} \cup \{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda\} \subseteq C(X)$.

Demostración. Primero, como X es un espacio topológico hiperconexo, la proposición 5.3.2 asegura que $\text{CN} \subseteq P(X)$; en consecuencia, el inciso (1) es cierto. Por otro lado, el inciso (2) se desprende de la igualdad $o(X) = \kappa$ y de la proposición 5.1.5.

Para verificar el inciso (3) comencemos por observar que, como cada elemento de $[X]^\omega$ es denso en X , $d(X) = \omega$. Así, la proposición 2.1.8 garantiza la contención $\text{UC} \subseteq C(X)$.

Ahora, supongamos que $\lambda \in \text{CN}$ cumple $\lambda < \kappa$ y fijemos un conjunto $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq [X]^{<\omega}$. En virtud de las relaciones $|\bigcup_{\alpha < \lambda} F_\alpha| \leq \lambda \cdot \sup\{|F_\alpha| : \alpha < \lambda\} \leq \lambda \cdot \omega < \kappa$, se satisface que $\bigcup_{\alpha < \lambda} F_\alpha \neq X$; en especial, $\lambda \in C(X)$ por la observación 5.3.4.

Para comprobar la inclusión $\{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda\} \subseteq C(X)$, sea λ un número cardinal con $\text{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda$. Fijemos una sucesión estrictamente creciente $\{\lambda_\xi : \xi < \text{cf}(\lambda)\}$ con $\sup\{\lambda_\xi : \xi < \text{cf}(\lambda)\} = \lambda$. Con la observación 5.3.4 en mente, sea $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ un subconjunto de $[X]^{<\omega}$ y consideremos la función $f : \lambda \rightarrow [X]^{<\omega}$ definida como $f(\alpha) := F_\alpha$.

Construyamos, mediante recursión transfinita sobre $\text{cf}(\lambda)$, una sucesión de números ordinales $\{\alpha_\xi : \xi < \text{cf}(\lambda)\}$ con $|f^{-1}\{F_{\alpha_\xi}\}| \geq \lambda_\xi$ para cada $\xi < \text{cf}(\lambda)$. Supongamos que para alguna $\xi < \text{cf}(\lambda)$ hemos construido una sucesión $\{\alpha_\eta : \eta < \xi\}$ con las características deseadas. Si no existe $\alpha < \lambda$ de tal forma que $|f^{-1}\{F_\alpha\}| \geq \lambda_\xi$, entonces se satisface que

$$\lambda = \left| \bigcup_{\alpha < \lambda} f^{-1}\{F_\alpha\} \right| \leq |[X]^{<\omega}| \cdot \sup \{|f^{-1}\{F_\alpha\}| : \alpha < \lambda\} \leq \kappa \cdot \lambda_\xi < \lambda,$$

una contradicción. En consecuencia, hay $\xi < \text{cf}(\lambda)$ con $|f^{-1}\{F_{\alpha_\xi}\}| \geq \lambda_\xi$ y, por ende, $\{\alpha_\eta : \eta < \xi + 1\}$ cumple las propiedades requeridas.

Sea $J := \bigcup \{f^{-1}\{F_{\alpha_\xi}\} : \xi < \text{cf}(\lambda)\}$ y observemos que $|J| = \lambda$. Finalmente, como $\bigcup_{\alpha \in J} F_\alpha = \bigcup_{\xi < \text{cf}(\lambda)} F_{\alpha_\xi}$ y

$$\left| \bigcup \{F_{\alpha_\xi} : \xi < \text{cf}(\lambda)\} \right| \leq \text{cf}(\lambda) \cdot \sup \{|F_{\alpha_\xi}| : \xi < \text{cf}(\lambda)\} \leq \text{cf}(\lambda) \cdot \omega < \kappa,$$

sucede que $\bigcup_{\alpha \in J} F_\alpha \neq X$. □

El resultado anterior permite clasificar por completo las condiciones de cadena en los espacios cofinitos.

Ejemplo 5.3.6. Si X es el espacio cofinito de cardinalidad ω , entonces:

1. $P(X) = P^*(X) = WP(X) = WP^*(X) = \text{CN}$;
2. $C^*(X) = \{\lambda \in \text{CN} : \lambda > \omega\}, y$
3. $C(X) = \text{UC}$.

Demostración. En virtud del lema 5.3.5, únicamente es necesario verificar que $\omega \notin C^*(X)$ y $C(X) \subseteq \text{UC}$. Si $X = \{x_n : n < \omega\}$ y para cada $n < \omega$ definimos $F_n := \{x_k : k \leq n\}$, entonces $\{F_n : n < \omega\} \subseteq [X]^{<\omega}$ y $\bigcup_{n \in J} F_n = X$ para toda $J \in [\omega]^\omega$. En consecuencia, la observación 5.3.4 asegura que $\omega \notin C(X)$ y así, $\omega \notin C^*(X)$ (véase el lema 5.1.3). Por último, la relación $\omega \notin C(X)$ y la proposición 2.2.1 implican que $C(X) \subseteq \text{UC}$. □

Ejemplo 5.3.7. Si X es el espacio cofinito de cardinalidad $\kappa > \omega$, entonces $C(X) = C^*(X) = P(X) = P^*(X) = WP(X) = WP^*(X) = \text{CN}$.

Demostración. Claramente, basta constatar que $\text{CN} \subseteq C(X)$. Mostraremos primero que $\kappa \in C(X)$.

Si $\text{cf}(\kappa) > \omega$, la pertenencia $\kappa \in C(X)$ es consecuencia del lema 5.3.5(3). Cuando $\text{cf}(\kappa) = \omega$, fijamos conjuntos $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq [X]^{<\omega}$ y $Y \in [X]^{\aleph_1}$. En este caso, Y hereda la topología cofinita de X y $\{F_\alpha \cap Y : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de $[Y]^{<\omega}$. Así, como

$\kappa \in C(Y)$ (véase el lema 5.3.5(3)), existe $J \in [\kappa]^\kappa$ de tal manera que $\bigcup \{F_\alpha \cap Y : \alpha \in J\} \neq Y$; en consecuencia, $\bigcup_{\alpha \in J} F_\alpha \neq X$ y, por ende, $\kappa \in C(X)$ (véase la observación 5.3.4).

Finalmente, la relación $\kappa > \omega$, la pertenencia $\kappa \in C(X)$ y el lema 5.3.5(3) permiten concluir que

$$CN \subseteq \{\lambda \in CN : \lambda \leq \kappa \vee \text{cf}(\lambda) > \omega\} \cup \{\lambda \in CN : \text{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda\} \subseteq C(X).$$

□

En particular, el ejemplo 5.3.6 tiene una consecuencia que repercute en todos los espacios T_1 infinito numerables. Para sustentar esta afirmación necesitamos demostrar primero un lema auxiliar.

Lema 5.3.8. *Sean τ y σ un par de topologías en un conjunto X . Si $\sigma \subseteq \tau$, entonces $C(X, \tau) \subseteq C(X, \sigma)$, $P(X, \tau) \subseteq P(X, \sigma)$, $WP(X, \tau) \subseteq WP(X, \sigma)$, $C^*(X, \tau) \subseteq C^*(X, \sigma)$, $P^*(X, \tau) \subseteq P^*(X, \sigma)$ y $WP^*(X, \tau) \subseteq WP^*(X, \sigma)$.*

Demostración. Si $\kappa \in C(X, \tau)$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de σ^+ , entonces la inclusión $\sigma \subseteq \tau$ implica que $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ está contenido en τ^+ y, por lo tanto, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \neq \emptyset$. En consecuencia, $\kappa \in C(X, \sigma)$. Las contenciones restantes son similares. □

Teorema 5.3.9. *Si X es un espacio T_1 infinito numerable, entonces $UC = C(X) \subseteq C^*(X) \subseteq \{\lambda \in CN : \lambda > \omega\}$.*

Demostración. Por un lado, como cualquier topología T_1 extiende a la topología co-finita, el ejemplo 5.3.6 y el lema 5.3.8 implican las inclusiones $C(X) \subseteq UC$ y $C^*(X) \subseteq \{\lambda \in CN : \lambda > \omega\}$. Por otro lado, como X es un espacio separable, la proposición 2.1.8 garantiza que $UC \subseteq CN$. Finalmente, la contención $C(X) \subseteq C^*(X)$ siempre se verifica. □

Una pregunta natural es si en el teorema 5.3.9 se puede alcanzar la igualdad $C^*(X) = \{\lambda \in CN : \lambda > \omega\}$. Cerramos esta sección con un teorema en el cual demostramos que esta relación es independiente de ZFC.

Teorema 5.3.10. *Los siguientes enunciados se satisfacen.*

1. *Si CH se cumple, entonces cualquier espacio X infinito numerable y T_1 satisface la relación $C^*(X) = \{\lambda \in CN : \lambda > \omega\}$.*
2. *Bajo la hipótesis $\aleph_\omega < \mathfrak{c}$, existe un espacio X infinito numerable y metrizable tal que $C^*(X) \neq \{\lambda \in CN : \lambda > \omega\}$.*

Demostración. Para verificar el inciso (1) fijemos X , un espacio infinito numerable y T_1 . Una observación inmediata es que $o(X) \leq c$ porque τ_X es una familia de subconjuntos de X . De esta manera, bajo CH se satisface que $o(X) \leq \omega_1$. Únicamente resta utilizar las relaciones $\omega_1 \in C(X) \subseteq C^*(X)$ y $\{\lambda \in \mathbb{CN} : \lambda > o(X)\} \subseteq C^*(X)$ (véase la proposición 5.1.5) para obtener que $C^*(X) = \{\lambda \in \mathbb{CN} : \lambda > \omega\}$.

Para comprobar el inciso (2), denotemos por X al conjunto ω equipado con la topología discreta. Empleemos el lema 5.2.6 para encontrar una familia casi ajena $\mathcal{A}$ de tal manera que $|\mathcal{A}| = \aleph_\omega$ y, para cualquier $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{\aleph_\omega}$, existen $A, B, C \in \mathcal{B}$ con $A \cap B \cap C = \emptyset$. En estas circunstancias, como $\mathcal{A}$ es un subconjunto de τ_X^+ de tamaño $\aleph_\omega$, deducimos que $\aleph_\omega$ no es un precalibre* para X ; en consecuencia, $C^*(X) \neq \{\lambda \in \mathbb{CN} : \lambda > \omega\}$. $\square$

5.4. Condiciones de cadena* en sumas topológicas

Para fines de la presente sección, λ siempre representará un número cardinal positivo no necesariamente infinito. Nuestro objetivo es establecer resultados en el mismo tenor que los expuestos en la sección 2.4. Naturalmente, como seguramente ya anticipa el lector a estas alturas del texto, no alcanzaremos esta meta sin axiomas adicionales.

En primer término, con respecto a las sumas topológicas, el siguiente resultado se desprende de la proposición 5.1.12.

Proposición 5.4.1. *Si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, entonces κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para cada X_α .*

Además, en virtud de la proposición 2.4.2 y el lema 5.1.3, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.4.2. *Sean X un espacio topológico y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de subespacios de X . Si κ es un cardinal regular con $\kappa > \lambda$ y κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para cada X_α , entonces κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para $\bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$.*

Recuerde que si κ es un cardinal singular, entonces se satisface la relación $\kappa = \sup\{\mu^+ : \mu < \kappa\}$.

Teorema 5.4.3. *Sea κ un cardinal singular de tal modo que $\text{cf}(\kappa) > \lambda$ y, para cualquier cardinal regular $\text{cf}(\kappa) \leq \mu < \kappa$, se satisface que $\mu^\lambda = \mu$. Además, sean X un espacio topológico y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de subespacios de X . Si κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para cada X_α , entonces κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para $\bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$.*

Demostración. Sean $Y := \bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ y $\{U_\gamma : \gamma < \kappa\}$ un subconjunto de τ_Y^+ enumerado sin repeticiones. El siguiente enunciado es la piedra angular del argumento.

Afirmación. Existe $\alpha < \lambda$ con $|\{U_\gamma \cap X_\alpha : \gamma < \kappa\}| = \kappa$.

En caso contrario, para cada $\alpha < \lambda$ se satisface que $\kappa_\alpha := |\{U_\gamma \cap X_\alpha : \gamma < \kappa\}|$ es menor a κ . De este modo, la condición $\text{cf}(\kappa) > \lambda$ implica que $\sup\{\kappa_\alpha : \alpha < \lambda\} < \kappa$ y, por lo tanto, existe $\mu < \kappa$ de tal manera que $\max\{\text{cf}(\kappa), \sup\{\kappa_\alpha : \alpha < \lambda\}\} < \mu^+$.

Ahora, como la función $\{U_\gamma : \gamma < \kappa\} \rightarrow \{(U_\gamma \cap X_\alpha)_{\alpha < \lambda} : \gamma < \kappa\}$ determinada mediante $U_\gamma \mapsto (U_\gamma \cap X_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ es inyectiva, y $\{(U_\gamma \cap X_\alpha)_{\alpha < \lambda} : \gamma < \kappa\}$ es un subconjunto del producto $\prod_{\alpha < \lambda} \{U_\gamma \cap X_\alpha : \gamma < \kappa\}$, inferimos las relaciones

$$\kappa \leq \left| \prod_{\alpha < \lambda} \{U_\gamma \cap X_\alpha : \gamma < \kappa\} \right| \leq \sup\{\kappa_\alpha : \alpha < \lambda\}^\lambda \leq (\mu^+)^\lambda.$$

De este modo, como por hipótesis sabemos que $(\mu^+)^\lambda = \mu^+$, deducimos el absurdo $\kappa \leq \mu^+$.

Finalmente, si $\alpha < \lambda$ cumple $|\{U_\gamma \cap X_\alpha : \gamma < \kappa\}| = \kappa$, entonces el lema 5.1.2 implica la existencia de $J \in [\kappa]^\kappa$ con las siguientes características:

1. $\{U_\gamma \cap X_\alpha : \gamma \in J\} = \{U_\gamma \cap X_\alpha : \gamma < \kappa\} \setminus \{\emptyset\}$;
2. si $\gamma, \delta \in J$ son distintos, entonces $(U_\gamma \cap X_\alpha) \neq (U_\delta \cap X_\alpha)$, y
3. $\{U_\gamma \cap X_\alpha : \gamma \in J\}$ tiene intersección no vacía.

En consecuencia, $|\{U_\gamma : \gamma \in J\}| = \kappa$ y $\{U_\gamma : \gamma \in J\}$ tiene intersección no vacía. Así, Y tiene calibre* κ . $\square$

En el siguiente resultado, la implicación directa es consecuencia de la proposición 5.4.1, mientras que la implicación recíproca se deduce a partir de la proposición 5.4.2 y el teorema 5.4.3.

Teorema 5.4.4. *Sea κ un número cardinal de tal forma que $\text{cf}(\kappa) > \lambda$ y para cualquier cardinal regular $\text{cf}(\kappa) \leq \mu < \kappa$ se satisface $\mu^\lambda = \mu$. Si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos, entonces $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ tiene calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) κ si y sólo si cada sumando tiene calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) κ .*

Ahora recuerde que si μ es un cardinal regular con $\lambda < \mu$, entonces GCH implica que $\mu^\lambda = \mu$ (véase [41, Lemma 10.42, p. 34]). De esta manera, el siguiente resultado es cierto (compárese con la proposición 2.4.3).

Teorema 5.4.5. *Sea κ un número cardinal con $\text{cf}(\kappa) > \lambda$. Si GCH es cierta y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos, entonces $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ tiene calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) κ si y sólo si cada sumando tiene calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) κ .*

Con el teorema 5.4.4 disponible, podemos obtener dentro de ZFC un resultado similar a los teoremas 5.1.11 y 5.1.20 para cardinales no numerables con cofinalidad numerable.

Teorema 5.4.6. *Si κ es un cardinal no numerable con $\text{cf}(\kappa) = \omega$, entonces existe un espacio topológico X de tal modo que X es compacto y T_1 , $o(X) = \kappa = |X|$ y $\kappa \in C^*(X) \setminus C(X)$.*

Demostración. Sean Y el espacio cofinito de cardinalidad κ , Z el espacio cofinito de cardinalidad ω y $X := Y \oplus Z$. Claramente, X es compacto, T_1 y $o(X) = \kappa = |X|$. Por otra parte, como en el ejemplo 5.3.6 vimos que ω no es un calibre para Z , la proposición 2.1.9 garantiza que $\omega \notin C(X)$ y, por ende, $\kappa \notin C(X)$ (véase la proposición 2.2.1). Finalmente, una combinación de lo demostrado en los ejemplos 5.3.6 y 5.3.7 con el teorema 5.4.4 asegura que $\kappa \in C^*(X)$. $\square$

Con una hipótesis adicional, podemos obtener una variante del teorema 5.4.6 en la cual se logra que $\kappa \notin \text{WP}(X)$.

Teorema 5.4.7. *Si κ es un cardinal con $\kappa > \mathfrak{c}$ y $\text{cf}(\kappa) = \omega$, entonces existe un espacio topológico X de tal forma que X es localmente compacto y T_1 , $o(X) = \kappa = |X|$ y $\kappa \in C^*(X) \setminus \text{WP}(X)$.*

Demostración. Sean Y el espacio cofinito de cardinalidad κ , Z el espacio discreto de cardinalidad ω y $X := Y \oplus Z$. Evidentemente, X es localmente compacto, T_1 y $o(X) = \kappa = |X|$. Por otro lado, como en el ejemplo 5.2.1 demostramos que ω no es un precalibre débil para Z , la proposición 2.1.9 asegura que $\omega \notin \text{WP}(X)$ y, por lo tanto, $\kappa \notin \text{WP}(X)$ (véase la proposición 2.2.1). Para terminar, una mezcla de la proposición 5.1.5, el ejemplo 5.3.7 y el teorema 5.4.4 constata que $\kappa \in C^*(X)$. $\square$

Notemos que si $\omega \leq \kappa \leq \lambda$ es un número cardinal, entonces claramente κ no es un precalibre* débil de $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, aún si κ es un calibre para cada uno de los X_α . En el siguiente ejemplo mostraremos que la condición $\text{cf}(\kappa) > \lambda$ es imprescindible en el teorema 5.4.5, incluso cuando $\kappa > \lambda$.

Ejemplo 5.4.8. *Si $\text{cf}(\lambda) > \omega$, entonces existe una colección de espacios compactos de Hausdorff $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de tal modo que $\aleph_\lambda \notin \text{WP}^*(\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha)$ aunque $o(X_\alpha) = 2^{\aleph_\lambda} = |X_\alpha|$ y $\aleph_\lambda \in C(X_\alpha)$ para cada $\alpha < \lambda$.*

Demostración. Para cada $\alpha < \lambda$ sea X_α el cubo de Cantor $D(2)^{\aleph_\lambda}$. Observemos que el lema 1.4.6 y el ejemplo 2.5.8 garantizan que $\aleph_\lambda \in C(X_\alpha)$ y $o(X_\alpha) = 2^{\aleph_\lambda} = |X_\alpha|$, mientras que el lema 5.1.10 asegura que $\aleph_\lambda \notin \text{WP}^*(\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha)$. $\square$

Demostremos en el teorema 5.4.6 que si X es la suma topológica del espacio cofinito de cardinalidad $\aleph_\omega$ con el espacio cofinito de cardinalidad ω , entonces $\aleph_\omega \in C^*(X)$. En este caso particular, es una consecuencia de la proposición 5.1.12 y el ejemplo 5.3.6 que $\omega \notin C^*(X)$. Por esta razón, el teorema 5.1.22 implica el siguiente resultado.

Corolario 5.4.9. *Existe un espacio topológico X y una extensión Y de X de tal manera que $\aleph_\omega \in C^*(X)$ y $\aleph_\omega \notin C^*(Y)$.*

5.5. Condiciones de cadena* en productos topológicos

Con respecto a los productos topológicos, la siguiente pareja de resultados se prueban de manera similar a las proposiciones 2.5.1 y 2.5.2.

Proposición 5.5.1. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos.*

1. *Si f es continua y suprayectiva, entonces $C^*(X) \subseteq C^*(Y)$, $P^*(X) \subseteq P^*(Y)$ y $WP^*(X) \subseteq WP^*(Y)$.*
2. *Cuando f es abierta e inyectiva, $C^*(Y) \subseteq C^*(X)$, $P^*(Y) \subseteq P^*(X)$ y $WP^*(Y) \subseteq WP^*(X)$.*

Proposición 5.5.2. *Si κ es un cardinal infinito, λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para el producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, entonces κ es un calibre* (resp., precalibre*; precalibre* débil) para cada factor.*

Demostremos a continuación que las condiciones de cadena y las condiciones de cadena* coinciden “verdaderamente” en los cubos de Cantor, es decir, si $\kappa \leq 2^\lambda$ es un calibre* para $D(2)^\lambda$, entonces κ es un calibre para $D(2)^\lambda$.

Teorema 5.5.3. *Sean κ un número cardinal con $\text{cf}(\kappa) = \omega$ y Z un espacio topológico que satisface $\text{o}(Z) \geq \kappa$. Si $X \cong Y \times Z$, en donde Y es un espacio infinito Hausdorff, entonces X no tiene precalibre* débil κ .*

Demostración. Como $\text{o}(Z) \geq \kappa$, existe una colección de cardinalidad κ , $\mathcal{U}$, de subconjuntos abiertos en Z dos a dos diferentes. Como Y es un espacio Hausdorff infinito, éste contiene una familia celular numerable $\mathcal{V}$ formada por subconjuntos abiertos. Indiquemos a $\mathcal{U}$ y a $\mathcal{V}$ de manera precisa: $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $\mathcal{V} = \{V_n : n < \omega\}$. Sea $\{\kappa_n : n < \omega\}$ una sucesión de números estrictamente creciente de números cardinales de tal modo que $\kappa_0 := 0$ y $\sup\{\kappa_n : n < \omega\} = \kappa$.

Para cada $n < \omega$ definimos $\mathcal{W}_n := \{V_n \times U_\alpha : \kappa_n \leq \alpha < \kappa_{n+1}\}$. Resulta ahora que $\mathcal{W} := \bigcup_{n < \omega} \mathcal{W}_n$ es una colección de abiertos distintos dos a dos en $Y \times Z$ de cardinalidad

κ . Afirmamos que para cualquier colección $\mathcal{W}'$ de $\mathcal{W}$ de cardinalidad κ , podemos encontrar dos elementos de $\mathcal{W}'$ con intersección vacía.

En efecto, como la cardinalidad de $\mathcal{W}'$ es κ , podemos encontrar $n < m < \omega$ tales que $\mathcal{W}'$ contiene un elemento de $\mathcal{W}_n$ y otro de $\mathcal{W}_m$, digamos $V_n \times U_\alpha$ y $V_m \times U_\beta$. Como $V_n \cap V_m = \emptyset$, entonces $(V_n \times U_\alpha) \cap (V_m \times U_\beta) = \emptyset$. Esto completa la demostración. $\square$

Para todo cardinal infinito λ se satisface que $D(2)^\lambda \cong D(2)^\lambda \times D(2)^\lambda$. Por lo tanto, el lema 1.4.6 y el teorema 5.5.3 implican:

Corolario 5.5.4. *Si λ es un cardinal infinito, κ es un número cardinal con $\kappa \leq 2^\lambda$ y $\text{cf}(\kappa) = \omega$, entonces $D(2)^\lambda$ no tiene precalibre* débil κ .*

Con este antecedente podemos calcular con precisión las condiciones de cadena* en los cubos de Cantor.

Corolario 5.5.5. *Si λ es un cardinal infinito, entonces:*

1. $\text{UC} = \text{C}(D(2)^\lambda) = \text{P}(D(2)^\lambda) = \text{WP}(D(2)^\lambda)$ y
- 2.

$$\begin{aligned} \text{C}^*(D(2)^\lambda) &= \text{P}^*(D(2)^\lambda) = \text{WP}^*(D(2)^\lambda) \\ &= \{\kappa \in \text{CN} : \kappa > 2^\lambda\} \cup \{\kappa \in \text{CN} : \kappa \leq 2^\lambda \wedge \text{cf}(\kappa) > \omega\}. \end{aligned}$$

Demostración. El primer inciso fue probado en el ejemplo 2.5.8(2). Para el inciso (2), las relaciones $\text{UC} = \text{C}(D(2)^\lambda) \subseteq \text{C}^*(D(2)^\lambda)$, el lema 1.4.6 y la proposición 5.1.5 implican que

$$\{\kappa \in \text{CN} : \kappa > 2^\lambda\} \cup \{\kappa \in \text{CN} : \kappa \leq 2^\lambda \wedge \text{cf}(\kappa) > \omega\} \subseteq \text{C}^*(D(2)^\lambda).$$

Por último, el corolario 5.5.4 asegura que ningún $\kappa \leq 2^\lambda$ de cofinalidad numerable es precalibre* débil de $D(2)^\lambda$, con lo cual obtenemos las igualdades deseadas. $\square$

Vale la pena exhibir una demostración constructiva de una parte del corolario 5.5.5 usando una técnica diagonal.

Teorema 5.5.6. *Si κ es un cardinal singular de cofinalidad numerable, entonces el cubo de Cantor $D(2)^\kappa$ no tiene precalibre* débil κ .*

Demostración. Sea $\{\kappa_n : n < \omega\}$ una sucesión estrictamente creciente de números cardinales con $\kappa_0 := \omega$ y $\sup\{\kappa_n : n < \omega\} = \kappa$. Vamos a construir un conjunto I de cardinalidad κ y una colección $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ de abiertos distintos tal que, para cualquier $J \in [I]^\kappa$, se cumple que la familia $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ no es ligada.

Para cualquier $n < \omega$, sea $I_n := [\kappa_n, \kappa_{n+1})$. Además, si $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ son ordinales distintos en κ y $t : \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ es una función, definimos

$$[\alpha_0, \dots, \alpha_n; t(\alpha_0), \dots, t(\alpha_n)] := \{x \in D(2)^\kappa : \forall i \in \{0, \dots, n\} (x(\alpha_i) = t(\alpha_i))\}.$$

Observe que estos subconjuntos de $D(2)^\kappa$ son abiertos canónicos en el cubo.

Para cualesquiera $n < \omega$ y $\alpha \in I_n$, definimos

$$U_\alpha := [0, \dots, n, n+1, \alpha; 1, \dots, 1, 0, 0].$$

De este modo, $x \in U_\alpha$ si y sólo si $x[\{0, \dots, n\}] \subseteq \{1\}$ y $x(n+1) = 0 = x(\alpha)$. Nuestro objetivo es demostrar que si $I := \bigcup_{n < \omega} I_n$, entonces $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ tiene cardinalidad κ y $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ no es ligada para todo $J \in [I]^\kappa$.

Primero, si $\alpha, \beta \in I$ son distintos y $n, m < \omega$ cumplen $\alpha \in I_n$ y $\beta \in I_m$, entonces la función $x : \kappa \rightarrow D(2)$ determinada mediante

$$x := ((\{n+1, \alpha\}) \times \{0\}) \cup ((\kappa \setminus \{n+1, \alpha\}) \times \{1\})$$

pertenece a la diferencia $U_\alpha \setminus U_\beta$; en especial, $U_\alpha \neq U_\beta$.

Por otra parte, si J es un subconjunto de I de cardinalidad κ , necesariamente existen $n < m < \omega$ tales que $J \cap I_n \neq \emptyset \neq J \cap I_m$. En consecuencia, si $\alpha \in J \cap I_n$ y $\beta \in J \cap I_m$, entonces claramente $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ pues cualquier elemento de U_α toma el valor 0 en $n+1$, mientras que cualquier elemento de U_β toma el valor 1 en $n+1$.

En suma, I es un conjunto de tamaño κ y $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es una colección de κ abiertos distintos de $D(2)^\kappa$ que satisfacen que $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ no es ligada para $J \in [I]^\kappa$. Por esta razón, $D(2)^\kappa$ no tiene precalibre* débil κ . $\square$

Corolario 5.5.7. Si κ es un número cardinal singular de cofinalidad numerable y $\lambda \geq \kappa$, entonces el cubo de Cantor $D(2)^\lambda$ no tiene precalibre* débil κ .

Demostración. En efecto, la proyección natural $D(2)^\lambda \rightarrow D(2)^\kappa$ es continua y suprayectiva. Por la proposición 5.5.1, si κ fuera un precalibre* débil de $D(2)^\lambda$ también lo sería de $D(2)^\kappa$, lo cual no es posible por el teorema 5.5.6. $\square$

Podemos extender el corolario 5.5.5 para ciertas clases de espacios de Hausdorff infinitos. Para ello necesitamos demostrar primero algunos resultados auxiliares al respecto del comportamiento de la función cardinal o en los productos topológicos.

La cuestión fundamental que contestaremos parcialmente en unos momentos es la siguiente:

Pregunta 5.5.8. Sean X un espacio topológico y λ un cardinal infinito. ¿Bajo qué condiciones sobre X y λ es posible expresar a $o(X^\lambda)$ en términos de λ y $\phi(X)$ para alguna función cardinal topológica ϕ aplicada a X ? En particular, ¿cuándo $o(X^\lambda) = 2^{w(X) \cdot \lambda}$ (resp., $o(X^\lambda) = 2^{|X| \cdot \lambda}$, $o(X^\lambda) = 2^{o(X) \cdot \lambda}$, $o(X^\lambda) = o(X)^\lambda$)?

Lema 5.5.9. Sea λ un número cardinal infinito. Además, para cada $\alpha < \lambda$ sea Y_α un espacio de Hausdorff (discreto) con $1 < |Y_\alpha| < \omega$. Si $Y := \prod_{\alpha < \lambda} Y_\alpha$, entonces $o(Y) = 2^\lambda$.

Demostración. Por un lado, como $D(2)^\lambda$ se encaja en Y y Y es T_2 , $2^\lambda \leq o(Y)$ (véase [32, Theorem 3.1(b), p. 10]). Por otro lado, Y se puede sumergir como subespacio en el cubo $D(2)^\lambda$; en consecuencia $o(Y) \leq 2^\lambda$ (véase el lema 1.4.6). $\square$

Sean $\mathcal{P}$ una clase de espacios topológicos y ϕ una función cardinal topológica. Diremos que $(\mathcal{P}, \phi)$ es una *pareja finitamente productiva* si $\mathcal{P}$ es cerrada bajo productos finitos y, para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{P}$, se cumple $o(X) \leq 2^{\phi(X)}$ y $\phi(X \times Y) = \phi(X) \cdot \phi(Y)$. De manera similar, $(\mathcal{P}, \phi)$ se llamará *pareja productiva* si $\mathcal{P}$ es cerrada bajo productos arbitrarios, $o(Y) \leq 2^{\phi(Y)}$ y $\phi(\prod_{\alpha < \lambda} Y_\alpha) = \lambda \cdot \sup\{\phi(Y_\alpha) : \alpha < \lambda\}$ cuando $Y \in \mathcal{P}$ y $\{Y_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathcal{P}$.

Estas convenciones permitirán enunciar con más simpleza los resultados que presentaremos a continuación.

Antes de continuar, enunciamos un lema auxiliar que será utilizado dos veces en los argumentos que siguen.

Lema 5.5.10. Si X y Y son espacios topológicos con $\max\{o(X), o(Y)\} \geq \omega$, entonces $o(X) \cdot o(Y) \leq o(X \times Y)$.

Demostración. Primero, observemos que $o(X) \cdot o(Y) = \max\{o(X), o(Y)\}$. Por lo tanto, como $\tau_X \rightarrow \tau_{X \times Y}$ y $\tau_Y \rightarrow \tau_{X \times Y}$, dadas respectivamente por $U \mapsto U \times Y$ y $V \mapsto X \times V$, son inyectivas, se sigue que $o(X) \cdot o(Y) \leq o(X \times Y)$. $\square$

Cabe señalar que si las topologías τ_X y τ_Y son finitas, entonces el lema 5.5.10 puede no cumplirse. Por ejemplo, si X es el espacio de Sierpiński y Y es el espacio discreto de cardinalidad dos, entonces $o(X) \cdot o(Y) = 12$, mientras que $o(X \times Y) = 9$.

Proposición 5.5.11. Sea $(\mathcal{P}, \phi)$ una pareja finitamente productiva. Si X y Y pertenecen a la clase $\mathcal{P}$, $o(X) = 2^{\phi(X)}$, $o(Y) = 2^{\phi(Y)}$ y $\max\{o(X), o(Y)\} \geq \omega$, entonces $o(X \times Y) = o(X) \cdot o(Y)$, es decir, $o(X \times Y) = 2^{\phi(X) \cdot \phi(Y)}$.

Demostración. En efecto, por el lema 5.5.10,

$$2^{\phi(X) \cdot \phi(Y)} = 2^{\phi(X)} \cdot 2^{\phi(Y)} = o(X) \cdot o(Y) \leq o(X \times Y) \leq 2^{\phi(X \times Y)} = 2^{\phi(X) \cdot \phi(Y)}.$$

$\square$

Corolario 5.5.12. Sea $\phi \in \{w, nw\}$ (véase [32]). Si X y Y son espacios topológicos tales que $o(X) = 2^{\phi(X)}$, $o(Y) = 2^{\phi(Y)}$ y $\max\{o(X), o(Y)\} \geq \omega$, entonces $o(X \times Y) = o(X) \cdot o(Y) = 2^{\phi(X) \cdot \phi(Y)}$. Además, la misma conclusión se obtiene cuando X y Y son infinitos y $\phi = |\cdot|$.

La proposición 5.5.11 sugiere la siguiente pregunta natural:

Pregunta 5.5.13. ¿Es verdad que si X satisface $o(X) = 2^\kappa$ y Y satisface $o(Y) = 2^\lambda$, entonces $o(X \times Y)$ es de la forma 2^θ para algun cardinal θ ?

Sean X y Y un par de espacios topológicos. Como ya se ha señalado, $o(X) \cdot o(Y) \leq o(X \times Y)$, siempre que $\max\{o(X), o(Y)\} \geq \omega$ (véase el lema 5.5.10). Por otra parte, si $W \in \tau_{X \times Y}$, para cualquier $w \in W$ existen $U_w \in \tau_X$ y $V_w \in \tau_Y$ de tal manera que $w \in U_w \times V_w \subseteq W$. De este modo, la función $\tau_{X \times Y} \rightarrow P(\tau_X) \times P(\tau_Y)$ determinada mediante $W \mapsto (\{U_w : w \in W\}, \{V_w : w \in W\})$ es inyectiva y, por lo tanto, si $o(X) \geq \omega$ ó $o(Y) \geq \omega$, entonces $o(X \times Y) \leq 2^{o(X) \cdot o(Y)}$.

En suma, si X y Y satisfacen $\max\{o(X), o(Y)\} \geq \omega$, entonces $o(X) \cdot o(Y) \leq o(X \times Y) \leq 2^{o(X) \cdot o(Y)}$; en particular, si $o(X) = 2^\kappa$, $o(Y) = 2^\lambda$ y $\mu := 2^{\kappa \cdot \lambda}$, se verifican las relaciones $\mu \leq o(X \times Y) \leq 2^\mu$. Por esta razón, bajo GCH la respuesta a la pregunta 5.5.13 es afirmativa pues, con esta hipótesis, $o(X \times Y) \in \{\mu, 2^\mu\}$.

Retomando la exposición, el siguiente resultado es una especie de generalización de la proposición 5.5.11, salvo por la condición adicional que exigimos respecto a la infinitud de cada topología.

Proposición 5.5.14. Sea $(\mathcal{P}, \phi)$ una pareja productiva. Si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia formada por elementos de $\mathcal{P}$, $\min\{o(X_\alpha) : \alpha < \lambda\} \geq \omega$ y $o(X_\alpha) = 2^{\phi(X_\alpha)}$ para cada $\alpha < \lambda$, entonces $o(X) = \prod_{\alpha < \lambda} o(X_\alpha) = 2^{\lambda \cdot \kappa}$, en donde $X := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ y $\kappa := \sup\{\phi(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}$.

Demostración. Comencemos por definir una función inyectiva $f : \prod_{\alpha < \lambda} (\tau_{X_\alpha} \setminus \{X_\alpha\}) \rightarrow \tau_X$. Para cada $u \in \prod_{\alpha < \lambda} (\tau_{X_\alpha} \setminus \{X_\alpha\})$, notemos que el conjunto

$$f(u) := \bigcup_{\alpha < \lambda} \pi_\alpha^{-1}[u(\alpha)]$$

es un subconjunto abierto de X .

Para constatar que f es inyectiva, sean $u, v \in \prod_{\alpha < \lambda} (\tau_{X_\alpha} \setminus \{X_\alpha\})$ distintos y fijemos $\beta < \alpha$ de tal forma que $u(\beta) \neq v(\beta)$. Supongamos, sin perder generalidad, que existe $z \in u(\beta) \setminus v(\beta)$. Para cada $\alpha \in \lambda \setminus \{\beta\}$, empleemos que $v(\alpha) \neq X_\alpha$ para hallar $x_\alpha \in X_\alpha \setminus v(\alpha)$, y consideremos la función

$$x := \{(\beta, z)\} \cup \{(\alpha, x_\alpha) : \alpha \in \lambda \setminus \{\beta\}\}.$$

En estas circunstancias, x pertenece a $f(u)$ pero no es elemento de $f(v)$. Esto significa que f es inyectiva; en consecuencia, $\prod_{\alpha < \lambda} o(X_\alpha) \leq o(X)$.

De este modo, un argumento rutinario de aritmética cardinal muestra que

$$\begin{aligned} 2^{\lambda \cdot \kappa} &= 2^{\lambda \cdot \sup\{\phi(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}} = 2^{\sum_{\alpha < \lambda} \phi(X_\alpha)} = \prod_{\alpha < \lambda} 2^{\phi(X_\alpha)} \\ &= \prod_{\alpha < \lambda} o(X_\alpha) \leq o(X) \leq 2^{\phi(X)} = 2^{\lambda \cdot \sup\{\phi(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}} = 2^{\lambda \cdot \kappa}. \end{aligned}$$

En suma, $o(X) = \prod_{\alpha < \lambda} o(X_\alpha) = 2^{\lambda \cdot \kappa}$. □

Corolario 5.5.15. Sea $(\mathcal{P}, \phi)$ una pareja productiva. Si X es un elemento de $\mathcal{P}$, $o(X) \geq \omega$ y $o(X) = 2^{\phi(X)}$, entonces $o(X^\lambda) = o(X)^\lambda = 2^{\lambda \cdot \phi(X)} = 2^{\phi(X^\lambda)}$.

Se sabe que si no hay cardinales inaccesibles y además suponemos GCH, entonces cualquier espacio de Hausdorff infinito satisface que $o(X) = 2^\kappa$ para algún cardinal κ (véase [32, Theorem 13.1, p. 48]). Esta observación combinada con lo que hemos expuesto hasta ahora sugiere la siguiente cuestión:

Pregunta 5.5.16. Si X es un espacio topológico y ϕ es una función cardinal, ¿bajo qué condiciones se satisface que $o(X) = 2^{\phi(X)}$?

Por ejemplo, con respecto a la función cardinal $\phi = w$, en [32, Theorem 8.1(e), p. 32] se demuestra que si X es un espacio infinito y metrizable, entonces $o(X) = 2^{w(X)}$. Por otra parte, en el ámbito de los espacios compactos de Hausdorff no siempre se satisface que $o(X) = 2^{w(X)}$. Para ilustrar este hecho notemos que si X es la Doble Flecha de Alexandroff-Urysohn (véase [32, Example 14.4, p. 51]), entonces $o(X) = \mathfrak{c} = w(X)$. No obstante, en ciertas subclases de los espacios compactos T_2 sí podemos obtener la relación $o(X) = 2^{w(X)}$.

En [10, Corollary 1, p. 608] se prueba que los espacios compactos extremadamente disconexos satisfacen la igualdad $|X| = 2^{w(X)}$. En consecuencia, como $|X| \leq o(X) \leq 2^{w(X)}$, concluimos que $o(X) = 2^{w(X)}$. Por ejemplo, cualquier espacio de Stone de un álgebra Booleana completa verifica esta relación (véase [54, Theorem (d), p. 448]).

Por otro lado, decimos que un espacio compacto es *poliádico* si es imagen continua de una potencia de la compactación por un punto de un espacio discreto infinito. Si X es un compacto poliádico, entonces X admite un subespacio discreto de cardinalidad $w(X)$ (véase [26, Corollary 1, p. 15]). De este modo, como para cada subespacio discreto $D \subseteq X$ se satisface que $2^{|D|} \leq o(X)$, deducimos la igualdad $o(X) = 2^{w(X)}$.

La clase de los compactos poliádicos también es amplia. Para constatar este hecho observemos que si $\kappa \geq \omega$, entonces la función $f : \alpha D(\kappa) \rightarrow D(2)$ definida mediante $f(0) = 0$ y $f[\alpha D(\kappa) \setminus \{0\}] \subseteq \{1\}$ es continua y suprayectiva. Por esta razón, todos los compactos diádicos (es decir, las imágenes continuas de los cubos de Cantor) son compactos poliádicos; en especial, todos los grupos topológicos compactos pertenecen a esta clase (véase [69]).

De vuelta a nuestra meta original, con estos antecedentes estamos mejor posicionados para generalizar el corolario 5.5.5.

Lema 5.5.17. Sean κ un número cardinal con $\text{cf}(\kappa) = \omega$ y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios topológicos que contienen, cada uno de ellos, más de un punto. Si existe $J \subseteq \lambda$ tal que $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es Hausdorff e infinito, y $o(\prod_{\alpha \in \lambda \setminus J} X_\alpha) \geq \kappa$, entonces $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ no tiene precalibre* débil κ .

Demostración. Basta con definir $Y := \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ y $Z := \prod_{\alpha \in \lambda \setminus J} X_\alpha$, y aplicar el teorema 5.5.3. $\square$

Lema 5.5.18. Sean $(\mathcal{P}, \phi)$ una pareja productiva, κ un número cardinal con $\text{cf}(\kappa) = \omega$, λ un cardinal infinito y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathcal{P}$ una familia de espacios de Hausdorff infinitos tal que $o(X) \geq \kappa$, en donde $X := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$. Bajo estas hipótesis, si $o(X_\alpha) = 2^{\phi(X_\alpha)}$ para cada $\alpha < \lambda$, entonces X no tiene precalibre* débil κ .

Demostración. Sea $\beta < \lambda$. Si $o(\prod_{\alpha \in \lambda \setminus \{\beta\}} X_\alpha) = o(X)$, entonces el lema 5.5.17 garantiza que X no tiene precalibre* débil κ . Por otra parte, si $o(\prod_{\alpha \in \lambda \setminus \{\beta\}} X_\alpha) < o(X)$, entonces, como la proposición 5.5.14 asegura que $o(X) = o(\prod_{\alpha \in \lambda \setminus \{\beta\}} X_\alpha) \cdot o(X_\beta)$, deducimos que $o(X_\beta) = o(X)$ y, por ende, el lema 5.5.17 constata que X no tiene precalibre* débil κ . $\square$

Corolario 5.5.19. Sean $(\mathcal{P}, \phi)$ una pareja productiva, κ un número cardinal con $\text{cf}(\kappa) = \omega$, λ un cardinal infinito y $X \in \mathcal{P}$ un espacio de Hausdorff infinito tal que $o(X^\lambda) \geq \kappa$. Bajo estas hipótesis, si $o(X) = 2^{\phi(X)}$, entonces X^λ no tiene precalibre* débil κ .

Con este resultado en mano, podemos demostrar la siguiente generalización del corolario 5.5.5.

Corolario 5.5.20. Sea $(\mathcal{P}, \phi)$ una pareja productiva. Si λ es un número cardinal infinito, X es un espacio Hausdorff infinito que pertenece a $\mathcal{P}$, $o(X) = 2^{\phi(X)}$ y $\mu := o(X^\lambda)$, entonces para cualquier $A \in \{C, P, WP\}$ se satisface que:

1. $A(X^\lambda) = \{\kappa \in A(X) : \text{cf}(\kappa) > \omega\}$ y
2. $A^*(X^\lambda) = \{\kappa \in \text{CN} : \kappa > \mu\} \cup \{\kappa \in A(X) : \kappa \leq \mu \wedge \text{cf}(\kappa) > \omega\}$.

Demostración. Primero, el teorema 2.5.7(1) implica que $\{\kappa \in A(X) : \text{cf}(\kappa) > \omega\} \subseteq A(X^\lambda)$. Por otra parte, si $\kappa \in A(X^\lambda)$, entonces claramente $\kappa \in A(X)$ (véase la proposición 2.5.2), mientras que la relación $\text{cf}(\kappa) > \omega$ se sigue de que X^λ es un espacio de Hausdorff infinito (véase el corolario 2.2.9).

Para el segundo inciso, las relaciones $\{\kappa \in A(X) : \text{cf}(\kappa) > \omega\} = A(X^\lambda) \subseteq A^*(X^\lambda)$ y la proposición 5.1.5 garantizan que

$$\{\kappa \in \text{CN} : \kappa > \mu\} \cup \{\kappa \in A(X) : \kappa \leq \mu \wedge \text{cf}(\kappa) > \omega\} \subseteq A^*(X^\lambda).$$

Finalmente, el corolario 5.5.19 asegura que no hay $\kappa \leq \mu$ con $\text{cf}(\kappa) = \omega$ de tal forma que κ es calibre* de X^λ . $\square$

En virtud de que las funciones cardinales w y nw satisfacen las condiciones del resultado anterior (véase [36]), obtenemos nuestro resultado principal con respecto a las potencias topológicas:

Corolario 5.5.21. Si λ es un número cardinal infinito, X es un espacio Hausdorff de Hausdorff infinito, $\phi \in \{w, nw\}$, $o(X) = 2^{\phi(X)}$ y $\mu := o(X^\lambda)$, entonces para cualquier $A \in \{C, P, WP\}$ se satisface que:

1. $A(X^\lambda) = \{\kappa \in A(X) : cf(\kappa) > \omega\}$ y
2. $A^*(X^\lambda) = \{\kappa \in CN : \kappa > \mu\} \cup \{\kappa \in A(X) : \kappa \leq \mu \wedge cf(\kappa) > \omega\}$.

5.6. Condiciones de cadena en productos caja

Finalizamos este capítulo con algunos comentarios al respecto del comportamiento de las condiciones de cadena en los productos caja.

Sea $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una colección de espacios topológicos. El *producto caja* de la familia es el conjunto $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ equipado con la topología generada por la base $\{\prod_{\alpha < \lambda} U_\alpha : \forall \alpha < \lambda (U_\alpha \in \tau_{X_\alpha})\}$. Denotaremos por $\square_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ al producto caja de la familia $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Para cada $\alpha < \lambda$ denotemos por $\rho_\alpha : \square_{\beta < \lambda} X_\beta \rightarrow X_\alpha$ a la α -ésima proyección. Es bien conocido que las proyecciones ρ_α son funciones continuas, abiertas y suprayectivas. Además, si denotamos por τ_Π y $\tau_\square$ a las topologías producto y caja, respectivamente, se satisface la inclusión $\tau_\Pi \subseteq \tau_\square$, y $\tau_\Pi = \tau_\square$ si y sólo si $\lambda < \omega$.

El siguiente resultado se desprende a partir de las proposiciones 2.5.1(1) y 5.5.1.

Proposición 5.6.1. Si λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil; calibre*; precalibre*; precalibre* débil) para $\square_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, entonces, κ es un calibre (resp., precalibre; precalibre débil; calibre*; precalibre*; precalibre* débil) para cada X_α .

No obstante, las condiciones de cadena se pierden rápidamente con respecto a la topología caja porque en ésta aparecen familias celulares del mismo tamaño que el conjunto de índices. Para un cardinal infinito λ denotemos por $\square D(2)^\lambda$ al producto caja de la familia $\{D(2) : \alpha < \lambda\}$.

Teorema 5.6.2. Si λ es un cardinal infinito, el espacio $\square D(2)^\lambda$ admite una familia celular de cardinalidad λ . En particular, $\square D(2)^\lambda$ no tiene precalibre* débil λ (véase la proposición 5.1.6).

Demostración. Para cualesquiera $\alpha, \beta < \lambda$ definamos

$$U(\alpha, \beta) := \begin{cases} \{0\}, & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \{1\}, & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Consideremos la colección $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ donde $U_\alpha := \prod_{\beta < \lambda} U(\alpha, \beta)$ para cada $\alpha < \lambda$. En estas circunstancias, si $\alpha < \beta < \lambda$ y $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, entonces $x(\alpha) \in U(\alpha, \alpha) \cap U(\beta, \alpha) = \{1\} \cap \{0\}$, una contradicción. Esto demuestra que $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia celular en $\square D(2)^\lambda$ de cardinalidad λ . $\square$

Corolario 5.6.3. *Si κ y λ son números cardinales con $\lambda \geq \kappa \geq \omega$, entonces $\square D(2)^\lambda$ no tiene precalibre* débil κ .*

La demostración del teorema 5.6.2 únicamente depende de que el espacio discreto $D(2)$ contiene dos abiertos ajenos. De este modo, el siguiente teorema se sigue a partir de las mismas ideas.

Teorema 5.6.4. *Sean λ un cardinal infinito y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios topológicos T_2 cada uno con más de un punto. Si κ es un cardinal con $\lambda \geq \kappa \geq \omega$, entonces κ no es precalibre* débil de $\square_{\alpha < \lambda} X_\alpha$.*

La *Hipótesis del Cardinal Singular*, SCH, es el enunciado: “si κ es un cardinal singular y $2^{\text{cf}(\kappa)} < \kappa$, entonces $\kappa^{\text{cf}(\kappa)} = \kappa^+$ ”. En [14, Theorem 2.5, p. 310] se demuestra que si SCH es cierta y λ es un cardinal infinito, entonces $d(\square D(2)^\lambda) = 2^\lambda$. Este hecho combinado con la proposición 2.1.8 y el teorema 5.6.2 implican que, bajo SCH,

$$\{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > 2^\lambda\} \subseteq C(\square D(2)^\lambda) \quad \text{y} \quad \text{WP}^*(\square D(2)^\lambda) \subseteq \{\kappa \in \text{CN} : \kappa > \lambda\}$$

(compárese con el corolario 5.5.5).

El estudio a profundidad de las condiciones de cadena en los productos caja (más aún, en los productos λ -caja) escapa del propósito de este trabajo, sin embargo, al lector interesado se le recomienda consultar [14] y [15].

6

Condiciones de cadena en $\mathcal{F}[X]$

Si X es un espacio topológico, $\mathcal{F}(X)$ es la colección $[X]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Para cualesquiera $F \in \mathcal{F}(X)$ y $S \subseteq X$ definamos

$$[F, S] := \{G \in \mathcal{F}(X) : F \subseteq G \subseteq S\}.$$

En virtud de que $[F, U] \cap [G, V] = [F \cup G, U \cap V]$, no es difícil comprobar que la colección $\{[F, U] : F \in \mathcal{F}(X) \wedge U \in \tau_X\}$ es una base para una topología en $\mathcal{F}(X)$, conocida como la *topología de Pixley–Roy*. Para seguir la notación tradicional de la literatura, al conjunto $\mathcal{F}(X)$ equipado con la topología de Pixley–Roy lo denotaremos por $\mathcal{F}[X]$.

Estos espacios fueron introducidos en 1969 por Pixley y Roy en [53] con el objetivo de presentar un espacio de Moore no separable con celularidad numerable. Es bien conocido que si X es un espacio T_1 , entonces $\mathcal{F}[X]$ es cero-dimensional (por ende, completamente regular), Hausdorff y hereditariamente metacompacto (véase [17]). Además, se satisface que X es primero numerable si y sólo si $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore; en especial, $\mathcal{F}[X]$ es primero numerable siempre que X lo es (véase [45]).

De acuerdo con la línea expositiva de este trabajo, nosotros estamos interesados en conocer cuales son las colecciones $C(\mathcal{F}[X])$, $P(\mathcal{F}[X])$ y $WP(\mathcal{F}[X])$. En el caso en que X es finito, $\mathcal{F}[X]$ también lo es; por ende, el corolario 2.1.13 implica de inmediato que todos los cardinales infinitos son calibres para $\mathcal{F}[X]$. Por esta razón, debemos imponer la restricción $|X| \in \text{CN}$. Además, pediremos que X sea un espacio T_1 para que el espacio $\mathcal{F}[X]$ tenga buenas propiedades de separación.

6.1. Hiperespacios de Pixley–Roy

Comencemos por establecer un resultado básico al respecto de la densidad y la celularidad de $\mathcal{F}[X]$. Las demostraciones presentes en la siguiente proposición son adaptaciones de los argumentos que Sakai expone en [63, Theorem 2, p. 337].

Proposición 6.1.1. *Si X es un espacio topológico, entonces $d(\mathcal{F}[X]) = |X|$ y $hd(X) \cdot hL(X) \leq c(\mathcal{F}[X]) \leq nw(X)$.*

Demostración. Claramente, $d(\mathcal{F}[X]) \leq |\mathcal{F}[X]| = |X|$. Por otro lado, si $\mathcal{D}$ es un subconjunto denso de $\mathcal{F}[X]$ con $|\mathcal{D}| = d(\mathcal{F}[X])$, entonces, como para cada $x \in X$ se satisface la relación $\{x\}, X \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$, deducimos que $\mathcal{D}$ es una cubierta para el espacio X . En consecuencia,

$$|X| \leq \left| \bigcup \mathcal{D} \right| \leq |\mathcal{D}| \cdot \sup\{|D| : D \in \mathcal{D}\} \leq |\mathcal{D}| \cdot \omega = d(\mathcal{F}[X]).$$

Para comprobar la desigualdad $c(\mathcal{F}[X]) \leq nw(X)$, sean $\{[F_\alpha, U_\alpha] : \alpha < \kappa\}$ una familia celular en $\mathcal{F}[X]$ y $\mathcal{N}$ una red para X cerrada bajo uniones finitas con $|\mathcal{N}| \leq nw(X)$. Para cada $\alpha < \kappa$ existe $N_\alpha \in \mathcal{N}$ con $F_\alpha \subseteq N_\alpha \subseteq U_\alpha$; en particular, $N_\alpha \in [F_\alpha, U_\alpha]$. Así, la asignación $\kappa \rightarrow \mathcal{N}$ definida mediante $\alpha \mapsto N_\alpha$ es inyectiva y, por ende, $|\{[F_\alpha, U_\alpha] : \alpha < \kappa\}| \leq |\mathcal{N}|$. De esta manera, $c(\mathcal{F}[X]) \leq nw(X)$.

Concentrémonos ahora en verificar que $hL(X) \leq c(\mathcal{F}[X])$. Si κ es un cardinal tal que $hL(X) > \kappa$, entonces existen un subespacio Y de X y una colección $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$ de tal forma que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ y $Y \not\subseteq \bigcup \mathcal{V}$ para cada $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\kappa}$. Empleemos esta hipótesis para construir recursivamente un par de sucesiones $\{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq Y$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq \mathcal{U}$ con $x_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup \{U_\beta : \beta < \alpha\}$, siempre que $\alpha < \kappa^+$. De este modo, como para cualesquiera $\beta < \alpha < \kappa^+$ se satisface que $x_\alpha \notin U_\beta$, deducimos que $\{[x_\alpha, U_\alpha] : \alpha < \kappa^+\}$ es una familia celular en $\mathcal{F}[X]$ de cardinalidad κ^+ ; en especial $c(\mathcal{F}[X]) > \kappa$.

Finalmente, para comprobar que $hd(X) \leq c(\mathcal{F}[X])$, fijemos un subespacio Y de X , consideremos la colección $\mathcal{U} := \{[A, U] : A \in \mathcal{F}[Y] \wedge U \in \tau_X \wedge A \subseteq U\}$ y tomemos una familia $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ ajena por pares maximal (véase el teorema 1.5.1). Además, sean $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{F}[Y] : \exists U \in \tau_X ([A, U] \in \mathcal{V})\}$ y $D := \bigcup \mathcal{D}$. Así, como $\mathcal{V}$ es una familia celular en $\mathcal{F}[X]$, se satisface que para cada $A \in \mathcal{D}$ existe un único $U \in \tau_X$ con $[A, U] \in \mathcal{V}$. De este modo, $|\mathcal{D}| \leq |\mathcal{V}| \leq |\mathcal{U}| \leq c(\mathcal{F}[X])$.

La demostración termina si logramos probar que D es un subconjunto denso de Y . Supongamos, en busca de una contradicción, que existe un punto $y \in Y \setminus \text{cl}_X D$ y fijemos $V \in \tau_X(y)$ con $V \cap D = \emptyset$. Un argumento rutinario muestra que $\mathcal{V} \cup \{\{y\}, V\}$ es una subcolección ajena por pares de $\mathcal{U}$ que contiene propiamente a $\mathcal{V}$, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{V}$. $\square$

Observación 6.1.2. Es oportuno mencionar que en la proposición 6.1.1 no necesariamente se alcanza la igualdad en la relación $hd(X) \cdot hL(X) \leq c(\mathcal{F}[X])$. Por ejemplo, si

denotamos por $\mathbb{S}$ a la recta de Sorgenfrey y para cada $x \in \mathbb{S}$ definimos $U_x := [x, \infty)$, entonces la colección $\{\{x\}, U_x\} : x \in \mathbb{S}\}$ es una familia celular en $\mathcal{F}[\mathbb{S}]$ de tamaño $\mathfrak{c}$, mientras que $hd(\mathbb{S}) \cdot hL(\mathbb{S}) = \omega$ (véase [55, Proposición 1.5, p. 7]).

Ahora, los hiperespacios $\mathcal{F}[X]$ tienen una característica particular en el sentido de que su colección de calibres se puede determinar fácilmente, pero sus familias de precalibres y precalibres débiles son complicadas de conocer en su totalidad. Concen-trémonos primero en la familia $C(\mathcal{F}[X])$.

Teorema 6.1.3. *Si X es un espacio topológico, entonces*

$$C(\mathcal{F}[X]) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > |X|\}.$$

Demostración. Al combinar las proposiciones 2.1.8 y 6.1.1 deducimos que $\{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > |X|\} \subseteq C(\mathcal{F}[X])$. Por otro lado, si $\kappa \in \text{CN}$ cumple $\text{cf}(\kappa) \leq |X|$, fijamos un conjunto $\{x_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\} \subseteq X$ que esté enumerado sin repeticiones. Así, no existe $J \in [\text{cf}(\kappa)]^{\text{cf}(\kappa)}$ con $\bigcap \{\{x_\alpha\}, X\} : \alpha \in J\} \neq \emptyset$ ya que si $F \in \bigcap \{\{x_\alpha\}, X\} : \alpha \in J\}$, entonces F sería un subconjunto finito de X que contiene al conjunto infinito $\{x_\alpha : \alpha \in J\}$, lo cual es absurdo. Esto muestra que $\text{cf}(\kappa)$ no es un calibre para $\mathcal{F}[X]$ y, por ende, deducimos a partir de la proposición 2.2.1 que κ tampoco es un calibre para $\mathcal{F}[X]$. $\square$

De esta manera, una mezcla del corolario 2.2.9 con el teorema 6.1.3 garantiza que si X es un espacio topológico, entonces se satisfacen las inclusiones

$$\{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > |X|\} \subseteq P(\mathcal{F}[X]) \subseteq \text{WP}(\mathcal{F}[X]) \subseteq \text{UC}. \quad (6.1)$$

En particular, el teorema 5.3.9 y las relaciones de (6.1) implican el siguiente corola-rio.

Corolario 6.1.4. *Si X es un espacio infinito numerable, entonces*

$$\text{UC} = C(X) = C(\mathcal{F}[X]) = P(\mathcal{F}[X]) = \text{WP}(\mathcal{F}[X]).$$

Además, es bien conocido que muchas funciones cardinales de $\mathcal{F}[X]$ coinciden con $|X|$ (véase [63, Theorem 2, p. 337]). En el mismo tenor que estos resultados, el teorema 6.1.3 constata que $\check{\mathfrak{s}}(\mathcal{F}[X]) = |X|$, en otras palabras, el número cardinal $\check{\mathfrak{s}}(\mathcal{F}[X])$ también entra en la lista de funciones cardinales de $\mathcal{F}[X]$ que coinciden con la cardinalidad de X .

6.2. Precalibres y precalibres débiles en $\mathcal{F}[X]$

Para calcular con precisión quiénes son las colecciones $P(\mathcal{F}[X])$ y $WP(\mathcal{F}[X])$ presentamos la siguiente definición.

Definición 6.2.1. Si X es un espacio topológico y κ es un número cardinal, diremos que X satisface la condición $C(\kappa)$ si y sólo si para cualesquiera $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X$ con $x_\alpha \in U_\alpha$, siempre que $\alpha < \kappa$, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ de tal forma que $\{x_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in J\}$.

Observación 6.2.2. Todo espacio topológico que satisface la condición $C(\kappa)$ necesariamente tiene calibre κ . Además, es claro que si Y es un subespacio de X y X satisface la propiedad $C(\kappa)$, entonces Y también lo hace; es decir, la propiedad $C(\kappa)$ es hereditaria.

Mostraremos más adelante en el teorema 6.2.7 cuál es la relación entre $C(\kappa)$ y las condiciones de cadena de los hiperespacios de Pixley–Roy. Lo que sigue es establecer propiedades generales acerca de la condición $C(\kappa)$ que utilizaremos en el resto de la presente sección. Demostraremos a continuación algunos resultados con respecto a la preservación de la condición $C(\kappa)$ en ciertas construcciones topológicas.

Antes de comenzar es conveniente mencionar dos cosas: primero, el comportamiento de la propiedad $C(\kappa)$ es similar al de las condiciones de cadena usuales, y segundo, del lema 6.2.3 a la proposición 6.2.6 no es necesario que los espacios considerados sean T_1 .

Lema 6.2.3. Sean κ un cardinal infinito y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios topológicos. Si X satisface la condición $C(\kappa)$, entonces Y también lo hace.

Demostración. Si $\{y_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq Y$ y $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_Y$ cumplen $y_\alpha \in V_\alpha$, siempre que $\alpha < \kappa$, entonces para cada $\alpha < \kappa$ tomamos $x_\alpha \in X$ con $f(x_\alpha) = y_\alpha$. Luego, como $\{f^{-1}[V_\alpha] : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X$ y $x_\alpha \in f^{-1}[V_\alpha]$ para toda $\alpha < \kappa$, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $\{x_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \bigcap \{f^{-1}[V_\alpha] : \alpha \in J\}$; en consecuencia, $\{y_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \bigcap \{V_\alpha : \alpha \in J\}$. $\square$

Proposición 6.2.4. Sean κ un cardinal infinito y X un espacio topológico. Si X satisface la condición $C(\kappa)$, entonces X también satisface $C(\text{cf}(\kappa))$.

Demostración. Claramente el enunciado es cierto cuando κ es regular. Supongamos entonces que κ es singular y fijemos una $(\kappa, 0)$ -sucesión (véase el lema 1.2.5). Además, sean $\{U_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\} \subseteq \tau_X$ y $\{x_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ con $x_\alpha \in U_\alpha$, siempre que $\alpha < \text{cf}(\kappa)$. Definamos colecciones $\{V_\beta : \beta < \kappa\} \subseteq \tau_X$ y $\{y_\beta : \beta < \kappa\} \subseteq X$ como sigue: $V_\beta = U_\gamma$ y $y_\beta = x_\gamma$ si y sólo si κ_γ es el único cardinal en $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ con $\kappa_\gamma \leq \beta < \kappa_{\gamma+1}$. Luego, como X satisface $C(\kappa)$ existe $I \in [\kappa]^\kappa$ con $\{y_\beta : \beta \in I\} \subseteq \bigcap \{V_\beta : \beta \in I\}$. Así, si $J := \{\alpha <$

$\text{cf}(\kappa) : \exists \beta \in I (V_\beta = U_\alpha)\}$, entonces $J = \{\alpha < \text{cf}(\kappa) : [\kappa_\alpha, \kappa_{\alpha+1}) \cap I \neq \emptyset\}$ y, en consecuencia, $|J| = \text{cf}(\kappa)$. De esta manera, $J \in [\text{cf}(\kappa)]^{\text{cf}(\kappa)}$ y $\{x_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in J\}$. $\square$

Lema 6.2.5. Sean κ un cardinal infinito, λ un número cardinal, X un espacio topológico y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de subespacios de X . Si $\text{cf}(\kappa) > \lambda$ y cada X_α satisface la condición $C(\kappa)$, entonces $\bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ también lo hace.

Demostración. Sean $Y := \bigcup_{\gamma < \kappa} X_\gamma$, $\{x_\gamma : \gamma < \kappa\} \subseteq Y$ y $\{U_\gamma : \gamma < \kappa\} \subseteq \tau_Y^+$ con $x_\gamma \in U_\gamma$ para cada $\gamma < \kappa$. Para cada $\gamma < \kappa$ sea $\alpha(\gamma) < \lambda$ con $x_\gamma \in X_{\alpha(\gamma)}$. La desigualdad $\text{cf}(\kappa) > \lambda$ asegura que la función $\kappa \rightarrow \lambda$ definida como $\gamma \mapsto \alpha(\gamma)$ admite una fibra de tamaño κ ; es decir, existen $J \in [\kappa]^\kappa$ y $\alpha < \lambda$ tales que $\alpha(\gamma) = \alpha$, siempre que $\gamma \in J$. Para terminar, como $\{U_\gamma \cap X_\alpha : \gamma \in J\}$ es un subconjunto de $\tau_{X_\alpha}^+$ y X_α satisface $C(\kappa)$, obtenemos $I \in [J]^\kappa$ con $\{x_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \bigcap \{U_\gamma \cap X_\alpha : \gamma \in I\}$; en consecuencia, Y satisface $C(\kappa)$. $\square$

Proposición 6.2.6. Sean κ un cardinal infinito y λ un número cardinal. Si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos, entonces $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ satisface la condición $C(\kappa)$ si y sólo si $\text{cf}(\kappa) > \lambda$ y cada sumando satisface la condición $C(\kappa)$.

Demostración. La implicación recíproca se sigue del lema 6.2.5. Para comprobar la implicación directa, supongamos que $X := \bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ satisface la condición $C(\kappa)$. Como cada X_α es un subespacio de X , la observación 6.2.2 implica que X_α satisface $C(\kappa)$. Además, como $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ tiene calibre κ (véase la observación 6.2.2), la proposición 2.4.3 garantiza que $\text{cf}(\kappa) > \lambda$. $\square$

En la sección 6.5 determinaremos cuál es la interacción entre la condición $C(\kappa)$ y los productos topológicos. Por ahora, conviene establecer conexiones entre la propiedad $C(\kappa)$ y los hiperespacios de Pixley–Roy con los resultados que hemos demostrado hasta este momento.

En [62, Theorem 3.18, p. 3087] Sakai demostró que si X es un espacio topológico, entonces $\mathcal{F}[X]$ tiene precalibre ω_1 si y sólo si X satisface la condición $C(\omega_1)$. Como exponemos a continuación, el argumento de Sakai se puede adaptar para cualquier número cardinal con cofinalidad no numerable para obtener una equivalencia fundamental para esta sección del texto.

Teorema 6.2.7. Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal con $\text{cf}(\kappa) > \omega$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

1. $\mathcal{F}[X]$ tiene precalibre κ .
2. $\mathcal{F}[X]$ tiene precalibre débil κ .
3. X satisface la condición $C(\kappa)$.

Demostración. Claramente, (1) implica (2). Para verificar que (3) se sigue de (2) supongamos que $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$ cumplen $x_\alpha \in U_\alpha$, siempre que $\alpha < \kappa$. Luego, como $\{[\{x_\alpha\}, U_\alpha] : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de $\tau_{\mathcal{F}[X]}^+$ y $\mathcal{F}[X]$ tiene precalibre débil κ , existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $\{[\{x_\alpha\}, U_\alpha] : \alpha \in J\}$ ligada. Finalmente, si $\alpha, \beta \in J$ la condición $[\{x_\alpha\}, U_\alpha] \cap [\{x_\beta\}, U_\beta] \neq \emptyset$ implica que $x_\alpha \in U_\beta$; en consecuencia, $\{x_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in J\}$.

Para demostrar que (3) implica (1) fijemos una colección $\{[F_\alpha, U_\alpha] : \alpha < \kappa\}$ de abiertos básicos y no vacíos de $\mathcal{F}[X]$. En virtud de que $\text{cf}(\kappa) > \omega$ podemos suponer, sin perder generalidad, que existe $n \in \mathbb{N}$ con $|F_\alpha| = n$ para cada $\alpha < \kappa$. Sea $\{x(\alpha, k) : k < n\}$ una enumeración sin repeticiones de F_α para toda $\alpha < \kappa$.

Afirmación. Existe una colección $\{J_k : k < n\}$ de tal manera que las siguientes condiciones se satisfacen para cualquier $k < n$:

1. $J_0 \in [\kappa]^\kappa$;
2. si $k + 1 < n$, entonces $J_{k+1} \in [J_k]^\kappa$, y
3. $\{x(\alpha, k) : \alpha \in J_k\} \subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in J_k\}$.

Por recursión finita sobre n : primero, por la condición $C(\kappa)$ existe $J_0 \in [\kappa]^\kappa$ de tal manera que $\{x(\alpha, 0) : \alpha \in J_0\} \subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in J_0\}$. Luego, si suponemos que para $0 < k < n$ existe la colección $\{J_l : l < k\}$ con las propiedades deseadas, entonces la condición $C(\kappa)$ produce $J_k \in [J_{k-1}]^\kappa$ con $\{x(\alpha, k) : \alpha \in J_k\} \subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in J_k\}$.

En consecuencia, $J_{n-1} \in [\kappa]^\kappa$ y $\bigcup \{F_\alpha : \alpha \in J_{n-1}\} \subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in J_{n-1}\}$. Finalmente, si $I \in [J_{n-1}]^{<\omega}$, entonces $F := \bigcup \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ satisface la pertenencia $F \in \bigcap \{[F_\alpha, U_\alpha] : \alpha \in I\}$; en otras palabras, $\{[F_\alpha, U_\alpha] : \alpha \in J_{n-1}\}$ es una familia centrada. $\square$

Observación 6.2.8. Una consecuencia de la observación 6.2.2 es que si un espacio X satisface la condición $C(\kappa)$, entonces X tiene calibre κ hereditariamente. Por esta razón, el teorema 6.2.7 implica que la última inclusión de (6.1) puede fortalecerse a

$$\text{WP}(\mathcal{F}[X]) \subseteq \{\kappa \in \text{CN} : X \text{ tiene calibre } \kappa \text{ hereditariamente}\} \cap \text{UC}.$$

No obstante, en general, esta contención no es una igualdad. Por ejemplo, la recta de Sorgenfrey $\mathbb{S}$ es hereditariamente separable (por ende, tiene calibre ω_1 hereditariamente), pero $\mathcal{F}[\mathbb{S}]$ admite una familia celular de cardinalidad $\mathfrak{c}$ (véase la observación 6.1.2); en particular, $\mathcal{F}[\mathbb{S}]$ no tiene precalibre débil ω_1 .

Para darnos una idea de la fuerza que tiene la condición $C(\omega_1)$, Sakai menciona en [62, Corollary 3.19, p. 3087] que si un espacio X satisface $C(\omega_1)$, entonces necesariamente X^ω es hereditariamente separable y hereditariamente Lindelöf.

La última contención de (6.1) y el teorema 6.2.7 implican el siguiente resultado.

Corolario 6.2.9. *Si X es un espacio topológico, entonces*

$$P(\mathcal{F}[X]) = WP(\mathcal{F}[X]) = \{\kappa \in \mathbf{CN} : X \text{ satisface la condición } C(\kappa)\} \cap \mathbf{UC}.$$

A la luz del corolario 6.2.9, nuestro siguiente objetivo es tratar de encontrar condiciones internas para saber cuándo un espacio satisface o no la condición $C(\kappa)$ para un cardinal κ con cofinalidad no numerable.

Primero, demostramos a continuación que al considerar al peso red del espacio de manera conveniente obtenemos una respuesta positiva.

Proposición 6.2.10. *Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal tal que $nw(X) < \mathbf{cf}(\kappa)$, entonces X satisface la condición $C(\kappa)$. En especial, $\{\kappa \in \mathbf{CN} : \mathbf{cf}(\kappa) > nw(X)\} \subseteq P(\mathcal{F}[X])$.*

Demostración. Sean $\mathcal{N}$ una red para X de cardinalidad mínima, $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$ con $x_\alpha \in U_\alpha$, siempre que $\alpha < \kappa$. Para cada $\alpha < \kappa$, sea $N_\alpha \in \mathcal{N}$ tal que $x_\alpha \in N_\alpha \subseteq U_\alpha$. Resulta que la función $\kappa \rightarrow \mathcal{N}$ dada por $\alpha \mapsto N_\alpha$ tiene una fibra de cardinalidad κ ; es decir, existe $J \in [\kappa]^\kappa$ con $N_\alpha = N_\beta$, siempre que $\alpha, \beta \in J$. Finalmente, $\{x_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in J\}$. $\square$

Corolario 6.2.11. *Si X es cósmico, entonces*

$$P(\mathcal{F}[X]) = \mathbf{UC} = WP(\mathcal{F}[X]).$$

Con lo hecho hasta el momento podemos recopilar en un resultado algunas propiedades importantes del espacio de Pixley–Roy, $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$:

Ejemplo 6.2.12. *El hiperespacio $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ tiene las siguientes características:*

1. $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es un espacio de Moore, T_2 , cero-dimensional y hereditariamente metacompacto;
2. $C(\mathcal{F}[\mathbb{R}]) = \{\kappa \in \mathbf{CN} : \mathbf{cf}(\kappa) > \mathfrak{c}\}$;
3. $P(\mathcal{F}[\mathbb{R}]) = \mathbf{UC} = WP(\mathcal{F}[\mathbb{R}])$, y
4. $\{\mathfrak{c}, \omega_1\} \subseteq P(\mathcal{F}[\mathbb{R}]) \setminus C(\mathcal{F}[\mathbb{R}])$.

Demostración. El inciso (1) es cierto por los comentarios hechos al principio del capítulo 6. Por otro lado, (2) se desprende del teorema 6.1.3, mientras que (3) se sigue del corolario 6.2.11. Finalmente, como ω_1 es regular y $\text{cf}(\kappa) > \omega$ (véase [41, Corollary 10.41, p. 34]), es claro que (2) y (3) implican (4). $\square$

Una consecuencia del teorema 6.1.3 y la proposición 6.2.10 es que si X satisface $nw(X) < |X|$, entonces las colecciones $C(\mathcal{F}[X])$ y $P(\mathcal{F}[X])$ no coinciden en virtud de las relaciones

$$\begin{aligned} C(\mathcal{F}[X]) &= \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > |X|\} \\ &\subsetneq \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > nw(X)\} \subseteq P(\mathcal{F}[X]). \end{aligned}$$

Observe que $nw(X)^+ \in P(\mathcal{F}[X]) \setminus C(\mathcal{F}[X])$. En suma, el siguiente corolario se verifica.

Corolario 6.2.13. *Si X es un espacio topológico tal que $nw(X) < |X|$, entonces $C(\mathcal{F}[X]) \subsetneq P(\mathcal{F}[X])$.*

Ahora, nuestros siguientes resultados tienen como fin establecer condiciones en X para asegurar que la condición $C(\kappa)$ **no** se satisface en X .

Proposición 6.2.14. *Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal infinito con $\kappa \leq d(X)$, entonces X no satisface la condición $C(\kappa)$.*

Demostración. Nuestra meta es construir recursivamente un par de colecciones $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$ tales que, para cada $\alpha < \kappa$, $x_\alpha \in U_\alpha$ y $U_\alpha \cap \{x_\beta : \beta < \alpha\} = \emptyset$. Supongamos que para $\alpha < \kappa$ hemos hallado familias $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq X$ y $\{U_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \tau_X^+$ con las condiciones deseadas. Entonces, como $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ no es un subconjunto denso de X , existe $U_\alpha \in \tau_X^+$ tal que $U_\alpha \cap \{x_\beta : \beta < \alpha\} = \emptyset$. De este modo, si $x_\alpha \in U_\alpha$, entonces $\{x_\beta : \beta < \alpha + 1\}$ y $\{U_\beta : \beta < \alpha + 1\}$ tienen las propiedades requeridas.

Por la forma en la que se construyeron los conjuntos anteriores, es claro que para cualquier $\alpha < \kappa$ se satisface la relación $x_\alpha \notin \bigcup \{U_\beta : \beta > \alpha\}$. Finalmente, si $J \in [\kappa]^\kappa$ entonces existe $\beta \in J \cap (\alpha, \kappa)$ y así se cumple que $x_\alpha \notin U_\beta$; en consecuencia, $\{x_\alpha : \alpha \in J\} \not\subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in J\}$. $\square$

Corolario 6.2.15. *Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal infinito con $\text{cf}(\kappa) < hd(X)$, entonces X no satisface la condición $C(\kappa)$.*

Demostración. La relación $\text{cf}(\kappa) < hd(X)$ implica la existencia de $Y \subseteq X$ con $\text{cf}(\kappa) < d(Y)$. Luego, por la proposición 6.2.14 se verifica que Y no satisface la condición $C(\text{cf}(\kappa))$, y la proposición 6.2.4 implica que Y no cumple $C(\kappa)$. Finalmente, como la propiedad $C(\kappa)$ es hereditaria (véase la observación 6.2.2), X no satisface $C(\kappa)$. $\square$

Gracias a la proposición 6.2.10 y al corolario 6.2.15, los únicos números cardinales κ que resta analizar en este estudio son aquellos que tienen cofinalidad no numerable y satisfacen las relaciones

$$hd(X) \leqslant cf(\kappa) \leqslant nw(X). \quad (6.2)$$

Para refinar la primera desigualdad de (6.2) es necesario expandir más nuestro campo conceptual.

6.3. Espacios débilmente separados

A menos que se indique explícitamente lo contrario, los espacios topológicos de esta sección no tendrán la restricción de satisfacer el axioma de separación T_1 .

Si X es un conjunto, $x \in X$ y $<$ es una relación de orden en X , entonces el *segmento inicial* determinado por x es el conjunto $(\leftarrow, x) := \{y \in X : y < x\}$.

Un espacio topológico X es *separado-derecho* (resp., *separado-izquierdo*) si admite un buen orden de tal modo que sus segmentos iniciales son abiertos en X (resp., cerrados en X). La *altura* y la *anchura* de X son, respectivamente, los números cardinales

$$h(X) := \sup\{|Y| : Y \text{ es un subespacio separado-derecho de } X\} + \aleph_0 \text{ y} \\ z(X) := \sup\{|Y| : Y \text{ es un subespacio separado-izquierdo de } X\} + \aleph_0.$$

Este tipo de espacios han sido ampliamente estudiados en la literatura incluso en conexión con las condiciones de cadena de espacios topológicos (véanse [36] y [37]). Un resultado conocido es que para cualquier espacio se satisfacen las relaciones $hL = h$ y $hd = z$ (véase [36, 2.9, p. 16]).

Por otra parte, un espacio X es *débilmente separado* (en inglés, *weakly separated*) si existe una familia $\{U_x : x \in X\} \subseteq \tau_X$ que satisface las siguientes condiciones: $x \in U_x$ para cada $x \in X$, y si $x, y \in X$ son distintos, entonces $x \notin U_y$ ó $y \notin U_x$. Estos espacios fueron introducidos por Tkachenko en [77]. En estas circunstancias diremos que la familia $\{U_x : x \in X\}$ es una *separación débil* de X . Finalmente, el *número de separación débil* de X es el número cardinal

$$R(X) := \sup\{|Y| : Y \text{ es un subespacio débilmente separado de } X\} + \aleph_0.$$

Es sencillo construir espacios débilmente separados, por ejemplo, cualquier espacio numerable y T_1 tiene esta propiedad. Efectivamente, si X es finito entonces $\{\{x\} : x \in X\}$ es una separación débil para X (cualquier espacio discreto es débilmente separado). Por otra parte, si $\{x_n : n < \omega\}$ es una enumeración sin repeticiones de X

y para cada $n < \omega$ definimos $U_n := X \setminus \{x_k : k < n\}$, entonces $\{U_n : n < \omega\}$ es una separación débil para X .

Un ejemplo más que es fundamental para nosotros es la recta de Sorgenfrey. Simplemente observemos que la familia $\{[x, \infty) : x \in \mathbb{S}\}$ es una separación débil del espacio $\mathbb{S}$.

También, no es difícil comprobar que todos los subespacios separado-derechos, o bien, separado-izquierdos de un espacio X son débilmente separados; en consecuencia, $hd(X) \cdot hL(X) \leq R(X)$. Además, como para cualquier espacio débilmente separado se cumple que $|\cdot| = nw$, entonces $R(X) \leq nw(X)$.

Proposición 6.3.1. *Si X es un espacio topológico, entonces $hd(X) \cdot hL(X) \leq R(X) \leq nw(X)$.*

Corolario 6.3.2. *Si $nw(X) < |X|$, entonces X no es débilmente separado. En particular, los espacios cósmicos no numerables no son débilmente separados.*

Resulta que también es sencillo caracterizar a los subespacios débilmente separados de los espacios cofinitos. Recuerde que si κ es un cardinal infinito, entonces $\log(\kappa) := \min\{\lambda \in \mathbb{CN} : 2^\lambda \geq \kappa\}$. Por ejemplo, si X es un conjunto infinito equipado con la topología cofinita, entonces un argumento rutinario muestra que $nw(X) = \log(|X|)$ (véase [55, Ejemplo 4.4(4), p. 82]).

Ejemplo 6.3.3. *Si X es un espacio cofinito y Y es un subespacio de X , entonces Y es débilmente separado si y sólo si Y es numerable. En consecuencia, $R(X) = \omega$.*

Demostración. En virtud de que todos los espacios T_1 numerables son débilmente separados, únicamente necesitamos probar que si Y es no numerable entonces no es débilmente separado. Resulta que si Z es un subconjunto de Y de cardinalidad ω_1 , entonces Z es un espacio cofinito y $nw(Z) = \log(\omega_1) = \omega$. De esta manera, Z es un espacio cósmico y no numerable; en particular, Z no es débilmente separado por el corolario 6.3.2 y, por consiguiente, Y no es débilmente separado. $\square$

Es conveniente mencionar que las desigualdades expuestas en la proposición 6.3.1 pueden ser estrictas. Por ejemplo, la recta de Sorgenfrey cumple $hd(\mathbb{S}) \cdot hL(\mathbb{S}) = \omega < \mathfrak{c} = R(\mathbb{S})$. Demostramos a continuación que la segunda desigualdad también puede ser estricta. El siguiente lema es obvio y será indispensable más adelante.

Lema 6.3.4. *Si X es un espacio débilmente separado y para cada $x \in X$ se tiene que $\mathcal{B}_x$ es una base local para X en x , entonces para toda $x \in X$ existe $B_x \in \mathcal{B}_x$ de tal modo que $\{B_x : x \in X\}$ es una separación débil para X .*

Si X es un espacio topológico X , una *sucesión no trivial* en X es cualquier subconjunto infinito numerable de X . Además, la expresión “ S es una sucesión no trivial en

X que converge al punto $x \in X$ ” significa que S es un elemento de $[X]^\omega$ con $x \notin S$ y de tal modo que $|S \setminus U| < \omega$ para cada $U \in \tau_X(x)$. El símbolo $\mathcal{S}(X)$ representa la familia de sucesiones convergentes no triviales en X . El siguiente ejemplo es mencionado en [49] y [77].

Ejemplo 6.3.5. Si $\tilde{\mathbb{R}}$ es el espacio que se obtiene al equipar al conjunto $\mathbb{R}$ la topología generada por la subbase

$$\mathcal{S} := \{U \setminus S : U \in \tau_{\mathbb{R}} \wedge S \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\},$$

entonces los siguientes enunciados son ciertos.

1. $\tilde{\mathbb{R}}$ es un espacio homogéneo submetrizable.
2. Para cualquier $x \in \tilde{\mathbb{R}}$ se satisface que $\chi(x, \tilde{\mathbb{R}}) = \mathfrak{c}$.
3. $\omega = R(\tilde{\mathbb{R}}) < nw(\tilde{\mathbb{R}})$.

Demostración. Comencemos por observar que la colección

$$\mathcal{B} := \left\{ (a, b) \setminus \bigcup_{k < n} S_k : a, b \in \mathbb{Q}, a < b, n < \omega \wedge \{S_k : k < n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}) \right\}$$

es una base para el espacio $\tilde{\mathbb{R}}$. De esta forma, si $a, b \in \mathbb{Q}$ cumplen $a < b$ y $S := \{b + 2^{-n} : n < \omega\}$, entonces $(a, b) = (a, b) \setminus S$. En particular, se verifica la contención $\tau_{\tilde{\mathbb{R}}} \subseteq \tau$ y, en consecuencia, $\tilde{\mathbb{R}}$ es submetrizable.

Fijemos ahora $x \in \tilde{\mathbb{R}}$. Para demostrar el inciso (2) probaremos la siguiente afirmación.

Afirmación 1. La colección

$$\mathcal{B}_x := \{(a, b) \setminus S : a, b \in \mathbb{Q}, a < b, S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), x \in (a, b) \setminus S \wedge S \text{ converge a } x\}$$

es una base local para $\tilde{\mathbb{R}}$ en x .

Sean $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$, $n < \omega$ y $\{S_k : k < n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de tal forma que $x \in (a, b) \setminus \bigcup_{k < n} S_k$. Sean $I := \{k < n : S_k \text{ no converge a } x\}$ y $J := \{k < n : S_k \text{ no converge a } x\}$. Para cada $k \in I$ existen $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ con $x \in (a_k, b_k)$ y $(a_k, b_k) \cap S_k = \emptyset$. Consideremos los racionales $c := \max(\{a_k : k \in I\} \cup \{a\})$ y $d := \min(\{b_k : k \in I\} \cup \{b\})$. Finalmente, como un argumento rutinario muestra que $S := \bigcup_{k \in J} S_k$ es un elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que converge a x , se satisface que $(c, d) \setminus S \in \mathcal{B}_x$ y $(c, d) \setminus S \subseteq (a, b) \setminus \bigcup_{k < n} S_k$.

Ahora, por un lado, es claro que $|\mathcal{B}_x| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times [\tilde{\mathbb{R}}]^\omega| = \mathfrak{c}$. Por otro lado, si $\kappa < \mathfrak{c}$ y $\{(a_\alpha, b_\alpha) \setminus S_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de $\mathcal{B}_x$, entonces se cumple que $|\bigcup_{\alpha < \kappa} S_\alpha| \leq \kappa \cdot \sup\{|S_\alpha| : \alpha < \kappa\} < \mathfrak{c}$. De esta manera, para cada $n < \omega$ podemos tomar $x_n \in (0, 2^{-n}) \setminus$

$\bigcup_{\alpha < \kappa} S_\alpha$. En consecuencia, $S := \{x_n : n < \omega\}$ es un elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que converge a x y para cada $\alpha < \kappa$ se verifica que $(a_\alpha, b_\alpha) \setminus S_\alpha \not\subseteq \mathbb{R} \setminus S$. Por lo tanto, $\chi(x, \mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Para comprobar que $\mathbb{R}$ es un espacio homogéneo es suficiente observar que si $x \in \mathbb{R}$, entonces la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ determinada mediante $h(y) := x + y$ es un homeomorfismo con $h(0) = x$. Simplemente notemos que si $(a, b) \setminus S \in \mathcal{B}_0$, entonces $h[(a, b) \setminus S] = (x + a, x + b) \setminus (x + S)$ pertenece a $\mathcal{B}_x$.

Para el inciso (3), supongamos en busca de un absurdo que $\mathcal{N}$ es una red numerable para $\mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ consideremos al conjunto $\mathcal{N}(x) := \{N \in \mathcal{N} : x \in N\}$.

Afirmación 2. Existe $x \in \mathbb{R}$ de tal modo que para cada $\mathcal{M} \in [\mathcal{N}(x)]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ se satisface que $|\bigcap \mathcal{M}| \geq \omega$.

En efecto, supongamos por el contrario que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $\mathcal{M}_x \in [\mathcal{N}(x)]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con $|\bigcap \mathcal{M}_x| < \omega$. Luego, como $\{\bigcap \mathcal{M}_x : x \in \mathbb{R}\}$ es un subconjunto del conjunto numerable $\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \in [\mathcal{N}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$, la función $\mathbb{R} \rightarrow \{\bigcap \mathcal{M}_x : x \in \mathbb{R}\}$ definida como $x \mapsto \bigcap \mathcal{M}_x$ tiene una fibra de cardinalidad $\mathfrak{c}$; en consecuencia, existen $A \in [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$ y $y \in \mathbb{R}$ con $\bigcap \mathcal{M}_y = \bigcap \mathcal{M}_x$ siempre que $x \in A$. Resulta entonces que A es un subconjunto infinito de $\bigcap \mathcal{M}_y$, una contradicción.

Sea $x \in \mathbb{R}$ como en la Afirmación 2 y fijemos una enumeración sin repeticiones $\{N_k : k < \omega\}$ del conjunto $\mathcal{N}(x)$. Un razonamiento recursivo produce una sucesión $\{x_k : k < \omega\} \subseteq \mathbb{R}$ de tal manera que

$$x_k \in \left(\bigcap_{i \leq k} N_i \right) \setminus (\{x_i : i < k\} \cup \{x\})$$

para cualquier $k < \omega$. Mostramos a continuación que (x_k) converge a x en $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. En efecto, si $U \in \tau_{\mathbb{R}}$ cumple $x \in U$, entonces como $U \in \tau$ existe $k < \omega$ con $N_k \subseteq U$. De esta manera, se satisface la inclusión $\{x_i : i \geq k\} \subseteq U$.

Finalmente, si $S := \{x_k : k < \omega\}$ entonces se cumplen las relaciones $x \in \mathbb{R} \setminus S \in \tau$. No obstante, para cualquier $k < \omega$ se tiene que $x_k \in N_k$ y $x_k \notin \mathbb{R} \setminus S$. Por lo tanto, para cada $N \in \mathcal{N}(x)$ no sucede que $N \subseteq \mathbb{R} \setminus S$, una contradicción al hecho de que $\mathcal{N}$ es una red. En suma, $nw(\mathbb{R}) > \omega$.

Para demostrar la segunda parte del inciso (3) supongamos que $X := \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un subespacio débilmente separado de $\mathbb{R}$ y sea $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una separación débil para X donde cada B_α pertenece a la colección $\mathcal{B}_{x_\alpha}$ correspondiente (véanse el lema 6.3.4 y la Afirmación 1). Para cada $\alpha < \omega_1$ existen $\{a_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{b_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{Q}$ y $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de tal manera que $B_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha) \setminus S_\alpha$ con S_α convergente a x_α . En virtud de que la función $\omega_1 \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ determinada mediante $\alpha \mapsto (a_\alpha, b_\alpha)$ admite una fibra de cardinalidad ω_1 , supondremos sin perder generalidad la existencia de $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $a_\alpha = a$ y $b_\alpha = b$ para cada $\alpha < \omega_1$; en particular, $B_\alpha = (a, b) \setminus S_\alpha$.

Antes de continuar hagamos un par de observaciones. Primero, el hecho de que $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una separación débil para X implica que $x_\alpha \notin S_\alpha$ siempre que $\alpha < \omega_1$,

y para cualesquiera $\alpha < \beta < \omega_1$ se satisface que $x_\alpha \in S_\beta$ ó $x_\beta \in S_\alpha$. Segundo, como para $\alpha < \beta < \omega_1$ se cumple que S_α y S_β tienen límites distintos, entonces necesariamente $|S_\alpha \cap S_\beta| < \omega$.

Ahora, consideremos a la función $f : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ definida como $f(\alpha) := \min\{\beta < \omega_1 : x_\beta \notin S_\alpha\}$. En vista de que $x_\alpha \notin S_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$, es claro que $f(\alpha) \leq \alpha$. Consideremos al conjunto $A := \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) < \alpha\}$ y observemos que $\alpha \notin A$ si y sólo si $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq S_\alpha$.

Afirmación 3. Si $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ satisface $\alpha \notin A$, entonces para cualquier $\beta \in \omega_1 \setminus \omega$ con $\beta \neq \alpha$ se cumple que $\beta \in A$.

La demostración es por contradicción: supongamos en busca de un absurdo que $\beta \notin A$. En estas circunstancias, los conjuntos infinitos $\{x_\gamma : \gamma < \alpha\}$ y $\{x_\gamma : \gamma < \beta\}$ están contenidos respectivamente en S_α y S_β . De esta manera, el conjunto infinito $\{x_\gamma : \gamma < \min\{\alpha, \beta\}\}$ está contenido en $S_\alpha \cap S_\beta$, lo que contradice la desigualdad $|S_\alpha \cap S_\beta| < \omega$.

La Afirmación 3 certifica que $(\omega_1 \setminus \omega) \cap (\omega_1 \setminus A)$ consta de a lo sumo un punto. Por esta razón, existe $\alpha \in \omega_1$ de tal forma que $[\alpha, \omega_1) \subseteq A$. En particular, como A contiene al conjunto estacionario $[\alpha, \omega_1)$, A es un conjunto estacionario. Además, la restricción de f al conjunto A es una función regresiva. Así, el Lema de Fodor (véase [24, Teorema 1.39, p. 20]) garantiza que f tiene una fibra de cardinalidad ω_1 .

Finalmente, sean $\beta < \omega_1$ y $B \in [A]^{\omega_1}$ de tal forma que $f[B] \subseteq \{\beta\}$. Observemos que para cada $\alpha \in B$ la condición $f(\alpha) = \beta$ implica que $x_\beta \notin S_\alpha$ y, por lo tanto, $x_\alpha \in S_\beta$. Este argumento demuestra que el conjunto no numerable $\{x_\alpha : \alpha \in B\}$ está contenido en el conjunto numerable S_β , lo cual constituye una contradicción. En conclusión, X no admite subespacios débilmente separados de cardinalidad ω_1 , equivalentemente, $R(X) = \omega$. $\square$

En suma, las proposiciones 6.1.1 y 6.3.1 certifican que para cualquier espacio X los números cardinales $R(X)$ y $c(\mathcal{F}[X])$ están entre $hd(X) \cdot hL(X)$ y $nw(X)$. La pregunta natural que surge es: ¿cómo se relacionan los cardinales $R(X)$ y $c(\mathcal{F}[X])$?

Antes de responder la cuestión anterior vamos a introducir un par de funciones cardinales más. Para seguir la tradición de la literatura, para cualquier espacio topológico X definimos

$$c^*(X) := \sup\{c(X^n) : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad R^*(X) := \sup\{R(X^n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por ejemplo, en [49] se demuestra que la igualdad $R(\tilde{\mathbb{R}}) = \omega$ obtenida en el ejemplo 6.3.5(3) se puede fortalecer a $R^*(\tilde{\mathbb{R}}) = \omega$. La conexión entre $R(X)$, $c(\mathcal{F}[X])$, $R^*(X)$ y $c^*(\mathcal{F}[X])$ queda establecida en los teoremas 6.3.6, 6.3.7 y 6.3.9 que presentamos a continuación.

Teorema 6.3.6. Si X es un espacio topológico, entonces $R^*(X) = c^*(\mathcal{F}[X])$.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subespacio débilmente separado de X^n con $x_\alpha = (x(\alpha, 1), \dots, x(\alpha, n))$, $\{U(\alpha, 1) \times \dots \times U(\alpha, n) : \alpha < \kappa\}$ una separación débil para $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$, y definamos para cada $\alpha < \kappa$,

$$U_\alpha := [\{x(\alpha, 1)\}, U(\alpha, 1)] \times \dots \times [\{x(\alpha, n)\}, U(\alpha, n)].$$

Afirmamos que $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia celular en $\mathcal{F}[X]^n$. En efecto, si $\alpha, \beta < \kappa$ y $(F_1, \dots, F_n) \in \mathcal{F}[X]^n$ cumplen $(F_1, \dots, F_n) \in U_\alpha \cap U_\beta$, entonces para cada $1 \leq k \leq n$ se satisface que $\{x(\alpha, k), x(\beta, k)\} \subseteq F_k \subseteq U(\alpha, k) \cap U(\beta, k)$. De esta manera, $x_\alpha \in U(\beta, 1) \times \dots \times U(\beta, n)$ y $x_\beta \in U(\alpha, 1) \times \dots \times U(\alpha, n)$, lo cual implica que $\alpha = \beta$. Este argumento demuestra que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple la relación $R(X^n) \leq c(\mathcal{F}[X]^n)$; en consecuencia, $R^*(X) \leq c^*(\mathcal{F}[X])$.

Para la desigualdad restante supongamos, en busca de un absurdo, que $c^*(\mathcal{F}[X])$ es mayor estricto que $\kappa := R^*(X)$. Luego, como $c^*(\mathcal{F}[X]) \geq \kappa^+$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $c(\mathcal{F}[X]^n) \geq \kappa^+$ y, por lo tanto, existe una familia celular

$$\{[F(\alpha, 1), U(\alpha, 1)] \times \dots \times [F(\alpha, n), U(\alpha, n)] : \alpha < \kappa^+\}$$

en $\mathcal{F}[X]^n$. En virtud de que la función $\kappa^+ \rightarrow \mathbb{N}^n$ determinada mediante $\alpha \mapsto (|F(\alpha, 1)|, \dots, |F(\alpha, n)|)$ admite una fibra de cardinalidad κ^+ , supondremos sin perder generalidad que existen $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ con $|F(\alpha, k)| = m_k$ siempre que $\alpha < \kappa^+$ y $1 \leq k \leq n$. Sea $\{x(\alpha, k, j) : 1 \leq j \leq m_k\}$ una enumeración sin repeticiones de $F(\alpha, k)$.

Para cada $\alpha < \kappa^+$ sean

$$x_\alpha := ((x(\alpha, 1, 1), \dots, x(\alpha, 1, m_1)), \dots, (x(\alpha, n, 1), \dots, x(\alpha, n, m_n))) \text{ y}$$

$$U_\alpha := (U(\alpha, 1) \times \dots \times U(\alpha, 1)) \times \dots \times (U(\alpha, n) \times \dots \times U(\alpha, n)).$$

Veamos que $\{U_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es una separación débil del subespacio $\{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de $X^{m_1} \times \dots \times X^{m_n}$. Si $\alpha < \beta < \kappa^+$ y $x_\alpha \in U_\beta$, entonces para cada $1 \leq k \leq n$ se satisface que $F(\alpha, k) \subseteq U(\beta, k)$. Así, existe $1 \leq k \leq n$ de tal forma que $F(\beta, k) \not\subseteq U(\alpha, k)$, lo cual implica la existencia de $1 \leq j \leq m_k$ con $x(\beta, k, j) \notin U(\alpha, k)$; en consecuencia, $x_\beta \notin U_\alpha$.

Finalmente, observemos que si $m := m_1 + \dots + m_n$, entonces los espacios $X^{m_1} \times \dots \times X^{m_n}$ y X^m son homeomorfos y, por ende, deducimos que X^m admite un subespacio débilmente separado de cardinalidad κ^+ , una contradicción a la relación $R^*(X) < \kappa^+$. $\square$

Teorema 6.3.7. Si X es un espacio topológico, entonces $R(X) \leq c(\mathcal{F}[X]) \leq R^*(X) \leq nw(X)$. Si además X es T_2 , entonces $nw(X) \leq 2^{R(X)}$.

Demostración. Para la desigualdad $R(X) \leq c(\mathcal{F}[X])$ mostraremos que si Y es un subespacio débilmente separado de X , entonces $\mathcal{F}[X]$ admite una familia celular de cardinalidad $|Y|$. Sea $\{V_y : y \in Y\}$ una separación débil para Y . Para cada $y \in Y$ tomemos

$U_y \in \tau_X$ con $V_y = U_y \cap Y$, y consideremos la colección $\{[\{y\}, U_y] : y \in Y\}$. Si $y, z \in Y$ son distintos y suponemos que $[\{y\}, U_y] \cap [\{z\}, U_z] \neq \emptyset$, entonces $\{y, z\} \subseteq U_y \cap U_z$. De esta manera, $\{y, z\} \subseteq V_y \cap V_z$ y, por ende, $y \in V_z$ y $z \in V_y$; una contradicción a la hipótesis de separación débil. En consecuencia, $\{[\{y\}, U_y] : y \in Y\}$ es una familia celular en $\mathcal{F}[X]$ de tamaño $|Y|$.

La relación $c(\mathcal{F}[X]) \leq R^*(X)$ es evidente en virtud del teorema 6.3.6. Por otra parte, como para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface que $R(X^n) \leq nw(X^n) = nw(X)$ (véase la proposición 6.3.1), entonces $R^*(X) \leq nw(X)$.

La última desigualdad es consecuencia de lo siguiente: un resultado sobresaliente de Hajnal y Juhász establece que $|X| \leq 2^{s(X) \cdot \psi(X)}$ siempre que X es T_1 (véase [32, Theorem 4.7, p. 20]). De esta manera, como para espacios de Hausdorff $s \leq hd$ y $\psi \leq hL$, es inmediato que

$$nw(X) \leq |X| \leq 2^{s(X) \cdot \psi(X)} \leq 2^{hd(X) \cdot hL(X)} \leq 2^{R(X)}$$

si X es T_2 (véase la proposición 6.3.1). $\square$

Corolario 6.3.8. *Cualquier espacio débilmente separado X cumple las relaciones $c^*(\mathcal{F}[X]) = R^*(X) = c(\mathcal{F}[X]) = R(X) = nw(X) = |X|$.*

Teorema 6.3.9. *Si X es un espacio topológico, entonces $R^*(X) = \sup\{c(\mathcal{F}[X^n]) : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. Sea $\mu := \sup\{c(\mathcal{F}[X^n]) : n \in \mathbb{N}\}$. Primero, como para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface que $R(X^n) \leq c(\mathcal{F}[X^n])$ (véase el teorema 6.3.7), entonces $R^*(X) \leq \mu$. Ahora supongamos en busca de un absurdo que μ es mayor estricto que $\kappa := R^*(X)$. Empleemos la desigualdad $\mu \geq \kappa^+$ para encontrar $n \in \mathbb{N}$ con $c(\mathcal{F}[X^n]) \geq \kappa^+$, y sea $\{[F_\alpha, U_\alpha] : \alpha < \kappa^+\}$ una familia celular en $\mathcal{F}[X^n]$. En vista de que la función $\kappa^+ \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $\alpha \mapsto |F_\alpha|$ tiene una fibra de cardinalidad κ^+ , supondremos sin perder generalidad que hay $m \in \mathbb{N}$ con $|F_\alpha| = m$ para cada $\alpha < \kappa^+$. Sea $\{x(\alpha, 1), \dots, x(\alpha, m)\}$ una enumeración sin repeticiones de F_α , y para cada $1 \leq k \leq m$ sean $x(\alpha, k, 1), \dots, x(\alpha, k, n) \in X$ y $U(\alpha, k, 1), \dots, U(\alpha, k, n) \in \tau_X$ con $x(\alpha, k) = (x(\alpha, k, 1), \dots, x(\alpha, k, n)) \in U(\alpha, k, 1) \times \dots \times U(\alpha, k, n) \subseteq U_\alpha$.

Para cada $\alpha < \kappa^+$ sean

$$x_\alpha := ((x(\alpha, 1, 1), \dots, x(\alpha, 1, n)), \dots, (x(\alpha, m, 1), \dots, x(\alpha, m, n)))$$

$$U_\alpha := (U(\alpha, 1, 1) \times \dots \times U(\alpha, 1, n)) \times \dots \times (U(\alpha, m, 1) \times \dots \times U(\alpha, m, n)).$$

Veamos que $\{U_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es una separación débil del subespacio $\{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de $X^n \times \dots \times X^n$. Si $\alpha < \beta < \kappa^+$ y $x_\alpha \in U_\beta$, entonces $F_\alpha \subseteq U_\beta$ y, por ende, $F_\beta \not\subseteq U_\alpha$, es decir, existen $1 \leq k \leq m$ y $1 \leq j \leq n$ con $x(\beta, k, j) \notin U(\alpha, k, j)$; en particular, $x_\beta \notin U_\alpha$.

Para terminar notemos que, como los espacios $X^n \times \dots \times X^n$ y X^{mn} son homeomorfos, X^{mn} contiene un subespacio débilmente separado de cardinalidad κ^+ , una contradicción a la desigualdad $R^*(X) < \kappa^+$. $\square$

De vuelta a la condición $C(\kappa)$, el teorema 6.3.6 también permite refinar de manera natural la primera desigualdad de (6.2).

Corolario 6.3.10. *Si κ es un cardinal infinito y X es un espacio topológico con $\omega < \text{cf}(\kappa) < R^*(X)$, entonces X no satisface la condición $C(\kappa)$.*

Demostración. La condición $\text{cf}(\kappa) < R^*(X) = c^*(\mathcal{F}[X])$ produce una familia celular en una potencia finita $\mathcal{F}[X]$ de cardinalidad $\text{cf}(\kappa)$. Por esta razón, la proposición 2.1.7 implica que $\text{cf}(\kappa)$ no es un precalibre débil para $\mathcal{F}[X]$ y, por ende, la proposición 2.2.1 garantiza que κ tampoco es un precalibre débil para $\mathcal{F}[X]$. En consecuencia, el teorema 6.2.7 asegura que X no satisface la condición $C(\kappa)$. $\square$

Por lo tanto, la segunda desigualdad de (6.2) y el corolario 6.3.10 implican que, para determinar si X cumple $C(\kappa)$ o no, únicamente necesitamos concentrarnos en aquellos números cardinales κ con $\text{cf}(\kappa) > \omega$ que satisfacen las relaciones

$$R^*(X) \leq \text{cf}(\kappa) \leq nw(X). \quad (6.3)$$

Pregunta 6.3.11. ¿Es cierto que si κ es un cardinal regular y X es un espacio infinito y T_1 con $R^*(X) \leq \kappa \leq nw(X)$, entonces X satisface la condición $C(\kappa)$?

En este punto la respuesta para la pregunta 6.3.11 depende del espacio topológico en cuestión. Por ejemplo, el espacio de ordinales $[0, \omega_1)$ es separado-derecho con el orden natural; en particular, es débilmente separado. Por esta razón, el corolario 6.3.8 implica las relaciones

$$R^*([0, \omega_1)) = c(\mathcal{F}([0, \omega_1))) = nw([0, \omega_1)) = \omega_1.$$

De esta manera, la condición $c(\mathcal{F}([0, \omega_1))) = \omega_1$ implica que $\mathcal{F}([0, \omega_1))$ admite una familia celular de cardinalidad ω_1 y, por ende, la proposición 2.1.7 garantiza que $\mathcal{F}([0, \omega_1))$ no tiene precalibre débil ω_1 ; en consecuencia, el teorema 6.2.7 certifica que $[0, \omega_1)$ **no** satisface la condición $C(\omega_1)$.

Por otra parte, vimos en el corolario 3.5.6 que bajo $\text{MA}(\omega_1)$ cualquier espacio topológico con celularidad numerable tiene precalibre ω_1 . Ahora, como el espacio $\tilde{\mathbb{R}}$ del ejemplo 6.3.5 satisface $R^*(\tilde{\mathbb{R}}) = \omega$ (véase [49]), el teorema 6.3.7 implica que $\mathcal{F}[\tilde{\mathbb{R}}]$ tiene celularidad numerable y, por lo tanto, $\text{MA}(\omega_1)$ asegura que $\mathcal{F}[\tilde{\mathbb{R}}]$ tiene precalibre ω_1 ; en consecuencia, el teorema 6.2.7 constata que $\tilde{\mathbb{R}}$ **sí** satisface la condición $C(\omega_1)$.

Pregunta 6.3.12. ¿Es posible demostrar en ZFC que $\tilde{\mathbb{R}}$ satisface la condición $C(\omega_1)$? Esto se reduce a dar una prueba del siguiente enunciado: si $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$ y $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathcal{S}(\tilde{\mathbb{R}})$ satisfacen que S_α converge a x_α y $x_\alpha \notin S_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$, entonces existe $J \in [\omega_1]^{\omega_1}$ de tal modo que $\{x_\alpha : \alpha \in J\} \cap \bigcup \{S_\alpha : \alpha \in J\} = \emptyset$.

Como comentario final para concluir esta sección, es importante destacar que esta parte de la texto (particularmente, la condición $C(\omega_1)$) ha generado un interés significativo dentro de la comunidad matemática. Por ejemplo, Juhász, Soukup y Szentmiklóssy, en [38], demostraron, entre otros resultados, que bajo una consecuencia de CH conocida como $\uparrow_{\text{SUPER}}$ (véase [56, Definition 3.0.11, p. 33]), todo espacio T_3 que satisface la condición $C(\omega_1)$ es cósmico. Posteriormente, en [18], Dow y Juhász emplearon la técnica de submodelos elementales para establecer dos resultados principales: primero, existe un ejemplo en ZFC de un espacio de Hausdorff con $C(\omega_1)$ y peso red no numerable; y segundo, después de añadir cualquier número de reales de Cohen a un modelo de la CH, todo espacio regular que satisface $C(\omega_1)$ en la extensión tiene peso de red numerable.

6.4. Propiedades de los espacios débilmente separados

Esta sección está dedicado a establecer algunas propiedades fundamentales de los espacios débilmente separados. Por ejemplo, se pueden emplear argumentos rutinarios para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 6.4.1. *Sean X , Y y Z una terna de espacios topológicos.*

1. *Si Y es un subespacio de X y Z es un subespacio de Y , entonces Z es débilmente separado como subespacio de X si y sólo si Z es débilmente separado como subespacio de Y .*
2. *Cuando X es débilmente separado, X es T_0 .*
3. *Si X es débilmente separado y Y es un subespacio de X , entonces Y es débilmente separado.*
4. *Los siguientes enunciados son ciertos para una función $f : X \rightarrow Y$.*
 - (a) *Si f es una condensación y Y es débilmente separado, entonces X es débilmente separado.*
 - (b) *Si f es continua y suprayectiva, entonces $R(Y) \leq R(X)$ y $R^*(X) \leq R^*(Y)$.*

Lema 6.4.2. *Si X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ es una familia formada por subespacios abiertos y débilmente separados de X , entonces $\bigcup \mathcal{U}$ es un subespacio débilmente separado de X .*

Demostración. Sean $U := \bigcup \mathcal{U}$, $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una enumeración sin repeticiones de $\mathcal{U}$ y, para cada $\alpha < \lambda$, fijemos una separación débil $\{V(x, \alpha) : x \in U_\alpha\} \subseteq \tau_{U_\alpha}$ para

U_α . Además, para cada $x \in U$ consideremos al ordinal $\alpha_x := \min\{\alpha < \lambda : x \in U_\alpha\}$ y definamos $V_x := V(x, \alpha_x)$. Ahora, para comprobar que $\{V_x : x \in U\}$ es una separación débil para U , notemos primero que $\{V_x : x \in U\}$ es un subconjunto de τ_U con $x \in V_x$ para toda $x \in U$. Finalmente, si $x, y \in U$ son distintos tenemos dos casos: si $\alpha_x < \alpha_y$ ó $\alpha_y < \alpha_x$, entonces $y \notin V_x$ ó $x \notin V_y$; en caso contrario, $\alpha_x = \alpha_y$ y así, como U_{α_x} está débilmente separado, $x \notin V_y$ ó $y \notin V_x$. $\square$

Lema 6.4.3. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia formada por subespacios cerrados y débilmente separados de X . Si $\mathcal{F}$ es localmente finita con respecto a $\bigcup \mathcal{F}$, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es un subespacio débilmente separado de X .

Demostración. Sean $F := \bigcup \mathcal{F}$ y $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una enumeración sin repeticiones de $\mathcal{F}$. Para cada $x \in F$ sea $U_x \in \tau_F$ de tal modo que $x \in U_x$ y $I_x := \{\alpha < \lambda : F_\alpha \cap U_x \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito, y definamos $J_x := \{\alpha \in I_x : x \in F_\alpha\}$ y $K_x := I_x \setminus J_x$. Además, para toda $\alpha < \lambda$ sea $\{V(x, \alpha) : x \in F_\alpha\}$ un subconjunto de τ_F que separa débilmente a F_α . Finalmente, para cada $x \in F$ definamos

$$W_x := \begin{cases} U_x \cap \left(\bigcap_{\alpha \in J_x} V(x, \alpha) \right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in K_x} (X \setminus F_\alpha) \right), & \text{si } K_x \neq \emptyset, \\ U_x \cap \left(\bigcap_{\alpha \in J_x} V(x, \alpha) \right), & \text{si } K_x = \emptyset. \end{cases}$$

Mostramos a continuación que $\{W_x : x \in F\}$ es una separación débil para F . Observemos que $\{W_x : x \in F\}$ es un subconjunto de τ_F con $x \in W_x$ para toda $x \in F$. Ahora, sean $x, y \in F$ distintos que satisfacen $x \in W_y$. También, sea $\alpha < \lambda$ tal que $x \in F_\alpha$. Notemos que, como $x \in F_\alpha \cap U_y$, α pertenece a I_y . Luego, como para cada $\gamma \in K_y$ se tiene que $x \in X \setminus F_\gamma$, inferimos que $\alpha \notin K_y$ y, por ende, $\alpha \in J_y$. Así, x y y son elementos de F_α con $x \in V(y, \alpha)$; en consecuencia, como $\{V(z, \alpha) : z \in F_\alpha\}$ es una separación débil para F_α , se obtiene la relación $y \notin V(x, \alpha)$, la cual implica que $y \notin W_x$. $\square$

La implicación directa del siguiente resultado se deduce a partir de la proposición 6.4.1(3), mientras que la implicación recíproca es consecuencia del lema 6.4.2.

Proposición 6.4.4. Si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos, entonces $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ es débilmente separado si y sólo si cada sumando lo es.

Proposición 6.4.5. Si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos, entonces $R(\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha) = \lambda \cdot \sup \{R(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}$.

Demostración. Sea $X := \bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$. Primero, si para cada $\alpha < \lambda$ tomamos $x_\alpha \in X_\alpha$, entonces $\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es un subespacio discreto (en particular, débilmente separado) de X y, por lo tanto, $\lambda \leq R(X)$. Por otra parte, si $\alpha < \lambda$ y Y_α es un subespacio débilmente separado de X_α , entonces Y_α es un subespacio débilmente separado de X (véase la proposición 6.4.1); en consecuencia, $\sup \{R(X_\alpha) : \alpha < \lambda\} \leq R(X)$.

Para comprobar la desigualdad restante, sea Y un subespacio débilmente separado de X . En virtud de que para cada $\alpha < \lambda$ se satisface que $Y \cap X_\alpha$ es un subespacio débilmente separado de X_α (véase la proposición 6.4.1), deducimos que $|Y \cap X_\alpha| \leq R(X_\alpha)$ y, por lo tanto,

$$|Y| = \left| \bigcup_{\alpha < \lambda} (Y \cap X_\alpha) \right| \leq \lambda \cdot \sup\{|Y \cap X_\alpha| : \alpha < \lambda\} \leq \lambda \cdot \sup\{R(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}.$$

En conclusión, $R(X) \leq \lambda \cdot \sup\{R(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}$. $\square$

Proposición 6.4.6. *Si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos con al menos dos puntos, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *Si $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ es débilmente separado, entonces cada X_α es débilmente separado.*
2. *Si cada X_α es débilmente separado, entonces el producto caja $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ es débilmente separado. En especial, el producto topológico de una familia finita de espacios débilmente separados es débilmente separado.*
3. *Si $\lambda \geq \omega$, entonces $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ no es débilmente separado.*

Demostración. Para el inciso (1) es suficiente recordar que cada X_α es homeomorfo a un subespacio del producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$.

En segundo término, para cada $\alpha < \lambda$ fijemos una separación débil $\{U(\alpha, x) : x \in X_\alpha\}$ para X_α . Luego, observemos que si $X := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, $x, y \in X$ son distintos y $\alpha < \lambda$ satisface $x(\alpha) \neq y(\alpha)$, entonces $x(\alpha) \notin U(\alpha, y(\alpha))$ ó $y(\alpha) \notin U(\alpha, x(\alpha))$ y, por ende, $x \notin \prod_{\beta < \lambda} U(\beta, y(\beta))$ ó $y \notin \prod_{\beta < \lambda} U(\beta, x(\beta))$. En consecuencia, $\{\prod_{\alpha < \lambda} U(\alpha, x(\alpha)) : x \in X\}$ es una separación débil para X .

Para el inciso (3) notemos que si J es un subconjunto infinito numerable de λ , para cada $\alpha \in J$ tomamos $x_\alpha, y_\alpha \in J$ distintos, y definimos $Y_\alpha := \{x_\alpha, y_\alpha\}$, entonces el producto $\prod_{\alpha \in J} Y_\alpha$ es no numerable, segundo numerable y se encaja en el producto $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$. Por lo tanto, como el corolario 6.3.2 garantiza que $\prod_{\alpha \in J} Y_\alpha$ no es débilmente separado, concluimos que $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ tampoco es débilmente separado. $\square$

Una consecuencia de la proposición 6.4.6 es que todas las potencias finitas de un espacio débilmente separado también poseen la misma característica. Ahora, una pregunta natural que podría surgir es cuándo el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es débilmente separado. Resulta que esta propiedad está presente siempre. Efectivamente, un razonamiento sencillo muestra que $\{[F, X] : F \in \mathcal{F}[X]\}$ es una separación débil para $\mathcal{F}[X]$. De esta manera, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos recursivamente $\mathcal{F}^1[X] := \mathcal{F}[X]$ y $\mathcal{F}^{n+1}[X] := \mathcal{F}[\mathcal{F}^n[X]]$, entonces se verifica el siguiente resultado.

Proposición 6.4.7. *Si X es un espacio topológico, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface que $\mathcal{F}^n[X]$, $\mathcal{F}[X^n]$ y $\mathcal{F}[X]^n$ son espacios débilmente separados.*

En particular, la proposición 6.4.7 permite detectar por medio de la propiedad de separación débil cuándo un espacio X **no** se encaja topológicamente en alguno de los espacios $\mathcal{F}^n[X]$, $\mathcal{F}[X^n]$ y $\mathcal{F}[X]^n$.

Corolario 6.4.8. *Si X no es débilmente separado, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface que $\mathcal{F}^n[X]$, $\mathcal{F}[X^n]$ y $\mathcal{F}[X]^n$ no contiene copias topológicas de X .*

En especial, por el corolario 6.3.2 cualquier espacio X con $nw(X) < |X|$ cumple la hipótesis del corolario 6.4.8. De esta manera, por ejemplo, $\mathbb{R}$ no se encaja en $\mathcal{F}^n[\mathbb{R}]$, $\mathcal{F}[\mathbb{R}^n]$ y $\mathcal{F}[\mathbb{R}]^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, si bien se presentan muchas dificultades para hacer el cálculo explícito de $c(\mathcal{F}[X])$ para un espacio topológico X arbitrario (véanse por ejemplo [29], [45] y [63]), el corolario 6.3.8 y la proposición 6.4.7 permiten hacer el cálculo correspondiente para cada $\mathcal{F}^n[X]$ con $n \geq 2$.

Corolario 6.4.9. *Si X es un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$c^*(\mathcal{F}^{n+1}[X]) = R^*(\mathcal{F}^n[X]) = c(\mathcal{F}^{n+1}[X]) = R(\mathcal{F}^n[X]) = |X|.$$

En virtud de la proposición 6.4.5, sería deseable obtener una fórmula semejante para calcular el valor de R para un producto de espacios topológicos. No hemos logrado obtener una igualdad en el sentido anterior, pero sí disponemos de un par de cotas en el caso de los espacios T_2 .

Proposición 6.4.10. *Si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios de Hausdorff, entonces*

$$\lambda \cdot \sup\{R(X_\alpha) : \alpha < \lambda\} \leq R\left(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha\right) \leq \lambda \cdot \sup\{2^{R(X_\alpha)} : \alpha < \lambda\}.$$

Demostración. Por un lado, como $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ se encaja en $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, la proposición 6.4.5 implica que

$$\lambda \cdot \sup\{R(X_\alpha) : \alpha < \lambda\} \leq R\left(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha\right).$$

Por otro lado, la proposición 6.3.1 garantiza que

$$\begin{aligned} R\left(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha\right) &\leq nw\left(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha\right) \\ &= \lambda \cdot \sup\{nw(X_\alpha) : \alpha < \lambda\} \leq \lambda \cdot \sup\{2^{R(X_\alpha)} : \alpha < \lambda\}. \end{aligned}$$

□

Corolario 6.4.11. Si λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios con $n \, w(X_\alpha) \leq \lambda$ para cada $\alpha < \lambda$, y $X := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface que $R(X^n) = \lambda$.

Demostración. Nuestras hipótesis implican las relaciones $R^*(X) = R(X) = \lambda$. De esta manera, como X se encaja en cada una de sus potencias finitas, la proposición 6.4.1 garantiza que $R(X^n) = \lambda$ siempre que $n \in \mathbb{N}$. □

Proposición 6.4.12. Si λ es un número cardinal infinito, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos, $X := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, $z \in X$ y consideramos a los σ -productos $\sigma(X) := \{x \in X : |\{\alpha < \lambda : x(\alpha) \neq z(\alpha)\}| < \omega\}$ y $\Sigma(X) := \{x \in X : |\{\alpha < \lambda : x(\alpha) \neq z(\alpha)\}| \leq \omega\}$, entonces los siguientes enunciados son ciertos.

1. $R(\sigma(X)) = \lambda$.
2. Si $\lambda = 2^\kappa$ para un cardinal κ , entonces $R(\Sigma(X)) = \lambda$.
3. Si suponemos GCH y $\text{cf}(\lambda) > \omega$, entonces $R(\Sigma(X)) = \lambda$.

Demostración. Primero, como $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ se encaja en $\sigma(X)$ y la suma admite un subespacio discreto de cardinalidad λ , se satisfacen las relaciones $\lambda \leq R(\sigma(X)) \leq R(\Sigma(X))$. Ahora, si para cada $x \in X$ definimos $S(x) := \{\alpha < \lambda : x(\alpha) \neq z(\alpha)\}$, entonces las funciones $\sigma(X) \rightarrow [\lambda]^{<\omega}$ y $\Sigma(X) \rightarrow [\lambda]^{\leq \omega}$ determinadas respectivamente mediante $x \mapsto S(x)$ y $y \mapsto S(y)$ son inyectivas; en consecuencia, $|\sigma(X)| \leq \lambda$ y $|\Sigma(X)| \leq \lambda^\omega$.

Para terminar observemos que, como la función R se queda siempre por debajo de la cardinalidad, la primera desigualdad implica que $R(\sigma(X)) = \lambda$. Por otra parte, si $\lambda = 2^\kappa$, entonces la segunda desigualdad certifica que $R(\Sigma(X)) = \lambda$. Finalmente, si GCH es cierta y $\text{cf}(\lambda) > \omega$, entonces $\lambda^\omega = \lambda$ (véase [41, Lema 10.42, p. 34]) y así, $R(\Sigma(X)) = \lambda$. □

Proposición 6.4.13. El σ -producto de una familia de espacios T_1 débilmente separados es débilmente separado.

Demostración. Sean λ un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios débilmente separados, $X := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, $z \in X$, $U_z := X$ y $\sigma(X) := \{x \in X : |\{\alpha < \lambda : x(\alpha) \neq z(\alpha)\}| < \omega\}$. Para cada $\alpha < \lambda$ sea $\{U(\alpha, x) : x \in X_\alpha\}$ una separación débil para X_α . Además, para toda $x \in \sigma(X) \setminus \{z\}$ sea $F_x \in [\lambda]^{<\omega}$ tal que $x(\alpha) = z(\alpha)$ si y sólo si $\alpha \in \lambda \setminus F_x$, y definamos

$$U_x := \sigma(X) \cap \bigcap_{\alpha \in F_x} \pi_\alpha^{-1} [U(\alpha, x(\alpha)) \setminus \{z(\alpha)\}].$$

Para comprobar que la colección $\{U_x : x \in \sigma(X)\}$ es una separación débil para $\sigma(X)$, comencemos por observar que $z \notin U_x$ para cada $x \in \sigma(X) \setminus \{z\}$. Ahora, fijemos $x, y \in \sigma(X) \setminus \{z\}$ distintos con $x \in U_y$ y sea $\alpha < \lambda$ con $x(\alpha) \neq y(\alpha)$. Resulta entonces que $\alpha \in F_x \cup F_y$ y para cada $\beta \in F_y$ se cumple que $x(\beta) \in U(\beta, y(\beta)) \setminus \{z(\beta)\}$. Esta última pertenencia implica la contención $F_y \subseteq F_x$; en particular, $\alpha \in F_x$.

Finalmente, si $\alpha \in F_x \setminus F_y$, entonces $y \notin U_x$ porque $y(\alpha) = z(\alpha) \notin U(\alpha, x(\alpha)) \setminus \{z(\alpha)\}$. Por otra parte, si $\alpha \in F_y$, la condición $x(\alpha) \in U(\alpha, y(\alpha)) \setminus \{z(\alpha)\}$ combinada con el hecho de que $\{U(\alpha, w) : w \in X_\alpha\}$ separa débilmente a X_α implican que $y(\alpha) \notin U(\alpha, x(\alpha)) \setminus \{z(\alpha)\}$; en consecuencia, $y \notin U_x$. $\square$

La proposición 6.4.13 no se puede generalizar para Σ -productos. Efectivamente, como todo Σ -producto de una familia de espacios T_1 no triviales contiene una copia homeomorfa de $D(2)^\omega$, que es cósmico y no numerable, resulta que el Σ -producto en cuestión no es débilmente separado (véase el corolario 6.3.2). Además, contrario a lo que se menciona en [77, Assertion 3.3, p. 385], la proposición 6.4.13 no se verifica en el caso general:

Ejemplo 6.4.14. Si $\mathbb{F}$ es el espacio de Sierpiński, entonces el σ -producto $\sigma(\mathbb{F}^\omega) := \{x \in \mathbb{F}^\omega : |\{n < \omega : x(n) \neq 0\}| < \omega\}$ no es débilmente separado.

Demostración. Supongamos en busca de una contradicción que para cada $x \in \mathbb{F}^\omega$ existen $F_x \in [\omega]^{<\omega}$ y $\{U(x, n) : n \in F_x\} \subseteq \tau_{\mathbb{F}}$ de tal manera que si $U_x := \sigma(\mathbb{F}^\omega) \cap \bigcap_{n \in F_x} \pi_n^{-1}[U(x, n)]$, entonces $\{U_x : x \in \mathbb{F}^\omega\}$ es una separación débil para $\sigma(\mathbb{F}^\omega)$. Para cada $n < \omega$ sea x_n la función característica de $\{n\}$ y denotemos por $\bar{0}$ a la función constante cero. Claramente, como $\{\bar{0}\}$ es un subconjunto denso de $\sigma(\mathbb{F}^\omega)$ se satisface que $\bar{0} \in U_{x_n}$ para cada $n < \omega$. Por lo tanto, para toda $n < \omega$ se cumple la relación $x_n \notin U_{\bar{0}}$, lo cual implica que $n \in F_{\bar{0}}$. En consecuencia, $F_{\bar{0}}$ es un conjunto infinito, un absurdo. $\square$

Las proposiciones 6.4.6 y 6.4.13 permiten obtener el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.4.15. Para cualquier cardinal infinito κ , $D(2)^\kappa$ es un grupo topológico Hausdorff, cero-dimensional, compacto y no débilmente separado. Además, el σ -producto $\sigma(\kappa) := \{x \in D(2)^\kappa : |\{\alpha < \kappa : x(\alpha) \neq 0\}| < \omega\}$ es un subgrupo topológico denso y débilmente separado de $D(2)^\kappa$ que satisface las relaciones:

1. $P(\sigma(\kappa)) = WP(\sigma(\kappa)) = UC.$
2. $C(\sigma(\kappa)) = \{\lambda \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\lambda) > \kappa\}.$
3. $|\sigma(\kappa)| = \pi w(\sigma(\kappa)) = d(\sigma(\kappa)) = \check{s}(\sigma(\kappa)) = \kappa.$

$\text{index}[two]\check{s}(X)$

6.5. La condición $C(\kappa)$ en productos topológicos

Una pregunta que se puede encontrar tácitamente en la literatura es si dados un par de espacios X y Y se satisface que $\mathcal{F}[X \times Y]$ es homeomorfo a $\mathcal{F}[X] \times \mathcal{F}[Y]$ (véanse, por ejemplo, [17] y [90]). Nosotros daremos una manera de detectar cuando, para una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ que cumple ciertas propiedades, el espacio $\prod_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}[X_\alpha]$ **no** es homeomorfo a $\mathcal{F}[\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha]$ a través de sus condiciones de cadena (véanse los teoremas 6.5.6, 6.5.7 y 6.5.8).

Con respecto a la relación entre $C(\kappa)$ y los productos topológicos, empezamos con el siguiente resultado que se deduce a partir del lema 6.2.3.

Proposición 6.5.1. *Si κ es un cardinal infinito, λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y el producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ satisface la condición $C(\kappa)$, entonces cada factor también satisface $C(\kappa)$.*

Además, la condición $C(\kappa)$ también se preserva bajo productos finitos como veremos a continuación.

Proposición 6.5.2. *Sea κ un cardinal infinito. Si X y Y son espacios topológicos que satisfacen la condición $C(\kappa)$, entonces el producto $X \times Y$ también satisface $C(\kappa)$.*

Demostración. Sea $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un subconjunto de $\tau_{X \times Y}^+$ y para cada $\alpha < \kappa$ tomemos $w_\alpha \in W_\alpha$. Fijemos colecciones $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_X$, $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau_Y$, $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X$ y $\{y_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq Y$ tales que $U_\alpha \times V_\alpha \subseteq W_\alpha$ y $w_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ para cada $\alpha < \kappa$. Primero, como X satisface $C(\kappa)$ existe $I \in [\kappa]^\kappa$ con $\{x_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha \in I\}$. Luego, como Y satisface $C(\kappa)$ hay $J \in [I]^\kappa$ de tal manera que $\{y_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \bigcap \{V_\alpha : \alpha \in J\}$. Así, se cumple la relación $\{w_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \bigcap \{W_\alpha : \alpha \in J\}$. $\square$

De esta forma, se puede emplear un argumento inductivo para demostrar el siguiente corolario.

Corolario 6.5.3. *Sea κ un cardinal infinito. Si $1 \leq n < \omega$, $\{X_m : m < n\}$ es una familia de espacios topológicos y cada X_m satisface la condición $C(\kappa)$, entonces $\prod \{X_m : m < n\}$ también satisface $C(\kappa)$.*

Con respecto a los productos infinitos, resulta que es posible construir ejemplos para constatar que en general no se preserva la condición $C(\kappa)$. Recuerde que t denota a la función cardinal conocida como la estrechez (véase [32]).

Proposición 6.5.4. *Sean κ y λ un par de números cardinales con $\text{cf}(\kappa) < \lambda$. Si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios de Hausdorff con más de un punto tales que $n \cdot w(X_\alpha) < \text{cf}(\kappa)$ para cada $\alpha < \lambda$, entonces cada X_α satisface la condición $C(\kappa)$ y $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ no satisface $C(\kappa)$.*

Demostración. Sea $X := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$. Por un lado, como para cada $\alpha < \lambda$ se tiene que $nw(X_\alpha) < cf(\kappa)$, la proposición 6.2.10 implica que X_α satisface $C(\kappa)$. Por otro lado, como $D(2)^\lambda$ se encaja en X , un argumento rutinario con funciones cardinales (véanse [32] y [36]) muestra que

$$\lambda = t(D(2)^\lambda) \leq t(X) \leq hd(X) \leq nw(X) = \lambda \cdot \sup\{nw(X_\alpha) : \alpha < \lambda\} = \lambda.$$

De esta manera, $hd(X) = \lambda > cf(\kappa)$ y, por lo tanto, el corolario 6.2.15 garantiza que X no satisface $C(\kappa)$. $\square$

Resta analizar cuál es la respuesta para la pregunta: ¿es posible determinar por medio de las condiciones de cadena si dada una familia de espacios $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$, los espacios $\prod_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}[X_\alpha]$ y $\mathcal{F}[\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha]$ no son homeomorfos? Demostramos a continuación que la respuesta para la pregunta anterior es negativa para espacios de la forma $\mathcal{F}[X \times Y]$ y $\mathcal{F}[X] \times \mathcal{F}[Y]$.

Proposición 6.5.5. *Si X y Y son espacios topológicos, entonces las siguientes igualdades son ciertas:*

$$\begin{aligned} C(\mathcal{F}[X \times Y]) &= C(\mathcal{F}[X]) \cap C(\mathcal{F}[Y]); \\ P(\mathcal{F}[X \times Y]) &= P(\mathcal{F}[X]) \cap P(\mathcal{F}[Y]), \text{ y} \\ WP(\mathcal{F}[X \times Y]) &= WP(\mathcal{F}[X]) \cap WP(\mathcal{F}[Y]). \end{aligned}$$

Demostración. Para la primera igualdad notemos que el teorema 6.1.3 implica las relaciones

$$\begin{aligned} C(\mathcal{F}[X \times Y]) &= \{\kappa \in \mathbf{CN} : cf(\kappa) > |X \times Y|\} \\ &= \{\kappa \in \mathbf{CN} : cf(\kappa) > \max\{|X|, |Y|\}\} \\ &= \{\kappa \in \mathbf{CN} : cf(\kappa) > |X| \wedge cf(\kappa) > |Y|\} \\ &= \{\kappa \in \mathbf{CN} : cf(\kappa) > |X|\} \cap \{\kappa \in \mathbf{CN} : cf(\kappa) > |Y|\} \\ &= C(\mathcal{F}[X]) \cap C(\mathcal{F}[Y]). \end{aligned}$$

Ahora, como la prueba para precalibres y precalibres débiles es similar, únicamente expondremos los detalles para precalibres. Naturalmente, para realizar esto es suficiente restringirnos a elementos de la colección UC. Por un lado, si $\kappa \in P(\mathcal{F}[X \times Y]) \cap \text{UC}$, entonces el teorema 6.2.7 implica que $X \times Y$ satisface $C(\kappa)$ y, por ende, la proposición 6.5.1 asegura que X y Y satisfacen $C(\kappa)$. De este modo, el teorema 6.2.7 garantiza que $\mathcal{F}[X]$ y $\mathcal{F}[Y]$ tienen precalibre κ . Por otro lado, si $\kappa \in P(\mathcal{F}[X]) \cap P(\mathcal{F}[Y]) \cap \text{UC}$, entonces el teorema 6.2.7 dice que X y Y satisfacen $C(\kappa)$. Por lo tanto, la proposición 6.5.2 certifica que $X \times Y$ satisface $C(\kappa)$ y así, el teorema 6.2.7 constata que κ es un precalibre para $\mathcal{F}[X \times Y]$. $\square$

Claramente la proposición 6.5.5 se puede generalizar para cualquier producto finito de la manera natural.

Estamos preparados para demostrar los teoremas centrales de esta sección.

Teorema 6.5.6. *Sean κ y λ un par de números cardinales con κ regular y $\omega < \kappa < \lambda$. Si $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios de Hausdorff con más de un punto tales que $nw(X_\alpha) < \kappa$ para cada $\alpha < \lambda$, entonces los espacios $\prod_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}[X_\alpha]$ y $\mathcal{F}[\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha]$ no son homeomorfos.*

Demostración. Por la proposición 6.5.4 cada espacio X_α satisface la condición $C(\kappa)$ y $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ no lo hace. Esto implica, en virtud del teorema 6.2.7, que cada espacio $\mathcal{F}[X_\alpha]$ tiene precalibre κ y $\mathcal{F}[\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha]$ no tiene precalibre débil κ . Finalmente, como el teorema 2.8.12 garantiza que $\prod_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}[X_\alpha]$ sí tiene precalibre κ , concluimos que $\prod_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}[X_\alpha]$ y $\mathcal{F}[\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha]$ no son homeomorfos. $\square$

Teorema 6.5.7. *Sean κ y λ un par de números cardinales con $\omega < \text{cf}(\kappa) < \lambda$. Si X es un espacio de Hausdorff con más de un punto tal que $nw(X) < \text{cf}(\kappa)$, entonces los espacios $\mathcal{F}[X]^\lambda$ y $\mathcal{F}[X^\lambda]$ no son homeomorfos.*

Demostración. Por la proposición 6.5.4 se cumple que X satisface $C(\kappa)$ y X^λ no lo hace. De este modo, el teorema 6.2.7 implica que $\mathcal{F}[X]$ tiene precalibre κ y $\mathcal{F}[X^\lambda]$ no tiene precalibre débil κ . Para terminar observe que el teorema 2.8.12 implica que $\mathcal{F}[X]^\lambda$ sí tiene precalibre κ ; por esta razón, $\mathcal{F}[X]^\lambda$ y $\mathcal{F}[X^\lambda]$ no son homeomorfos. $\square$

Teorema 6.5.8. *Si X es un espacio T_1 y λ es un número cardinal, entonces*

$$C(\mathcal{F}[X^\lambda]) \subseteq C(\mathcal{F}[X]^\lambda).$$

Más aún, cuando $|X|^\lambda > |X|$ la contención anterior es propia; en particular, los espacios $\mathcal{F}[X]^\lambda$ y $\mathcal{F}[X^\lambda]$ no son homeomorfos.

Demostración. Notemos primero que por el corolario 2.2.9 y el teorema 2.8.12 se cumple la relación $C(\mathcal{F}[X]^\lambda) = C(\mathcal{F}[X]) \cap \text{UC}$. De esta manera, el teorema 6.1.3 implica que

$$\begin{aligned} C(\mathcal{F}[X^\lambda]) &= \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > |X|^\lambda\} \\ &\subseteq \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > |X|\} = C(\mathcal{F}[X]) \cap \text{UC} = C(\mathcal{F}[X]^\lambda). \end{aligned}$$

Finalmente, si $|X|^\lambda > |X|$, entonces el cardinal $\kappa := |X|^+$ satisface las relaciones $\kappa \in C(\mathcal{F}[X]^\lambda)$ y $\kappa \notin C(\mathcal{F}[X^\lambda])$; en particular, $\mathcal{F}[X]^\lambda$ y $\mathcal{F}[X^\lambda]$ no son homeomorfos. $\square$

Este último teorema tiene una consecuencia interesante. Recuerde que si $\mathbb{P}$ representa al conjunto de los números irracionales equipado con la topología que hereda de la recta real, entonces un resultado clásico establece que el espacio de Baire, ω^ω , es homeomorfo a $\mathbb{P}$ (véase [50, Theorem 1.1, p. 5]). Entonces tenemos:

Corolario 6.5.9. $\mathcal{F}[\mathbb{P}]$ y $\mathbb{P}$ no son homeomorfos.

Demostración. Por el teorema 6.5.8 los espacios $\mathcal{F}[\omega]^\omega$ y $\mathcal{F}[\omega^\omega]$ no son homeomorfos; es decir, $\mathcal{F}[\omega]^\omega$ y $\mathcal{F}[\mathbb{P}]$ no son homeomorfos. Por otra parte, como los puntos aislados de $\mathcal{F}[\omega]$ son precisamente los subconjuntos finitos de ω que son abiertos, entonces $\mathcal{F}[\omega]$ es homeomorfo a ω ; en consecuencia, $\mathcal{F}[\omega]^\omega$ y ω^ω son homeomorfos. Así, $\mathcal{F}[\mathbb{P}]$ y $\mathbb{P}$ no son homeomorfos. $\square$

Naturalmente, el corolario 6.5.9 también puede demostrarse sin necesidad de recurrir a las condiciones de cadena. Basta con observar, por ejemplo, que $\mathcal{F}[\mathbb{P}]$ no es separable mientras que $\mathbb{P}$ sí lo es (véase la proposición 6.1.1).

6.6. El grado de Lindelöf débil de $\mathcal{F}[X]$

Si X es un espacio topológico, el *grado de Lindelöf débil* de X , $wL(X)$, es el número cardinal

$$\min \left\{ \kappa \in \mathbb{CN} : \forall \mathcal{U} \subseteq \tau_X \left(X = \bigcup \mathcal{U} \rightarrow \exists \mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa} \left(X = \overline{\bigcup \mathcal{V}} \right) \right) \right\}.$$

Diremos que X es *débilmente Lindelöf* cuando se satisfaga la relación $wL(X) = \omega$. Adicionalmente, trabajaremos con las funciones cardinales

$$L^*(X) := \sup \{ L(X^n) : n \in \mathbb{N} \} \quad \text{y} \quad hd_c(X) := \sup \{ d(A) : A \text{ es cerrado en } X \}.$$

Claramente, $d(X) \leq hd_c(X) \leq hd(X)$.

En [62, Question 3.23, p. 3087] Sakai preguntó si el hecho de que $\mathcal{F}[X]$ sea débilmente Lindelöf implica que X es hereditariamente separable y probó que si X tiene estrechez numerable entonces la cuestión anterior tiene una respuesta afirmativa. Expandiremos el resultado de Sakai al mostrar que si X es un k -espacio de Hausdorff, ó X tiene estrechez numerable y es T_1 , ó X es débilmente separado, y $\mathcal{F}[X]$ es débilmente Lindelöf, entonces X es hereditariamente separable (véase el corolario 6.6.12).

Lo que sigue tiene como propósito demostrar que si X tiene estrechez numerable y es T_1 o X es un k -espacio de Hausdorff, entonces se satisface la desigualdad

$$L^*(X) \cdot hL(X) \cdot hd(X) \leq wL(\mathcal{F}[X]). \quad (6.4)$$

La forma en la que demostraremos la relación (6.4) será estableciendo generalizaciones y conexiones entre varios resultados de Sakai y Tall expuestos en [62] y en la sección 4.4 respectivamente.

Si $\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos de X , diremos que $\mathcal{C}$ es una ω -cubierta para X si para cualquier $F \in [X]^{<\omega}$ existe $C \in \mathcal{C}$ con $F \subseteq C$. En [27] Gerlits y Nagy demostraron que si X es un espacio topológico, entonces X^n es Lindelöf para cada $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si toda ω -cubierta abierta de X admite una ω -subcubierta numerable. El siguiente lema generaliza este hecho y su demostración se puede consultar en [84, S. 148, p. 122].

Lema 6.6.1. *Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal infinito, entonces $L^*(X) \leq \kappa$ si y sólo si toda ω -cubierta abierta de X admite una ω -subcubierta de tamaño a lo sumo κ .*

Una familia $\mathcal{A}$ formada por subconjuntos de un espacio X es *discreta* si para cualquier $x \in X$ existe $U \in \tau_X$ con $x \in U$ y $|\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1$. La *celularidad discreta* de X es el número cardinal

$$dc(X) := \sup \{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq \tau_X^+ \text{ es una familia discreta}\} + \aleph_0.$$

Diremos que X satisface la *condición de la cadena contable discreta* (en símbolos, dccc) si $dc(X) = \aleph_0$.

Una observación inmediata es que si X es un espacio topológico y A es un subconjunto abierto y cerrado de X , entonces $dc(A) \leq dc(X)$. También, cualquier familia discreta $\mathcal{U} \subseteq \tau_X^+$ es una familia celular; en consecuencia, se satisface que $dc(X) \leq c(X)$. Además, un razonamiento sencillo muestra que $wL(X) \leq c(X)$ (véase [32, p. 16]). En el ámbito de los espacios T_3 también podemos conectar a $dc(X)$ con $wL(X)$.

Lema 6.6.2. *Si X es un espacio T_3 , entonces $dc(X) \leq wL(X)$.*

Demostración. Sean $\kappa := wL(X)$, λ un cardinal infinito y $\mathcal{U} := \{U_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \tau_X^+$ una familia discreta. Para cada $\alpha < \lambda$ sean $x_\alpha \in U_\alpha$ y $V_\alpha \in \tau_X$ con $x_\alpha \in V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$. Observemos que, como $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia discreta, entonces $\{\overline{V_\alpha} : \alpha < \lambda\}$ también lo es; en particular, como $\{\overline{V_\alpha} : \alpha < \lambda\}$ es localmente finita se satisface que $V := X \setminus \bigcup_{\alpha < \lambda} \overline{V_\alpha}$ es un subconjunto abierto de X (véase [20, Corollary 1.1.12, p. 17]).

De esta manera, la colección $\mathcal{U} \cup \{V\}$ es una cubierta abierta de X y así existe $\mathcal{W} \in [\mathcal{U} \cup \{V\}]^{\leq \kappa}$ con $\bigcup \mathcal{W} = X$. Nuestro objetivo ahora es comprobar que $\mathcal{U}$ es un subconjunto de $\mathcal{W}$. Resulta que si $\alpha < \lambda$ entonces existe $W \in \mathcal{W}$ con $V_\alpha \cap W \neq \emptyset$. Luego, como V_α y V son conjuntos ajenos, necesariamente $W \in \mathcal{U}$. Finalmente, como $V_\alpha \subseteq U_\alpha$ y $\mathcal{U}$ es una familia celular, se verifica que $U_\alpha = W$ y, por lo tanto, que $U_\alpha \in \mathcal{W}$. En conclusión, $|\mathcal{U}| \leq \kappa$. $\square$

Lema 6.6.3. *Si X es un espacio topológico, entonces $hL(X) = \sup\{L(U) : U \in \tau_X\}$.*

Demostración. En virtud de que $\kappa := \sup\{L(U) : U \in \tau_X\}$ es evidentemente menor o igual a $hL(X)$, es suficiente argumentar que $hL(X) \leq \kappa$. Para ello notemos que si Y es un subespacio de X y $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$ es una cubierta abierta de Y , entonces como $L(\bigcup \mathcal{U}) \leq \kappa$ existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ con $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$; en particular, $\mathcal{V}$ está contenido en $\mathcal{U}$, cubre a Y y tiene cardinalidad a lo sumo κ . Así, $hL(X) \leq \kappa$. $\square$

Lema 6.6.4. *Si X es un espacio topológico y $\mathcal{U}$ es un subconjunto de τ_X , entonces $\mathcal{V}(\mathcal{U}) := \{F \in \mathcal{F}[X] : \exists U \in \mathcal{U} (F \subseteq U)\}$ es un subconjunto abierto y cerrado de $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración. Si $F, G \in \mathcal{F}[X]$ cumplen las relaciones $F \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$ y $G \notin \mathcal{V}(\mathcal{U})$, y $U \in \mathcal{U}$ es tal que $F \subseteq U$, entonces $[F, U] \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{U})$ y $[G, X] \cap \mathcal{V}(\mathcal{U}) = \emptyset$. $\square$

Lo que sigue es generalizar la primera parte de [62, Theorem 3.10, p. 3085].

Teorema 6.6.5. *Si X es un espacio topológico, entonces $\max\{L^*(X), hL(X)\} \leq dc(\mathcal{F}[X])$.*

Demostración. Sea $\kappa := dc(\mathcal{F}[X])$. Para ver que $L^*(X) \leq \kappa$ fijemos $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$, una ω -cubierta abierta del espacio X . Para cada $\alpha < \lambda$ consideremos al conjunto

$$V_\alpha := \mathcal{V}(\{U_\alpha\} \setminus \mathcal{V}(\{U_\beta : \beta < \alpha\})).$$

Por el lema 6.6.4 se satisface que $\mathcal{V} := \{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de subconjuntos abiertos y cerrados de $\mathcal{F}[X]$. Además, si $F \in \mathcal{F}[X]$ y $\beta := \min\{\alpha < \lambda : F \subseteq U_\alpha\}$, entonces $F \in V_\beta$; es decir, $\mathcal{V}$ es una cubierta de $\mathcal{F}[X]$. Más aún, si $\alpha < \beta < \lambda$ y suponemos que existe $F \in V_\alpha \cap V_\beta$, entonces necesariamente $F \subseteq U_\alpha$ y $F \setminus U_\alpha \neq \emptyset$, una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es una cubierta de $\mathcal{F}[X]$ ajena por pares formada por subconjuntos abiertos y cerrados de $\mathcal{F}[X]$.

Ahora, si $J := \{\alpha < \lambda : V_\alpha \neq \emptyset\}$, entonces como $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia discreta en $\mathcal{F}[X]$ se cumple que $|J| \leq \kappa$. De este modo, $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es una ω -subcubierta de $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de tamaño a lo sumo κ . En efecto, si $F \in \mathcal{F}[X]$ entonces existe $\alpha \in J$ con $F \in V_\alpha$ y, por ende, $F \subseteq U_\alpha$. En virtud del lema 6.6.1, este argumento demuestra que $L^*(X) \leq \kappa$.

Para comprobar que $hL(X) \leq \kappa$ observemos que si U es un subconjunto abierto de X , entonces la función identidad es un homeomorfismo entre $\mathcal{F}[U]$ y $\mathcal{V}(\{U\})$. De esta manera, como $\mathcal{V}(\{U\})$ es un subconjunto abierto y cerrado de $\mathcal{F}[X]$ se satisface que $dc(\mathcal{F}[U]) \leq \kappa$ y así, la primera parte de este resultado garantiza que $L^*(U) \leq \kappa$; en particular, $L(U) \leq \kappa$. En conclusión, el lema 6.6.3 constata que $hL(X) \leq \kappa$. $\square$

En virtud de que $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Hausdorff cero-dimensional cuando X es T_1 , el lema 6.6.2 y el teorema 6.6.5 producen el siguiente resultado.

Teorema 6.6.6. *Si X es un espacio T_1 , entonces $L^*(X) \cdot hL(X) \leq wL(\mathcal{F}[X])$.*

Ahora trazaremos el camino para demostrar que $hd(X) \leq wL(\mathcal{F}[X])$ si X es un k -espacio de Hausdorff. El siguiente resultado es una generalización de la primera parte de [62, Proposition 3.13, p. 3085].

Lema 6.6.7. *Si X es un espacio topológico y A es un subespacio cerrado de X , entonces $d(A) \leq wL(\mathcal{F}[X])$. En consecuencia, $hd_c(X) \leq wL(\mathcal{F}[X])$.*

Demostración. Sea $\kappa := wL(\mathcal{F}[X])$. Como

$$\{[\{x\}, X] : x \in A\} \cup \{[F, X \setminus A] : F \in \mathcal{F}[X] \text{ y } F \cap A = \emptyset\}$$

es una cubierta abierta para $\mathcal{F}[X]$, existen $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq A$ y $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{F}[X]$ con $A \cap \bigcup \{F_\alpha : \alpha < \kappa\} = \emptyset$ y de tal manera que $\mathcal{U} := \{[\{x_\alpha\}, X] : \alpha < \kappa\} \cup \{[F_\alpha, X \setminus A] : \alpha < \kappa\}$ satisface $\mathcal{F}[X] = \bigcup \mathcal{U}$. Para ver que $D := \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es denso en A supongamos, en busca de una contradicción, que existe $x \in A \setminus \overline{D}$. Resulta que si $U := A \setminus \overline{D}$, entonces $[\{x\}, U]$ es un abierto no vacío de $\mathcal{F}[X]$ que tiene intersección vacía con cada $[F_\alpha, X \setminus A]$; en consecuencia, como $\mathcal{F}[X] = \bigcup \mathcal{U}$, existe $\alpha < \kappa$ con $[\{x\}, U] \cap [\{x_\alpha\}, X] \neq \emptyset$. No obstante, esto último implica que x_α no es un elemento de $\overline{D}$, una contradicción. En conclusión, $d(A) \leq \kappa$. $\square$

Teorema 6.6.8. *Si X es un k -espacio de Hausdorff o X tiene estrechez numerable, entonces $hd(X) \leq wL(\mathcal{F}[X])$.*

Demostración. Sea $\kappa := wL(\mathcal{F}[X])$. Si X tiene estrechez numerable, entonces a partir de las relaciones de (4.1) se deduce que $hd(X) = hd_c(X)$. De esta manera, el lema 6.6.7 asegura que $hd(X) \leq \kappa$. Ahora, si X es un k -espacio de Hausdorff, entonces el lema 6.6.7 implica que cualquier subespacio cerrado de X tiene densidad a lo sumo κ ; en consecuencia, la proposición 2.1.8 garantiza que todos los subespacios cerrados de X tienen calibre κ^+ y, por ende, el corolario 4.4.6 certifica que $hd(X) \leq \kappa$. $\square$

En suma, los teoremas 6.6.6 y 6.6.8 producen los siguientes corolarios.

Corolario 6.6.9. *Si X es un k -espacio de Hausdorff o X tiene estrechez numerable y es T_1 , entonces*

$$L^*(X) \cdot hL(X) \cdot hd(X) \leq wL(\mathcal{F}[X]).$$

Las conexiones entre algunas de las funciones cardinales de X y $\mathcal{F}[X]$ que hemos establecido hasta el momento quedan resumidas en el siguiente diagrama (la relación $\kappa \rightarrow \lambda$ significa $\kappa \geq \lambda$):

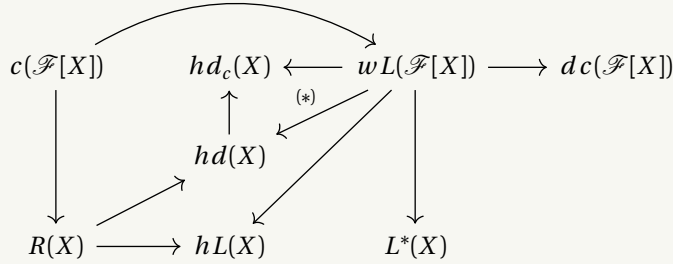


Figura 6.1: Relaciones entre algunas funciones cardinales de X y $\mathcal{F}[X]$

El asterisco en la flecha $wL(\mathcal{F}[X]) \rightarrow hd(X)$ significa que en este caso X tenga estrechez numerable y sea T_1 , o bien, que X sea un k -espacio de Hausdorff.

En general, no sabemos si es posible conectar directamente a $R(X)$ con $dc(\mathcal{F}[X])$ de alguna manera, pero sí podemos establecer una relación en este sentido al considerar una variante para la función R . El siguiente lema será indispensable para alcanzar este objetivo.

Lema 6.6.10. *Si X es débilmente separado, entonces $R(X) = dc(\mathcal{F}[X]) = |X|$.*

Demostración. Claramente, $R(X) = |X| \geq dc(\mathcal{F}[X])$. Para ver que $dc(\mathcal{F}[X]) \geq |X|$, fijemos una separación débil $\{U_x : x \in X\}$ para X y comprobemos que $\{\{x\}, U_x\} : x \in X\}$ es una familia discreta en $\mathcal{F}[X]$. Tomemos $F \in \mathcal{F}[X]$, definamos $U_F := \bigcup \{U_x : x \in F\}$ y supongamos, en busca de una contradicción, que existen $x, y \in X$ distintos tales que

$$[F, U_F] \cap \{\{x\}, U_x\} \neq \emptyset \neq [F, U_F] \cap \{\{y\}, U_y\}.$$

Resulta entonces que $F \subseteq U_x \cap U_y$ y existen $z, w \in F$ con $x \in U_z$ y $y \in U_w$. Ahora, si $x \neq z$ ó $y \neq w$, entonces $x \in U_z$ y $z \in U_x$, o bien, $y \in U_w$ y $w \in U_y$; lo cual es absurdo. De esta manera, $x = z$ y $y = w$; en especial, $\{x, y\} \subseteq F$ y, por ende, $x \in U_y$ y $y \in U_x$, una contradicción. Este argumento demuestra que $\{\{x\}, U_x\} : x \in X\}$ es una familia discreta en $\mathcal{F}[X]$ de cardinalidad $|X|$. $\square$

Si X es un espacio débilmente separado y T_1 , los lemas 6.6.2 y 6.6.10 implican que $R(X) = wL(\mathcal{F}[X]) = |X|$. No obstante, también es posible obtener el mismo resultado sin la hipótesis adicional de ser T_1 .

Lema 6.6.11. *Si X es débilmente separado, entonces $R(X) = wL(\mathcal{F}[X]) = |X|$.*

Demostración. Es suficiente demostrar que $wL(\mathcal{F}[X]) \geq |X|$. Sea $\{U_x : x \in X\}$ una separación débil para X y para cada $F \in \mathcal{F}[X]$ definimos $U_F := \bigcup \{U_x : x \in F\}$, entonces $\{[F, U_F] : F \in \mathcal{F}[X]\}$ es una cubierta abierta de X . Sean $\mathcal{F}$ un subconjunto de

$\mathcal{F}[X]$ con $|\mathcal{F}| < |X|$ y $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{F}$. Resulta que para cada $F \in \mathcal{F}$ se satisface la relación $[x, U_x] \cap [F, U_F] = \emptyset$. Efectivamente, si esta intersección fuese no vacía, entonces $x \in U_F$ y así existiría $y \in F$ con $x \in U_y$. Por otra parte, como $F \subseteq U_x$ también ocurre que $y \in U_x$, una contradicción a la separación débil. Este argumento demuestra que $\{[F, U_F] : F \in \mathcal{F}[X]\}$ no admite subcolecciones de cardinalidad menor a $|X|$ con unión densa. $\square$

Corolario 6.6.12. *Considere las siguientes condiciones para un espacio topológico X .*

1. *X es un k -espacio de Hausdorff.*
2. *X tiene estrechez numerable y es T_1 .*
3. *X es débilmente separado.*

Si X satisface alguna de las condiciones de (1) a (3) y $\mathcal{F}[X]$ es débilmente Lindelöf, entonces X es hereditariamente separable.

Demostración. Si X satisface (1) o (2) el resultado es consecuencia del corolario 6.6.9. Finalmente, si X es débilmente separado, como $\mathcal{F}[X]$ es débilmente Lindelöf el lema 6.6.11 garantiza que X es incluso numerable. $\square$

Ahora, consideremos la función cardinal $R_o(X)$ determinada mediante la regla

$$R_o(X) := \sup\{|U| : U \text{ es un subespacio abierto y débilmente separado de } X\} + \aleph_0.$$

Naturalmente, $R_o(X) \leq R(X)$. Por otra parte, recordemos que si $U \in \tau_X$ entonces $\mathcal{F}[U]$ es un subespacio abierto y cerrado de $\mathcal{F}[X]$. Utilizaremos este hecho en la demostración del último resultado de este capítulo.

Teorema 6.6.13. *Si X es un espacio topológico, entonces $R_o(X) \leq dc(\mathcal{F}[X])$.*

Demostración. Sean U un subespacio abierto y débilmente separado de X . Observemos que por el lema 6.6.10 se satisface que $dc(\mathcal{F}[U]) = |U|$. Además, como $\mathcal{F}[U]$ es un subespacio abierto y cerrado de $\mathcal{F}[X]$ resulta que $dc(\mathcal{F}[U]) \leq dc(\mathcal{F}[X])$. Así, $|U| \leq dc(\mathcal{F}[X])$ y, en consecuencia, $R_o(X) \leq dc(\mathcal{F}[X])$. $\square$

Una de las preguntas naturales que surgen es si las funciones $R(X)$ y $R_o(X)$ son diferentes. Afortunadamente, el revisor de [58] sugirió el siguiente ejemplo. Sean κ un cardinal infinito y $D(2)^\kappa$ el cubo de Cantor de peso κ . Por un lado, como el espacio discreto $D(\kappa)$ se encaja en $D(2)^\kappa$ y $nw(D(2)^\kappa) = \kappa$ (véase [32]), se sigue que $R(D(2)^\kappa) = \kappa$ (véase la proposición 6.3.1). Por otro lado, como el espacio de Cantor $D(2)^\omega$ es un espacio cósmico no numerable que se encaja en cada subconjunto abierto y no vacío de $D(2)^\kappa$, se deriva que $R_o(D(2)^\kappa) = \omega$ (véase el corolario 6.3.2).

Sin embargo, quedan por responder las siguientes preguntas:

Pregunta 6.6.14. Sea X un espacio topológico.

1. ¿Cuál es la relación entre $R(X)$ y $dc(\mathcal{F}[X])$?
2. ¿Es posible conectar $R(X)$ y $L^*(X)$?

7

Condiciones de cadena en $C_p(X)$

A partir de que Šanin presentó en [66] la noción de “calibre” para un espacio topológico, se ha estudiado mucho este concepto y sus variantes. Desde textos clásicos como [3], [71] y [76], hasta artículos recientes como [57], [58] y [59], las condiciones de cadena han probado ser un fructífero objeto de estudio.

En este trabajo examinaremos las condiciones de cadena de los espacios de funciones continuas $C_p(X)$ considerados como subespacios de $\mathbb{R}^X$, donde X es un espacio de Tychonoff. Nuestro objetivo es determinar los calibres para $C_p(X)$ a partir de las propiedades topológicas de X .

Al respecto de esta cuestión existe información en la literatura que se encuentra distribuida en varios textos (véanse, por ejemplo, [39] y [81]–[85]). En las siguientes páginas haremos una recopilación sintética de algunos teoremas conocidos y demostraremos varios resultados nuevos.

7.1. Espacios C_p

De ahora en adelante, X será un espacio de Tychonoff. Denotemos por $C(X)$ a la colección de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Para cualesquiera $f \in C(X)$, $A \in [X]^{<\omega}$ y $\varepsilon > 0$ definamos

$$V(f, A, \varepsilon) := \left\{ g \in C(X) : \forall x \in A (|f(x) - g(x)| < \varepsilon) \right\}.$$

Utilizaremos el símbolo $C_p(X)$ para referirnos al conjunto $C(X)$ equipado con la *topología de la convergencia puntual*; en otras palabras, $C_p(X)$ es el espacio que se obtiene en $C(X)$ al tomar la colección

$$\left\{ V(f, A, \varepsilon) : f \in C(X) \wedge A \in [X]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \wedge \varepsilon > 0 \right\}$$

como base. Es sencillo comprobar que $C_p(X)$ es un subespacio denso de $\mathbb{R}^X$ (véase [4, Proposition 3.3.6, p. 9]).

El estudio de la mayoría de las condiciones de cadena en los espacios $\mathbb{R}^X$ y $C_p(X)$ se trivializa rápidamente en virtud de la proposición 4.2.10. En ella demostramos que

$$C(\mathbb{R}^X) = P(\mathbb{R}^X) = WP(\mathbb{R}^X) = P(C_p(X)) = WP(C_p(X)) = UC.$$

Ahora, como $C(C_p(X)) \subseteq P(C_p(X))$ se sigue que

$$C(C_p(X)) \subseteq UC. \quad (7.1)$$

Nosotros estamos interesados, entre otras cosas, en averiguar bajo qué condiciones se verifica la contención opuesta:

$$UC \subseteq C(C_p(X)); \quad (7.2)$$

en otras palabras, queremos entender cuándo $C_p(X)$ es fuertemente Šanin. Por ejemplo, el siguiente resultado es una consecuencia de la proposición 4.2.10.

Proposición 7.1.1. *Si X es un espacio discreto, entonces $C_p(X)$ es fuertemente Šanin.*

Bajo ciertas restricciones sobre algunas funciones cardinales de X , podemos garantizar que la relación (7.2) sí se satisface. Para nuestros primeros resultados en esta dirección conviene establecer algunos hechos auxiliares.

Decimos que una familia de abiertos básicos en $C_p(X)$ es *elemental* si es de la forma $\{V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon) : \alpha < \kappa\}$, donde $\varepsilon > 0$ y todos los A_α tienen la misma cardinalidad finita. Esta definición cobra relevancia por el siguiente resultado:

Lema 7.1.2. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un espacio topológico X y un número cardinal κ con $\text{cf}(\kappa) > \omega$.*

1. $C_p(X)$ tiene calibre κ .
2. Para cualquier familia elemental $\{V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon) : \alpha < \kappa\}$ existen $J \in [\kappa]^\kappa$ y $f \in C_p(X)$ con $f \in \bigcap \{V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon) : \alpha \in J\}$.

Demostración. La única implicación que requiere un argumento es (2) a (1). Sea $\{V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ una familia de abiertos básicos de $C_p(X)$. Como $\mathbb{R}$ tiene calibre κ por la proposición 4.2.10(1), existen $J \in [\kappa \setminus I]^\kappa$ y $\varepsilon \in \bigcap \{(0, \varepsilon_\alpha) : \alpha \in J\}$. Además, como la función $J \rightarrow \omega$ determinada mediante $\alpha \mapsto |A_\alpha|$ tiene una fibra cofinal, existe $M \in [J]^\kappa$ con $|A_\alpha| = |A_\beta|$ siempre que $\alpha, \beta \in M$. Así, como $\{V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon) : \alpha \in M\}$ es elemental, existen $L \in [M]^\kappa$ y $f \in C_p(X)$ con $f \in \bigcap \{V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon) : \alpha \in L\}$. Finalmente, $L \in [\kappa]^\kappa$ y $f \in \bigcap \{V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon_\alpha) : \alpha \in L\}$. $\square$

Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entre espacios topológicos, a la función $f^\# : C(Y) \rightarrow C(X)$ definida mediante $f^\#(g) := g \circ f$ se le llama la *función dual* de f . En especial, cuando $f : X \rightarrow Y$ es una condensación entre espacios de Tychonoff, se sabe que $f^\# : C_p(Y) \rightarrow C_p(X)$ es un encaje topológico con imagen densa (véanse [4, Proposition 0.4.6, p. 13] y [4, Corollary 0.4.8, p. 13]). Estos resultados se pueden utilizar en combinación con la proposición 2.1.6(3) para establecer el siguiente hecho:

Proposición 7.1.3. *Si X se condensa sobre un espacio de Tychonoff Y , entonces $C(C_p(Y)) \subseteq C(C_p(X))$.*

Más adelante veremos que la contención $C(C_p(Y)) \subseteq C(C_p(X))$ en la proposición 7.1.3 puede no ser igualdad después de haber demostrado la proposición 7.3.2.

Para un subespacio Y de X , la función $\pi_Y : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ dada por $\pi_Y(f) := f|_Y$ es conocida como la *función restricción*. En [4, Proposition 0.4.1, p. 11] se prueba que π_Y es una función continua y que $\pi_Y[C_p(X)]$ es denso en $C_p(Y)$. Por lo tanto, una combinación de las proposiciones 2.1.6(3) y 2.5.1(1) implica el siguiente resultado:

Proposición 7.1.4. *Si Y es un subespacio de X , entonces $C(C_p(X)) \subseteq C(C_p(Y))$.*

Una pregunta que surge a partir de la proposición 7.1.4 es si $C(C_p(X)) = C(C_p(Y))$ cuando Y tiene alguna característica especial. Más adelante, con la ayuda de la proposición 7.3.2, veremos que este no es el caso incluso cuando Y está C -encajado en X (recuerde que un subespacio Y de X está C -encajado si para cualquier $f \in C(Y)$ existe $f^* \in C(X)$ con $f^*|_Y = f$).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina recursivamente los espacios

$$C_{p,1}(X) := C_p(X) \quad \text{y} \quad C_{p,n+1}(X) := C_p(C_{p,n}(X)).$$

En [4, Proposition 0.5.5, p. 17] se demuestra que X es homeomorfo a un subespacio de $C_{p,2}(X)$. Además, es conocido que $C(X) \cap \text{UR} = C(C_{p,2}(X)) \cap \text{UR}$ (véase [83, T.291, p. 319]). La combinación de estos hechos con la proposición 7.1.4 implica el siguiente corolario:

Corolario 7.1.5. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$C(C_{p,n}(X)) \cap \text{UR} \subseteq C(C_{p,n+2}(X)) \subseteq C(C_{p,n}(X)).$$

Emplearemos el símbolo $iw(X)$ para hablar del i -peso de X (véanse [4] y [6]). En [4, Theorem I.1.4, p. 26], [4, Theorem I.1.5, p. 26] y [6, Lemma 5.2.10, p. 299] se prueba que para cualquier espacio de Tychonoff X se satisfacen la relaciones

$$d(X) = iw(C_p(X)) \quad \text{y} \quad d(C_p(X)) = iw(X) \leqslant nw(X). \quad (7.3)$$

Con estas ideas en mente podemos demostrar algunos resultados más. Por ejemplo, una combinación de la proposición 2.1.8 con la relación (7.3) implica el siguiente resultado:

Proposición 7.1.6. *La inclusión $\{\kappa \in \mathbb{N} : \text{cf}(\kappa) > iw(X)\} \subseteq C(C_p(X))$ es verdadera.*

Un argumento inductivo combinado con las relaciones de (7.3) implica que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se satisfacen las relaciones

$$d(X) = iw(C_{p,2n-1}(X)) \quad \text{y} \quad iw(X) = d(C_{p,2n-1}(X)). \quad (7.4)$$

El siguiente corolario se desprende a partir de estas igualdades y de la proposición 7.1.6.

Corolario 7.1.7. *Sea $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si X tiene i -peso numerable, entonces $C_{p,2n-1}(X)$ es fuertemente Šanin.*
2. *Cuando X es separable, $C_{p,2n}(X)$ es fuertemente Šanin.*
3. *En consecuencia, si X es un espacio separable con i -peso numerable, entonces $C_{p,n}(X)$ es fuertemente Šanin.*

En particular, en el ámbito de los espacios metrizables el corolario 7.1.7 toma la siguiente forma:

Corolario 7.1.8. *Para $n \in \mathbb{N}$, si X es un espacio metrizable y separable, entonces $C_{p,n}(X)$ es fuertemente Šanin.*

En el ámbito de la paracompacidad (un debilitamiento natural de la metrizabilidad), también es posible obtener algunos resultados. En la sección 7.4 calcularemos los calibres de $C_p(L(\lambda, \kappa))$, donde $L(\lambda, \kappa)$ es la extensión λ -Lindelöf de un espacio discreto de tamaño κ . Resulta que $L(\lambda, \kappa)$ es hereditariamente paracompacto y $\kappa^+ \notin C(C_p(L(\lambda, \kappa)))$ (véase el teorema 7.4.6). Así, $C_p(L(\lambda, \kappa))$ no es un espacio de Šanin.

Estos espacios sugieren una construcción un poco más general. Si X es un espacio topológico y M es un subconjunto de X , la *modificación de Bing-Hanner* es el espacio X_M que tiene por base a la colección $\{U \cup A : U \in \tau_X \wedge A \subseteq M\}$. En [20, Example 5.1.22, p. 306] se demuestra que si X es un espacio de Hausdorff hereditariamente paracompacto, entonces X_M tiene las mismas características. Con el resultado anterior es posible generalizar de cierta manera lo que sucede con $C_p(L(\lambda, \kappa))$.

Una κ -sucesión en X es una función $s : \kappa \rightarrow X$ usualmente denotada por $(x_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ donde $x_\alpha = s(\alpha)$ para todo $\alpha < \kappa$. Decimos que una κ -sucesión $(x_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ converge a $x \in X$ si para cualquier $U \in \tau_X(x)$ existe $\beta < \kappa$ con $\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\} \subseteq U$.

Proposición 7.1.9. Sean X un espacio hereditariamente paracompacto, $x \in X$ y $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X \setminus \{x\}$ una κ -sucesión convergente a x . Si $M := \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$, entonces X_M es hereditariamente paracompacto y $C_p(X_M)$ no tiene calibre κ .

Demostración. Consideremos la familia $\{V(\chi_\alpha, \{x_\alpha, x\}, 1/4) : \alpha < \kappa\}$, donde $\chi_\alpha : X_M \rightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por

$$\chi_\alpha(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y = x_\alpha, \\ 0, & \text{si } y \neq x_\alpha. \end{cases}$$

Si suponemos por el contrario que κ es un calibre para $C_p(X_M)$, entonces existen $J \in [\kappa]^\kappa$ y $f \in \bigcap \{V(\chi_\alpha, \{x_\alpha, x\}, 1/4) : \alpha \in J\}$. Por convergencia de la red (x_α) , existe $\beta < \kappa$ con $\{f(x_\alpha) : \alpha \geq \beta\} \subseteq (f(x) - 1/2, f(x) + 1/2)$. Luego, si $\alpha \in [\beta, \kappa) \cap J$, entonces $f \in V(\chi_\alpha, \{x_\alpha, x\}, 1/4)$ garantiza que $f(x) < 1/4$ y $3/4 < f(x_\alpha)$, lo cual implica que $|f(x) - f(x_\alpha)| \geq 1/2$, una contradicción a $f(x_\alpha) \in (f(x) - 1/2, f(x) + 1/2)$. $\square$

Por otra parte, al imponerle algunas propiedades adicionales a un espacio paracompacto X es posible obtener algunos calibres para $C_p(X)$. Para un punto $x \in X$ definimos el *i-peso local* de x en X como el número cardinal

$$liw(x, X) = \min \{iw(U) : U \in \tau_X(x)\}.$$

Así, el *i-peso local* de X es $liw(X) = \sup \{liw(x, X) : x \in X\}$ (véase [9]).

En [9, Theorem 4.23, p. 65] se demuestra que si X es un espacio de Tychonoff paracompacto, entonces

$$iw(X) = \max \{\log(e(X)), liw(X)\}. \quad (7.5)$$

Adicionalmente, se sabe que si X es un espacio paracompacto y T_2 , entonces $e(X) \leq L(X) \leq c(X)$ (véanse [32] y [63, Lemma 4, p. 339]). Por último, diremos que X es un espacio *localmente ccc* si para cualquier $x \in X$ existe $U \in \tau_X(x)$ con $c(U) = \omega$.

Con estos preliminares podemos obtener un resultado más.

Proposición 7.1.10. Si X es paracompacto y Tychonoff con *i-peso local numerable* (por ejemplo, si X es metrizable y localmente ccc), entonces

$$\{\kappa \in \mathbb{CN} : cf(\kappa) > \log(c(X))\} \subseteq C(C_p(X)).$$

En especial, $C_p(X)$ es fuertemente Šanin siempre que $c(X) \leq c$.

Demostración. La relación (7.5) implica que

$$iw(X) = \max \{\log(e(X)), liw(X)\} = \log(e(X)) \leq \log(c(X)).$$

Por esta razón, la proposición 7.1.6 nos da

$$\{\kappa \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\kappa) > \log(c(X))\} \subseteq \{\kappa \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\kappa) > i\,w(X)\} \subseteq C(C_p(X)).$$

□

Finalmente, es suficiente que $c(X) \leq c$ en la proposición 7.1.10 para que $C_p(X)$ sea fuertemente Šanin, pero no es necesario. Por ejemplo, la recta de Sorgenfrey $\mathbb{S}$ es un espacio submetrizable, hereditariamente paracompacto con i -peso numerable; en particular, $C_p(\mathbb{S})$ es fuertemente Šanin por el corolario 7.1.7. De esta manera, si λ es un número cardinal infinito y X es el producto $\mathbb{S} \times D(\lambda)$, entonces X es submetrizable, hereditariamente paracompacto (véase [20, Theorem 5.1.30, p. 308]), tiene i -peso local numerable, $c(X) = \lambda$ y $C_p(X)$ es fuertemente Šanin por el corolario 7.6.1(3) que veremos más adelante.

7.2. Calibres de $C_p(X)$ cuando X es submetrizable

Tkachuck demostró en [85, Corollary 5, p. 270] que si X es un espacio submetrizable, entonces $C_p(X)$ es un espacio de Šanin. Nuestro siguiente objetivo es mejorar el resultado de Tkachuck al demostrar que, de hecho, $C_p(X)$ es un espacio fuertemente Šanin siempre que X es un espacio submetrizable.

Si $\{X_\xi : \xi < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos y $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de $\prod_{\xi < \lambda} X_\xi$, el símbolo $x_\alpha(\xi)$ representa la ξ -ésima coordenada de x_α . Además, para cada $2 \leq n < \omega$ sea

$$T_X^n := \{x \in X^n : \forall i < j < n (x(i) \neq x(j))\}.$$

Por otra parte, un conjunto $A \subseteq X$ es *nulo* si existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $A = f^{-1}\{0\}$. El conjunto $Z(X)$ es la colección de subconjuntos nulos de X .

Definición 7.2.1. Sean κ un número cardinal infinito y $2 \leq n < \omega$. Decimos que X *satisface* $P(\kappa, n)$ si para cualquier $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq T_X^n$ existen $J \in [\kappa]^\kappa$ y una colección ajena por pares $\{C_i : i < n\} \subseteq Z(X)$ con $\{x_\alpha(i) : \alpha \in J\} \subseteq C_i$ para cualquier $i < n$.

Con estos preliminares, Marsh demostró en [47, Theorem 60, p. 42] el siguiente resultado:

Teorema 7.2.2. Si κ es un número cardinal con $\text{cf}(\kappa) > \omega$, entonces $C_p(X)$ tiene calibre κ si y sólo si X satisface $P(\kappa, n)$ para cada $2 \leq n < \omega$.

Lo primero que haremos nosotros es demostrar que $P(\kappa, 2)$ es suficiente para garantizar que $C_p(X)$ tiene calibre κ . Recuerde que $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$ están *completamente separados* en X si existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f[B] \subseteq \{1\}$.

Proposición 7.2.3. Si κ es un número cardinal con $\text{cf}(\kappa) > \omega$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

1. $C_p(X)$ tiene calibre κ .
2. X satisface $P(\kappa, n)$ para cualquier $2 \leq n < \omega$.
3. X satisface $P(\kappa, 2)$.
4. Para cualquier $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha < \kappa\} \subseteq T_X^2$ existe $J \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{x_\alpha : \alpha \in J\}$ y $\{y_\alpha : \alpha \in J\}$ están completamente separados en X .

Demostración. La equivalencia entre (1) y (2) es el teorema 7.2.2; la equivalencia entre (3) y (4) es [54, Theorem (f), p. 37], mientras que (2) implica (3) evidentemente. La prueba de que (3) implica (2) será por inducción sobre n . Supongamos que para alguna $2 \leq n < \omega$ el espacio X satisface $P(\kappa, 2)$ y $P(\kappa, n)$. Para demostrar que X también satisface $P(\kappa, n+1)$ notemos que si $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de T_X^{n+1} , entonces $P(\kappa, n)$ produce $I \in [\kappa]^\kappa$ y una colección ajena por pares $\{B_i : i < n\} \subseteq Z(X)$ con $\{x_\alpha(i) : \alpha \in I\} \subseteq B_i$ para cualquier $i < n$.

Afirmación. Existen $\{J_i : i < n\} \subseteq [\kappa]^\kappa$ y $\{D(i, j) : i < n \wedge j < 2\} \subseteq Z(X)$ de tal forma que $J_0 \subseteq I$ y si $i < n$, entonces $J_{i+1} \subseteq J_i$ (siempre que $i+1 < n$), $\{x_\alpha(n) : \alpha \in J_i\} \subseteq D(i, 0)$, $\{x_\alpha(i) : \alpha \in J_i\} \subseteq D(i, 1)$ y $D(i, 0) \cap D(i, 1) = \emptyset$.

La prueba del enunciado anterior será por recursión finita. Para construir J_0 y $\{D(0, 0), D(0, 1)\}$ observemos que $\{(x_\alpha(n), x_\alpha(0)) : \alpha \in I\} \subseteq T_X^2$ y, por ende, la condición $P(\kappa, 2)$ genera $J_0 \in [I]^\kappa$ y $\{D(0, 0), D(0, 1)\} \subseteq Z(X)$ con $\{x_\alpha(n) : \alpha \in J_0\} \subseteq D(0, 0)$, $\{x_\alpha(0) : \alpha \in J_0\} \subseteq D(0, 1)$ y $D(0, 0) \cap D(0, 1) = \emptyset$. Ahora, supongamos que para alguna $i < n$ con $i < n+1$ hemos construido las colecciones $\{J_p : p \leq i\}$ y $\{D(p, j) : p \leq i \wedge j < 2\}$ con las propiedades deseadas. En virtud de que $\{(x_\alpha(n), x_\alpha(i+1)) : \alpha \in J_i\} \subseteq T_X^2$, la condición $P(\kappa, 2)$ produce $J_{i+1} \in [J_i]^\kappa$ y $\{D(i+1, 0), D(i+1, 1)\} \subseteq Z(X)$ con $\{x_\alpha(n) : \alpha \in J_{i+1}\} \subseteq D(i+1, 0)$, $\{x_\alpha(i+1) : \alpha \in J_{i+1}\} \subseteq D(i+1, 1)$ y $D(i+1, 0) \cap D(i+1, 1) = \emptyset$. Esto completa la recursión.

Para completar la demostración de la proposición definamos $C_n := \bigcap_{i < n} D(i, 0)$ y $C_i := B_i \cap D(i, 1)$ para cualquier $i < n$. Claramente, $\{C_i : i < n+1\}$ es una familia ajena por pares formada por elementos de $Z(X)$ tal que $\{x_\alpha(i) : \alpha \in J_{n-1}\} \subseteq C_i$ para cualquier $i < n+1$. En suma, X satisface $P(\kappa, n+1)$. $\square$

Con respecto a la preservación de $P(\kappa, 2)$ en productos topológicos tenemos el siguiente resultado:

Proposición 7.2.4. Si κ y λ son cardinales con $\text{cf}(\kappa) > \lambda \geq \omega$ y $\{X_\xi : \xi < \lambda\}$ es una familia tal que $C_p(X_\xi)$ tiene calibre κ para cada $\xi < \lambda$, entonces $C_p(\prod_{\xi < \lambda} X_\xi)$ tiene calibre κ .

Demostración. Sean $X := \prod_{\xi < \lambda} X_\xi$ y $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha < \kappa\} \subseteq T_X^2$. Si $f : \kappa \rightarrow \lambda$ es la función determinada mediante $f(\alpha) := \min\{\xi < \lambda : x_\alpha(\xi) \neq y_\alpha(\xi)\}$, entonces existen $I \in [\kappa]^\kappa$ y $\xi < \lambda$ de tal manera que $f(\alpha) = \xi$ para cualquier $\alpha \in I$. Lo anterior implica que $\{(x_\alpha(\xi), y_\alpha(\xi)) : \alpha \in I\} \subseteq T_{X_\xi}^2$ y, por ende, existe $J \in [I]^\kappa$ tal que $\{x_\alpha(\xi) : \alpha \in J\}$ y $\{y_\alpha(\xi) : \alpha \in J\}$ están completamente separados en X_ξ . Finalmente, como la ξ -ésima proyección es una función continua, resulta que $\{x_\alpha : \alpha \in J\}$ y $\{y_\alpha : \alpha \in J\}$ están completamente separados en X . $\square$

Corolario 7.2.5. Si $\{X_n : n < \omega\}$ es una familia de espacios tal que $C_p(X_n)$ es fuertemente Šanin para cada $n < \omega$, entonces $C_p(\prod_{n < \omega} X_n)$ es fuertemente Šanin.

Para un espacio metrizable X con métrica d , $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, el conjunto $B_\varepsilon(x)$ es la bola abierta con centro en x y radio ε , i.e., $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$.

Ahora, sean κ un número cardinal infinito y $J_\alpha := (0, 1] \times \{\alpha\}$ para cada $\alpha < \kappa$. Además, sean $J(\kappa) := \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{\alpha < \kappa} J_\alpha$ y $d : J(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ la función determinada mediante

$$d(\langle x, \alpha \rangle, \langle y, \beta \rangle) := \begin{cases} |x - y|, & \text{si } \alpha = \beta, \\ x + y, & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Resulta que d es una métrica en $J(\kappa)$. Al espacio métrico resultante se le conoce como el *erizo metrizable de κ espinas*.

Una observación relevante es que para cualquier $0 < \varepsilon < 1$ se cumple que

$$B_\varepsilon(\langle 0, 0 \rangle) = \{(0, 0)\} \cup ((0, \varepsilon) \times \kappa) \quad \text{y} \quad B_\varepsilon(\langle 1, \alpha \rangle) = (1 - \varepsilon, 1] \times \{\alpha\}.$$

Además,

$$B_\varepsilon(\langle x, \alpha \rangle) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \{\alpha\}$$

cuando $0 < x < 1$ y $\varepsilon < \min\{x, 1 - x\}$.

Finalmente, recordemos que si A y B son subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (X, d) , la *distancia* entre A y B es

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Además, es conveniente establecer $d(A, \emptyset) := 1$ para simplificar nuestra próxima demostración.

En nuestro siguiente resultado usaremos un hecho que será demostrado en el corolario 7.6.1: si λ es un número cardinal y X es un espacio topológico, entonces $C(C_p(X)) = C(C_p(X \times D(\lambda)))$.

Teorema 7.2.6. Para cualquier cardinal infinito κ se satisface que $C_p(J(\kappa))$ es fuertemente Šanin.

Demostración. Sean λ un cardinal con $\text{cf}(\lambda) > \omega$ y $\{V(f_\beta, A_\beta, \varepsilon) : \beta < \lambda\}$ una familia elemental en $C_p(J(\kappa))$ con $\langle 0, 0 \rangle \in \bigcap_{\beta < \lambda} A_\beta$. Como $\mathbb{R}$ tiene calibre λ y $\{B_\varepsilon(f_\beta(\langle 0, 0 \rangle)) : \beta < \lambda\} \subseteq \tau_{\mathbb{R}}^+$, existen $I \in [\lambda]^\lambda$ y $r \in \bigcap \{B_\varepsilon(f_\beta(\langle 0, 0 \rangle)) : \beta \in I\}$. Luego, como cada f_β es continua y $f_\beta(\langle 0, 0 \rangle) \in B_\varepsilon(r)$, existe $0 < \delta_\beta < 1$ con la propiedad de que $f_\beta[\{(0, 0)\} \cup ((0, \delta_\beta] \times \kappa)] \subseteq B_\varepsilon(r)$. Así, como $\mathbb{R}$ tiene calibre λ y $\{(0, \delta_\beta) : \beta \in I\} \subseteq \tau_{\mathbb{R}}^+$, existen $J \in [I]^\lambda$ y $\delta \in \bigcap \{(0, \delta_\beta) : \beta \in J\}$.

Sean $p < \omega$ con $0 < \delta - 2^{-p} < \delta + 2^{-p} < 1$, $B := \{\delta\} \times \kappa$ y $B_\beta := A_\beta \setminus (\{(0, 0)\} \cup ((0, \delta] \times \kappa))$ para cada $\beta \in J$. En virtud de que B es cerrado, B_β es finito y $B \cap B_\beta = \emptyset$, la función $h : J \rightarrow \omega$ dada por $h(\beta) := \min\{p \leq n < \omega : d(B, B_\beta) > 2^{-n}\}$ está bien definida. Más aún, existe $p \leq m < \omega$ de tal manera que si $K := h^{-1}\{m\}$, entonces $K \in [J]^\lambda$ y $d(B, B_\beta) > 2^{-m}$ para cualquier $\beta \in K$.

Sean $\eta := \delta + 2^{-m}$ y $X := [\eta, 1] \times \kappa$. En virtud de que la función identidad $X \rightarrow [\eta, 1] \times D(\kappa)$ es un homeomorfismo, sucede que $C(C_p(X)) = C(C_p([\eta, 1] \times D(\kappa))) = C(C_p([\eta, 1])) = \text{UC}$ (véanse la proposición 7.1.6 y el corolario 7.6.1). Por esta razón, como $\{V(f_\beta \upharpoonright_X, B_\beta, \varepsilon) : \beta \in K\}$ es una familia de abiertos en $C_p(X)$, existen $L \in [K]^\lambda$ y una función continua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $g \in \bigcap \{V(f_\beta \upharpoonright_X, B_\beta, \varepsilon) : \beta \in L\}$.

Ahora, para cada $\alpha < \kappa$ sea $g_\alpha : [\delta, \eta] \times \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$g_\alpha(\langle x, \alpha \rangle) := \left(\frac{g(\langle \eta, \alpha \rangle) - r}{\eta - \delta} \right) (x - \delta) + r.$$

Afirmación. La función $f : J(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ determinada mediante

$$f(\langle x, \alpha \rangle) := \begin{cases} r, & \text{si } x \in [0, \delta], \\ g_\alpha(\langle x, \alpha \rangle), & \text{si } x \in [\delta, \eta], \\ g(\langle x, \alpha \rangle), & \text{si } x \in [\eta, 1], \end{cases}$$

es continua y $f \in \bigcap \{V(f_\beta, A_\beta, \varepsilon) : \beta \in L\}$.

Claramente, f es continua en $\langle 0, 0 \rangle$ porque f es la constante r en $B_\delta(\langle 0, 0 \rangle)$. Sean $x \in (0, 1]$, $\alpha < \kappa$ y $U \in \tau_{\mathbb{R}}$ con $f(\langle x, \alpha \rangle) \in U$.

1. Si $x < \delta$, existe $\rho > 0$ tal que $0 < x - \rho < x + \rho < \delta$.
2. Si $x = \delta$, por continuidad de g_α existe $\rho > 0$ con $0 < x - \rho < x + \rho < \eta$ y $g_\alpha[[x, x + \rho] \times \{\alpha\}] \subseteq U$.
3. Si $\delta < x < \eta$, por continuidad de g_α existe $\rho > 0$ tal que $\delta < x - \rho < x + \rho < \eta$ y $g_\alpha[(x - \rho, x + \rho) \times \{\alpha\}] \subseteq U$.
4. Si $x = \eta$, por continuidad de g y g_α existe $\rho > 0$ con $\delta < x - \rho < x + \rho < 1$, $g_\alpha[(x - \rho, x] \times \{\alpha\}] \subseteq U$ y $g[[x, x + \rho) \times \{\alpha\}] \subseteq U$.

5. Si $\eta < x < 1$, por continuidad de g existe $\rho > 0$ tal que $\eta < x - \rho < x + \rho < 1$ y $g[(x - \rho, x + \rho) \times \{\alpha\}] \subseteq U$.

6. Si $x = 1$, por continuidad de g existe $\rho > 0$ con $\eta < x - \rho$ y $g[(x - \rho, x) \times \{\alpha\}] \subseteq U$.

En cualquier caso, $f[B_\rho(\langle x, \alpha \rangle)] \subseteq U$. Así, f es una función continua.

Para terminar, si $\beta \in L$, $\langle x, \alpha \rangle \in A_\beta$ y $z := \langle x, \alpha \rangle$ hay dos casos: si $0 \leq x \leq \delta$, entonces $f_\beta(z) \in B_\varepsilon(r)$, es decir, $|f(z) - f_\beta(z)| = |r - f_\beta(z)| < \varepsilon$. Si $x > \delta$, entonces $z \in B_\beta$, lo cual implica que

$$x - \delta = |x - \delta| = d(\langle \delta, \alpha \rangle, \langle x, \alpha \rangle) = d(\langle \delta, \alpha \rangle, z) \geq d(B, B_\beta) > 2^{-m},$$

es decir, $x > \delta + 2^{-m} = \eta$. De esta manera, $|f(z) - f_\beta(z)| = |g(z) - f_\beta(z)| < \varepsilon$. En suma, $f \in \bigcap \{V(f_\beta, A_\beta, \varepsilon) : \beta \in L\}$. $\square$

Una consecuencia del corolario 7.2.5 y el teorema 7.2.6 es:

Teorema 7.2.7. *Para cualquier cardinal infinito κ se satisface que $C_p(J(\kappa)^\omega)$ es fuertemente Šanin.*

Por lo tanto,

Teorema 7.2.8. *Si X es un espacio metrizable, entonces $C_p(X)$ es fuertemente Šanin.*

Demostración. Por el Teorema de Kowalsky (véase [20, Theorem 4.4.9, p. 282]), existe un cardinal infinito κ de tal manera que X es un subespacio de la potencia numerable $J(\kappa)^\omega$. Luego, como $C_p(J(\kappa)^\omega)$ es fuertemente Šanin por el teorema 7.2.7, la proposición 7.1.4 garantiza que $C_p(X)$ es fuertemente Šanin. $\square$

Finalmente, la proposición 7.1.3 y el teorema 7.2.8 producen el siguiente resultado:

Teorema 7.2.9. *Si X es un espacio submetrizable, entonces $C_p(X)$ es fuertemente Šanin.*

7.3. Calibres de $C_p(X)$ cuando X es un intervalo de ordinales

Si κ es un número cardinal con $\text{cf}(\kappa) > \omega$, una propiedad de las funciones de $C([0, \kappa])$ y $C([0, \kappa))$ es que son constantes en un segmento final de κ (véase [54, Theorem (q)(5), p. 130]). Este hecho permite establecer el siguiente resultado.

Lema 7.3.1. *Si κ es un cardinal infinito, entonces κ no es un calibre para $C_p([0, \kappa])$ ni para $C_p([0, \kappa))$.*

Demostración. En virtud de que ambos argumentos son similares, únicamente exponemos los detalles para $C_p([0, \kappa])$. Si $\text{cf}(\kappa) = \omega$, entonces el corolario 2.2.9 implica que $C_p([0, \kappa])$ no tiene calibre κ . Cuando $\text{cf}(\kappa) > \omega$, para cada $\alpha \in S := \{\beta + 1 : \beta < \kappa\}$ definimos $\chi_\alpha : [0, \kappa] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\chi_\alpha(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \beta = \alpha, \\ 0, & \text{si } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Consideremos la colección $\{V(\chi_\alpha, \{\alpha, \alpha + 1\}, 1/2) : \alpha \in S\}$ y sea $J \in [S]^\kappa$. Si existe una función $f \in \bigcap \{V(\chi_\alpha, \{\alpha, \alpha + 1\}, 1/2) : \alpha \in J\}$, entonces hay $\beta < \kappa$ y $r \in \mathbb{R}$ con $f[[\beta, \kappa]] \subseteq \{r\}$. Por último, si $\alpha \in [\beta, \kappa] \cap J$, entonces la condición $f \in V(\chi_\alpha, \{\alpha, \alpha + 1\}, 1/2)$ implica que $1/2 < r$ y $r < 1/2$ simultáneamente, un absurdo. $\square$

Con el lema anterior es posible demostrar la siguiente proposición:

Proposición 7.3.2. *Si κ es un cardinal infinito, entonces*

$$\mathcal{C}(C_p([0, \kappa])) = \{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) > \kappa\} = \mathcal{C}(C_p([0, \kappa])).$$

Demostración. Sean $X := C_p([0, \kappa])$ y $Y := C_p([0, \kappa])$. Primero, las relaciones $nw([0, \kappa]) = \kappa = nw([0, \kappa])$ y $nw \geq iw$ implican que $\{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) > \kappa\} \subseteq \mathcal{C}(X) \cap \mathcal{C}(Y)$ (véase la proposición 7.1.6). Por otra parte, si $\lambda \in \text{CN}$ cumple $\text{cf}(\lambda) \leq \kappa$, entonces como $C_p([0, \text{cf}(\lambda)])$ no tiene calibre $\text{cf}(\lambda)$ (véase el lema 7.3.1) resulta que X y Y tampoco tienen calibre $\text{cf}(\lambda)$ (véase la proposición 7.1.4). En consecuencia, la proposición 2.2.1 asegura que $\lambda \notin \mathcal{C}(X) \cup \mathcal{C}(Y)$. $\square$

En particular, si κ y λ son cardinales infinitos con $\lambda < \kappa$ y $\text{cf}(\kappa) > \omega$, entonces $[0, \lambda]$ está C -encajado en $[0, \kappa]$, λ^+ es un calibre para $C_p([0, \lambda])$ y no es un calibre para $C_p([0, \kappa])$. Esto demuestra que la otra contención en la proposición 7.1.4 no es cierta en general, incluso cuando el subespacio está C -encajado en el espacio.

Por otra parte, como el espacio discreto $D(\kappa)$ se condensa sobre $[0, \kappa]$ y

$$\kappa \in \mathcal{C}(C_p(D(\kappa))) \setminus \mathcal{C}(C_p([0, \kappa]))$$

por las proposiciones 7.1.1 y 7.3.2, se deduce que la otra contención en la proposición 7.1.3 tampoco es cierta en general.

Podemos fortalecer todavía más la proposición 7.3.2 para cualquier segmento inicial de ordinales.

Proposición 7.3.3. *Si α es un ordinal infinito, entonces*

$$\mathcal{C}(C_p([0, \alpha])) = \{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) > |\alpha|\} = \mathcal{C}(C_p([0, \alpha])).$$

Demostración. Cuando $|\alpha| = \alpha$ el resultado es la proposición 7.3.2. Si $|\alpha| < \alpha$ observemos que, si $X := C_p([0, \alpha])$ y $Y := C_p([0, \alpha])$, entonces las relaciones

$$i w([0, \alpha]) \leq n w([0, \alpha]) \leq |\alpha| \quad \text{y} \quad i w([0, \alpha]) \leq n w([0, \alpha]) \leq |\alpha|$$

y la proposición 7.1.6 implican que $\{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) > |\alpha|\} \subseteq C(X) \cap C(Y)$. Finalmente, como $[0, |\alpha|]$ es un subespacio de $[0, \alpha]$ y $[0, \alpha]$, las proposiciones 7.1.4 y 7.3.2 garantizan que $C(X) \cup C(Y) \subseteq \{\lambda \in \text{CN} : \text{cf}(\lambda) > |\alpha|\}$. $\square$

Cerramos esta sección con un par de ejemplos importantes de espacios C_p sobre intervalos de ordinales:

Ejemplo 7.3.4. *El espacio de funciones $C_p([0, \omega_1])$ tiene las siguientes características:*

1. $C_p([0, \omega_1])$ es un espacio T_4 con la propiedad de Lindelöf;
2. $C(C_p([0, \omega_1])) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \omega_1\}$, y
3. $P(C_p([0, \omega_1])) = \text{UC} = \text{WP}(C_p([0, \omega_1]))$.

Demostración. La prueba para el enunciado del inciso (1) se puede consultar en [84, S.316, p. 280]. Por otra parte, la proposición 4.2.10 constata el inciso (3), mientras que la proposición 7.3.2 garantiza el inciso (2). $\square$

Ejemplo 7.3.5. *El espacio de funciones $C_p([0, \omega_1])$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $C_p([0, \omega_1])$ es un espacio de Tychonoff, no normal y sin subespacios densos con la propiedad de Lindelöf;
2. $C_p([0, \omega_1])$ no es ω -denso en $\mathbb{R}^{[0, \omega_1]}$;
3. $C(C_p([0, \omega_1])) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \omega_1\}$, y
4. $P(C_p([0, \omega_1])) = \text{UC} = \text{WP}(C_p([0, \omega_1]))$.

Demostración. Los incisos (3) y (4) son consecuencia de las proposiciones 4.2.10 y 7.3.2. Por otro lado, en [84, S.317, p. 281] y [84, S.320, p. 282] se demuestra que $C_p([0, \omega_1])$ tiene las características del inciso (1). Finalmente, en [85, Proposition 1, p. 268] se prueba que si $C_p(X)$ es ω -denso en $\mathbb{R}^X$, entonces X tiene pseudocarácter numerable; en consecuencia, $C_p([0, \omega_1])$ no es ω -denso en $\mathbb{R}^{[0, \omega_1]}$. $\square$

7.4. Calibres de $C_p(X)$ cuando X es la extensión λ -Lindelöf

Concentrémonos ahora en la extensión λ -Lindelöf de un espacio discreto infinito. Recuerde que para un cardinal infinito κ el espacio discreto $D(\kappa)$ es el conjunto κ equipado con la topología discreta. Ahora, si λ es un número cardinal con $\omega \leq \lambda \leq \kappa$, la extensión λ -Lindelöf por un punto de $D(\kappa)$ es el conjunto $L(\lambda, \kappa) := \kappa \cup \{\kappa\}$ equipado con la topología

$$\tau_{L(\lambda, \kappa)} = \tau_{D(\kappa)} \cup \{U \subseteq L(\lambda, \kappa) : \kappa \in U \wedge |L(\lambda, \kappa) \setminus U| < \lambda\}.$$

Observemos que $L(\omega, \kappa)$ es la compactación por un punto de $D(\kappa)$ y $L(\omega_1, \kappa)$ es la extensión Lindelöf por un punto de $D(\kappa)$.

Lema 7.4.1. *Si κ , λ y μ son cardinales con $\omega \leq \lambda \leq \mu \leq \kappa$, entonces $C_p(L(\lambda, \kappa))$ no tiene calibre μ .*

Demostración. Para cada $\alpha < \mu$ denotemos por $\chi_\alpha : L(\lambda, \kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica de $\{\alpha\}$. Además, para toda $i < 2$ definamos $F_i := [i - 1/4, i + 1/4]$. Consideremos a $\{V(\chi_\alpha, \{\alpha, \alpha + 1\}, 1/4) : \alpha < \mu\}$, tomemos $J \in [\mu]^\mu$ y supongamos, en busca de una contradicción, que existe $f \in \bigcap \{V(\chi_\alpha, \{\alpha, \alpha + 1\}, 1/4) : \alpha \in J\}$. Ahora, como F_0 y F_1 son subconjuntos ajenos de $\mathbb{R}$, existe $i < 2$ tal que $f(\kappa) \notin F_i$ y, por ende, existe $\varepsilon > 0$ con $B_\varepsilon(f(\kappa)) \cap F_i = \emptyset$. Fijemos $U \in \tau_{L(\lambda, \kappa)}(\kappa)$ tal que $f[U] \subseteq B_\varepsilon(f(\kappa))$.

Observemos que si $|J \cap U| < \mu$, entonces $|J \setminus U| = \mu$, lo cual implica que $\mu = |J \setminus U| \leq |L(\lambda, \kappa) \setminus U| < \lambda \leq \mu$, una contradicción. Así, $|J \cap U| = \mu$ y, por ende, el conjunto $\{\alpha + 1 : \alpha \in J \cap U\}$ tiene cardinalidad μ . Sea $\alpha \in J \cap U$ con $\alpha + 1 \in U$. De esta manera, como $f \in V(\chi_\alpha, \{\alpha, \alpha + 1\}, 1/4)$, resulta que $f(\alpha) \in B_\varepsilon(f(\kappa)) \cap F_1$ y $f(\alpha + 1) \in B_\varepsilon(f(\kappa)) \cap F_0$, una contradicción a la igualdad $B_\varepsilon(f(\kappa)) \cap F_i = \emptyset$. $\square$

Una combinación de la proposición 2.2.1 y el lema 7.4.1 produce el siguiente corolario.

Corolario 7.4.2. *Si κ , λ y μ son cardinales con $\omega \leq \lambda \leq \text{cf}(\mu) \leq \kappa$, entonces $C_p(L(\lambda, \kappa))$ no tiene calibre μ .*

En nuestro siguiente resultado utilizaremos la equivalencia del lema 7.1.2.

Lema 7.4.3. *Si κ , λ y μ son cardinales con μ regular y $\omega < \mu < \lambda \leq \kappa$, entonces $C_p(L(\lambda, \kappa))$ tiene calibre μ .*

Demostración. Sea $\{V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon) : \alpha < \mu\}$ una familia elemental. Por el teorema 1.2.3, existen $I \in [\mu]^\mu$ y un conjunto A con $A = A_\alpha \cap A_\beta$, siempre que $\alpha, \beta \in I$ son distintos. Durante el resto de la prueba supondremos sin perder generalidad que $A \neq \emptyset$ y que $A_\alpha \setminus A \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in I$ (si este no es el caso, como $|\bigcup_{\alpha < \mu} A_\alpha| \leq \mu < \kappa$, existe una

colección $\{\xi_\alpha : \alpha < \mu + 1\} \subseteq \kappa \setminus \bigcup_{\alpha < \mu} A_\alpha$ enumerada sin repeticiones. Así, si para cada $\alpha < \mu$ se define $B_\alpha := A_\alpha \cup \{\xi_\alpha, \xi_\mu\}$, e $I \in [\mu]^\mu$ y B cumplen $B = B_\alpha \cap B_\beta$, siempre que $\alpha, \beta \in I$ son distintos, entonces $\xi_\mu \in B$ y $\xi_\alpha \in B_\alpha \setminus B$ para cualquier $\alpha \in I$. Además, para cualquier $\alpha \in I$ la relación $f \in V(f_\alpha, B_\alpha, \varepsilon)$ implica que $f \in V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon)$.

Dicho lo anterior, sean $m \in \omega$ y $n \in \omega$ tales que $A = \{\xi_i : i < m\}$ y $A_\alpha \setminus A = \{\xi(\alpha, i) : i < n\}$ para cada $\alpha \in I$.

Caso 1. $\kappa \notin \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in I\}$.

Dado que la siguiente afirmación será necesaria varias veces, presentamos todos los detalles de su prueba.

Afirmación. Existen colecciones $\{E_i : i < m\}$, $\{x_i : i < m\}$, $\{F_j : j < n\}$ y $\{y_j : j < n\}$ de tal manera que las siguientes condiciones se satisfacen para cualesquiera $i < m$ y $j < n$:

1. $E_0 \in [I]^\mu$;
2. si $i + 1 < m$, entonces $E_{i+1} \in [E_i]^\mu$;
3. $x_i \in \bigcap \{B_\varepsilon(f_\alpha(\xi_i)) : \alpha \in E_i\}$;
4. $F_0 \in [E_{m-1}]^\mu$;
5. si $j + 1 < n$, entonces $F_{j+1} \in [F_j]^\mu$, y
6. $y_j \in \bigcap \{B_\varepsilon(f_\alpha(\xi(\alpha, j))) : \alpha \in F_j\}$.

Los primeros tres puntos los obtendremos por recursión finita sobre m . En efecto, como $\mathbb{R}$ tiene calibre μ por la proposición 4.2.10(1), existen $E_0 \in [I]^\mu$ y $x_0 \in \bigcap \{B_\varepsilon(f_\alpha(\xi_0)) : \alpha \in E_0\}$. Luego, si para alguna i con $i + 1 < m$ hemos construido familias $\{E_j : j \leq i\}$ y $\{x_j : j \leq i\}$ con las propiedades deseadas, el hecho de que $\mathbb{R}$ tiene calibre μ implica la existencia de $E_{i+1} \in [E_i]^\mu$ y $x_{i+1} \in \bigcap \{B_\varepsilon(f_\alpha(\xi_{i+1})) : \alpha \in E_{i+1}\}$.

Los tres puntos restantes los conseguiremos por recursión finita sobre n . Para empezar, el hecho de que $\mathbb{R}$ tiene calibre μ implica que hay $F_0 \in [E_{m-1}]^\mu$ y $y_0 \in \bigcap \{B_\varepsilon(f_\alpha(\xi(\alpha, 0))) : \alpha \in F_0\}$. Lo que sigue es suponer que para alguna j con $j + 1 < n$ hemos construido familias $\{F_k : k \leq j\}$ y $\{y_k : k \leq j\}$ con las características requeridas. Finalmente, como $\mathbb{R}$ tiene calibre μ , resulta que existen $F_{j+1} \in [F_j]^\mu$ y $y_{j+1} \in \bigcap \{B_\varepsilon(f_\alpha(\xi(\alpha, j+1))) : \alpha \in F_{j+1}\}$.

Ahora, sea $f : L(\lambda, \kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(\xi) := \begin{cases} 0, & \text{si } \xi \in L(\lambda, \kappa) \setminus \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in F_{n-1}\}, \\ x_i, & \text{si } \exists i < m (\xi = \xi_i), \\ y_j, & \text{si } \exists \alpha \in F_{n-1} \exists j < n (\xi = \xi(\alpha, j)). \end{cases}$$

Observemos que las relaciones $|\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in F_{n-1}\}| \leq \mu < \lambda$ y $\kappa \notin \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in F_{n-1}\}$ implican que f es una función continua. Además, f es un elemento de $\bigcap\{V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon) : \alpha \in F_{n-1}\}$.

Caso 2. $\kappa \in \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I\}$.

Sea $I^* := \{\alpha \in I : \kappa \in A_\alpha\}$. Cuando $|I^*| < \mu$, resulta que $|I \setminus I^*| = \mu$ y $\kappa \notin \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I \setminus I^*\}$. Por lo tanto, un razonamiento similar al realizado en la Afirmación del Caso 1 produce $J \in [I \setminus I^*]^\mu$ y $f \in C_p(L(\lambda, \kappa))$ con $f \in \bigcap\{V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon) : \alpha \in J\}$. Supongamos entonces que $|I^*| = \mu$. Además, como $\kappa \in \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in I^*\}$, podemos suponer sin perder generalidad que $\xi_0 = \kappa$. Luego, un argumento similar al hecho en el Caso 1 permite construir colecciones $\{E_i : i < m\}$, $\{x_i : i < m\}$, $\{F_j : j < n\}$ y $\{y_j : j < n\}$ de tal manera que las siguientes condiciones se satisfacen para cualesquiera $i < m$ y $j < n$:

1. $E_0 \in [I^*]^\mu$ y $F_0 \in [E_{m-1}]^\mu$;
2. si $i+1 < m$ y $j+1 < n$, entonces $E_{i+1} \in [E_i]^\mu$ y $F_{j+1} \in [F_j]^\mu$;
3. $x_i \in \bigcap\{B_\varepsilon(f_\alpha(\xi_i)) : \alpha \in E_i\}$;
4. $y_j \in \bigcap\{B_\varepsilon(f_\alpha(\xi(\alpha, j))) : \alpha \in F_j\}$.

Para terminar consideremos la función $f : L(\lambda, \kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(\xi) := \begin{cases} x_0, & \text{si } \xi \in L(\lambda, \kappa) \setminus \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in F_{n-1}\}, \\ x_i, & \text{si } \exists i < m (\xi = \xi_i), \\ y_j, & \text{si } \exists \alpha \in F_{n-1} \exists j < n (\xi = \xi(\alpha, j)). \end{cases}$$

De esta manera, como $|\bigcup\{A_\alpha \setminus \{\kappa\} : \alpha \in F_{n-1}\}| \leq \mu < \lambda$, $\kappa \notin \bigcup\{A_\alpha \setminus \{\kappa\} : \alpha \in F_{n-1}\}$ y $f[L(\lambda, \kappa) \setminus \bigcup\{A_\alpha \setminus \{\kappa\} : \alpha \in F_{n-1}\}] \subseteq \{x_0\}$, lo que sucede es que f es una función continua y $f \in \bigcap\{V(f_\alpha, A_\alpha, \varepsilon) : \alpha \in F_{n-1}\}$. $\square$

Corolario 7.4.4. Si κ , λ y μ son cardinales con $\omega < \text{cf}(\mu) < \lambda \leq \kappa < \mu$, entonces $C_p(L(\lambda, \kappa))$ tiene calibre μ .

Demostración. Primero, como κ es un subespacio denso, discreto y abierto de $L(\lambda, \kappa)$ se satisface que $\{\{\alpha\} : \alpha < \kappa\}$ es una π -base para $L(\lambda, \kappa)$ de cardinalidad κ ; en consecuencia, $\pi w(L(\lambda, \kappa)) \leq \kappa < \mu$. Luego, como $\text{cf}(\mu)$ es un calibre para $C_p(L(\lambda, \kappa))$ por el lema 7.4.3, se deduce que μ es un calibre para $C_p(L(\lambda, \kappa))$ por la proposición 2.2.3. $\square$

Nuestro siguiente resultado es la versión para cardinales singulares del lema 7.4.3.

Lema 7.4.5. Si κ , λ y μ son cardinales con $\omega < \text{cf}(\mu) < \mu < \lambda \leq \kappa$, entonces $C_p(L(\lambda, \kappa))$ tiene calibre μ .

Demostración. Sea $\{V(g_\gamma, B_\gamma, \varepsilon) : \gamma < \mu\}$ una familia elemental. Además, sea $\{\mu_\alpha : \alpha < \text{cf}(\mu)\}$ una colección de cardinales regulares no numerables con las siguientes propiedades:

1. $\sup\{\mu_\alpha : \alpha < \text{cf}(\mu)\} = \mu$, y
2. para cada $\alpha < \text{cf}(\mu)$, $\max\{\text{cf}(\mu), \sup\{\mu_\beta : \beta < \alpha\}\} < \mu_\alpha$.

Ahora, sea $I_\alpha := [\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1})$ para cualquier $\alpha < \text{cf}(\mu)$. Para cada $\gamma \in \bigcup_{\alpha < \text{cf}(\mu)} I_\alpha$ sean $f(\alpha, \gamma) := g_\gamma$ y $A(\alpha, \gamma) := B_\gamma$, donde $\alpha < \text{cf}(\mu)$ es el único ordinal con $\gamma \in I_\alpha$. Por el teorema 2.8.8, $I \in [\text{cf}(\mu)]^{\text{cf}(\mu)}$, $\{J_\alpha : \alpha \in I\}$, $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ y A que satisfacen las siguientes condiciones para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$ distintos:

1. $J_\alpha \in [I_\alpha]^{\mu_{\alpha+1}}$;
2. $A_\alpha \cap A_\beta = A$;
3. si $\gamma, \delta \in J_\alpha$ son diferentes, entonces $A(\alpha, \gamma) \cap A(\alpha, \delta) = A_\alpha$;
4. cuando $\gamma \in J_\alpha$ y $\delta \in J_\beta$, $A(\alpha, \gamma) \cap A(\beta, \delta) = A$, y
5. $|A_\alpha| = |A_\beta|$.

Durante el resto de la prueba supondremos sin perder generalidad que $A \neq \emptyset$, que $A_\alpha \setminus A \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in I$, y que $A(\alpha, \gamma) \setminus A_\alpha \neq \emptyset$ para cualesquiera $\alpha \in I$ y $\gamma \in J_\alpha$. Sean $m, n, p \in \omega$ tales que $A = \{\xi_i : i < m\}$, $A_\alpha \setminus A = \{\xi(\alpha, j) : j < n\}$ para cada $\alpha \in I$, y $A(\alpha, \gamma) \setminus A_\alpha = \{\xi(\alpha, \gamma, k) : k < p\}$ para cualesquiera $\alpha \in I$ y $\gamma \in J_\alpha$.

Caso 1. $\kappa \notin \bigcup\{A(\alpha, \gamma) : \alpha \in I \wedge \gamma \in J_\alpha\}$.

A continuación presentamos tres enunciados sin demostración puesto que cada uno de ellos se prueba con un procedimiento similar al expuesto en la Afirmación del lema 7.4.3.

1. Para cualquier $\alpha \in I$ existen colecciones $\{E(\alpha, i) : i < m\}$ y $\{x(\alpha, i) : i < m\}$ de tal manera que las siguientes condiciones se satisfacen para cualquier $i < m$:
 - (a) $E(\alpha, 0) \in [J_\alpha]^{\mu_{\alpha+1}}$;
 - (b) si $i + 1 < m$, entonces $E(\alpha, i + 1) \in [E(\alpha, i)]^{\mu_{\alpha+1}}$, y
 - (c) $x(\alpha, i) \in \bigcap \{B_\xi(f(\alpha, \gamma)(\xi_i)) : \gamma \in E(\alpha, i)\}$.
2. Existen colecciones $\{K_i : i < m\}$ y $\{x_i : i < m\}$ de tal forma que las siguientes condiciones se satisfacen para cualquier $i < m$:

- (a) $K_0 \in [I]^{\text{cf}(\mu)}$;
 - (b) si $i + 1 < m$, entonces $K_{i+1} \in [K_i]^{\text{cf}(\mu)}$, y
 - (c) $x_i \in \bigcap \{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x(\alpha, i)) : \alpha \in K_i\}$.
3. Para cualquier $\alpha \in K_{m-1}$ existen colecciones $\{F(\alpha, j) : j < n\}$, $\{y(\alpha, j) : j < n\}$, $\{G(\alpha, k) : k < p\}$ y $\{z(\alpha, k) : k < p\}$ de tal manera que las siguientes condiciones se satisfacen para cualesquiera $i < m$, $j < n$ y $k < p$:
- (a) $F(\alpha, 0) \in [E(\alpha, m-1)]^{\mu_{\alpha+1}}$ y $G(\alpha, 0) \in [F(\alpha, n-1)]^{\mu_{\alpha+1}}$;
 - (b) si $j + 1 < n$ y $k + 1 < p$, entonces $F(\alpha, j+1) \in [F(\alpha, j)]^{\mu_{\alpha+1}}$ y $G(\alpha, k+1) \in [G(\alpha, k)]^{\mu_{\alpha+1}}$;
 - (c) $y(\alpha, j) \in \bigcap \{B_\varepsilon(f(\alpha, \gamma)(\xi(\alpha, j))) : \gamma \in F(\alpha, j)\}$, y
 - (d) $z(\alpha, k) \in \bigcap \{B_\varepsilon(f(\alpha, \gamma)(\xi(\alpha, \gamma, k))) : \gamma \in G(\alpha, k)\}$.

Ahora, sea $f : L(\lambda, \kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(\xi) := \begin{cases} 0, & \text{si } \xi \in L(\lambda, \kappa) \setminus \bigcup \{A(\alpha, \gamma) : \alpha \in K_{m-1} \wedge \gamma \in G(\alpha, p-1)\}, \\ x_i, & \text{si } \exists i < m (\xi = \xi_i), \\ y(\alpha, j), & \text{si } \exists \alpha \in K_{m-1} \exists j < n (\xi = \xi(\alpha, j)), \\ z(\alpha, k), & \text{si } \exists \alpha \in K_{m-1} \exists \gamma \in G(\alpha, p-1) \exists k < p (\xi = \xi(\alpha, \gamma, k)). \end{cases}$$

Observemos que las relaciones $\left| \bigcup \{A(\alpha, \gamma) : \alpha \in K_{m-1} \wedge \gamma \in G(\alpha, p-1)\} \right| \leq \mu < \lambda$ y $\kappa \notin \bigcup \{A(\alpha, \gamma) : \alpha \in K_{m-1} \wedge \gamma \in G(\alpha, p-1)\}$ implican que f es una función continua. Finalmente, notemos que $G := \bigcup \{G(\alpha, p-1) : \alpha \in K_{m-1}\}$ satisface la relación $|G| = \mu$ y, además, f es un elemento de $\bigcap \{V(g_\gamma, B_\gamma, \varepsilon) : \gamma \in G\}$.

Caso 2. $\kappa \in \bigcup \{A(\alpha, \gamma) : \alpha \in I \wedge \gamma \in J_\alpha\}$.

Sea $I^* := \{\alpha \in I : \exists \gamma \in J_\alpha (\kappa \in A(\alpha, \gamma))\}$. Cuando $|I^*| < \text{cf}(\mu)$, sucede que $|I \setminus I^*| = \text{cf}(\mu)$ y $\kappa \notin \bigcup \{A(\alpha, \gamma) : \alpha \in I \setminus I^* \wedge \gamma \in J_\alpha\}$. Por lo tanto, un razonamiento semejante al expuesto en el Caso 1 produce $G \in [\mu]^\mu$ y $f \in C_p(L(\lambda, \kappa))$ con $f \in \bigcap \{V(g_\gamma, B_\gamma, \varepsilon) : \gamma \in G\}$.

Supongamos entonces que $|I^*| = \text{cf}(\mu)$. Para cada $\alpha \in I^*$ sea $I_\alpha^* := \{\gamma \in J_\alpha : \kappa \in A(\alpha, \gamma)\}$. Luego, si $I' := \{\alpha \in I^* : |I_\alpha^*| = \mu_{\alpha+1}\}$ cumple $|I'| < \text{cf}(\mu)$, entonces $|I^* \setminus I'| = \text{cf}(\mu)$ y $\kappa \notin \bigcup \{A(\alpha, \gamma) : \alpha \in I^* \setminus I' \wedge \gamma \in J_\alpha \setminus I_\alpha^*\}$. Así que, una vez más, argumentos similares a los presentes en el Caso 1 proporcionan $G \in [\mu]^\mu$ y $f \in C_p(L(\lambda, \kappa))$ con $f \in \bigcap \{V(g_\gamma, B_\gamma, \varepsilon) : \gamma \in G\}$.

Resta considerar cuando $|I'| = \text{cf}(\mu)$. Observemos que, como $\kappa \in \bigcap \{A(\alpha, \gamma) : \alpha \in I' \wedge \gamma \in I_\alpha^*\}$, podemos suponer sin perder generalidad que $\xi_0 = \kappa$. En estas circunstancias, una deducción parecida a la expuesta en la Afirmación del lema 7.4.3 permite demostrar la siguiente terna de enunciados.

1. Para cualquier $\alpha \in I'$ existen colecciones $\{E(\alpha, i) : i < m\}$ y $\{x(\alpha, i) : i < m\}$ de tal manera que las siguientes condiciones se satisfacen para cualquier $i < m$:

- (a) $E(\alpha, 0) \in [I_\alpha^*]^{\mu_{\alpha+1}}$;
- (b) si $i + 1 < m$, entonces $E(\alpha, i + 1) \in [E(\alpha, i)]^{\mu_{\alpha+1}}$, y
- (c) $x(\alpha, i) \in \bigcap \{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(\alpha, \gamma)(\xi_i)) : \gamma \in E(\alpha, i)\}$.

2. Existen colecciones $\{K_i : i < m\}$ y $\{x_i : i < m\}$ de tal forma que las siguientes condiciones se satisfacen para cualquier $i < m$:

- (a) $K_0 \in [I']^{\text{cf}(\mu)}$;
- (b) si $i + 1 < m$, entonces $K_{i+1} \in [K_i]^{\text{cf}(\mu)}$, y
- (c) $x_i \in \bigcap \{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x(\alpha, i)) : \alpha \in K_i\}$.

3. Para cualquier $\alpha \in K_{m-1}$ existen colecciones $\{F(\alpha, j) : j < n\}$, $\{y(\alpha, j) : j < n\}$, $\{G(\alpha, k) : k < p\}$ y $\{z(\alpha, k) : k < p\}$ de tal manera que las siguientes condiciones se satisfacen para cualesquiera $i < m$, $j < n$ y $k < p$:

- (a) $F(\alpha, 0) \in [E(\alpha, m-1)]^{\mu_{\alpha+1}}$ y $G(\alpha, 0) \in [F(\alpha, n-1)]^{\mu_{\alpha+1}}$;
- (b) si $j + 1 < n$ y $k + 1 < p$, entonces $F(\alpha, j + 1) \in [F(\alpha, j)]^{\mu_{\alpha+1}}$ y $G(\alpha, k + 1) \in [G(\alpha, k)]^{\mu_{\alpha+1}}$;
- (c) $y(\alpha, j) \in \bigcap \{B_{\varepsilon}(f(\alpha, \gamma)(\xi(\alpha, j))) : \gamma \in F(\alpha, j)\}$, y
- (d) $z(\alpha, k) \in \bigcap \{B_{\varepsilon}(f(\alpha, \gamma)(\xi(\alpha, \gamma, k))) : \gamma \in G(\alpha, k)\}$.

Para finalizar consideremos la función $f : L(\lambda, \kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ determinada mediante

$$f(\xi) := \begin{cases} x_0, & \text{si } \xi \in L(\lambda, \kappa) \setminus \bigcup \{A(\alpha, \gamma) : \alpha \in K_{m-1} \wedge \gamma \in G(\alpha, p-1)\}, \\ x_i, & \text{si } \exists i < m (\xi = \xi_i), \\ y(\alpha, j), & \text{si } \exists \alpha \in K_{m-1} \exists j < n (\xi = \xi(\alpha, j)), \\ z(\alpha, k), & \text{si } \exists \alpha \in K_{m-1} \exists \gamma \in G(\alpha, p-1) \exists k < p (\xi = \xi(\alpha, \gamma, k)). \end{cases}$$

De esta forma, como $\left| \bigcup \{A(\alpha, \gamma) \setminus \{\kappa\} : \alpha \in K_{m-1} \wedge \gamma \in G(\alpha, p-1)\} \right| \leq \mu < \lambda$, $\kappa \notin \bigcup \{A(\alpha, \gamma) \setminus \{\kappa\} : \alpha \in K_{m-1} \wedge \gamma \in G(\alpha, p-1)\}$ y $f[L(\lambda, \kappa) \setminus \bigcup \{A(\alpha, \gamma) \setminus \{\kappa\} : \alpha \in K_{m-1} \wedge \gamma \in G(\alpha, p-1)\}] \subseteq \{x_0\}$, lo que sucede es que f es una función continua. Por último, observemos que $G := \bigcup \{G(\alpha, p-1) : \alpha \in K_{m-1}\}$ cumple la relación $|G| = \mu$ y, además, f es un elemento de $\bigcap \{V(g_\gamma, B_\gamma, \varepsilon) : \gamma \in G\}$. $\square$

Con estos resultados previos podemos determinar con precisión los calibres de $C_p(L(\lambda, \kappa))$.

Teorema 7.4.6. Si κ y λ son números cardinales con $\omega \leq \lambda \leq \kappa$, entonces

$$\begin{aligned} C\left(C_p\left(L(\lambda, \kappa)\right)\right) = & \{\mu \in \text{CN} : \text{cf}(\mu) > \kappa\} \cup \{\mu \in \text{CN} : \text{cf}(\mu) > \omega \wedge \mu < \lambda\} \cup \\ & \{\mu \in \text{CN} : \text{cf}(\mu) > \omega \wedge \text{cf}(\mu) < \lambda \wedge \kappa < \mu\}. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$C\left(C_p\left(L(\lambda, \kappa)\right)\right) = \{\mu \in \text{CN} : \text{cf}(\mu) > \omega \wedge \mu \notin [\lambda, \kappa] \wedge \text{cf}(\mu) \notin [\lambda, \kappa]\}.$$

Demostración. Sean $A := \{\mu \in \text{CN} : \text{cf}(\mu) > \kappa\}$, $B := \{\mu \in \text{CN} : \text{cf}(\mu) > \omega \wedge \mu < \lambda\}$ y $C := \{\mu \in \text{CN} : \text{cf}(\mu) > \omega \wedge \text{cf}(\mu) < \lambda \wedge \kappa < \mu\}$. Para comprobar que todos los elementos de $A \cup B \cup C$ son calibres para $C_p(L(\lambda, \kappa))$, observemos primero que la identidad es una condensación de $L(\lambda, \kappa)$ sobre $L(\omega, \kappa)$. Por esta razón, las proposiciones 7.1.3 y 7.1.6 combinadas con la igualdad $nw(L(\omega, \kappa)) = \kappa$ implican que

$$A \subseteq C\left(C_p\left(L(\omega, \kappa)\right)\right) \subseteq C\left(C_p\left(L(\lambda, \kappa)\right)\right).$$

Además, el lema 7.4.3, el corolario 7.4.4 y el lema 7.4.5 garantizan que los elementos de $B \cup C$ son calibres para $C_p(L(\lambda, \kappa))$.

Para la contención restante, supongamos que $\mu \in \text{CN}$ no es un elemento de $A \cup B \cup C$. Como la igualdad $\text{cf}(\mu) = \omega$ implica que μ no es un calibre para $C_p(L(\lambda, \kappa))$ por el corolario 2.2.9, podemos suponer adicionalmente que $\text{cf}(\mu) > \omega$. Además, notemos que se cumplen las relaciones $\text{cf}(\mu) \leq \kappa$ y $\lambda \leq \mu$ porque $\mu \notin A \cup B$.

Resta analizar qué pasa cuando $\kappa < \mu$ y cuando $\mu \leq \kappa$. Si $\kappa < \mu$, la condición $\mu \notin C$ asegura que $\lambda \leq \text{cf}(\mu)$ y, por ende, la relación $\text{cf}(\mu) \leq \kappa$ y el corolario 7.4.2 garantizan que μ no es un calibre para $C_p(L(\lambda, \kappa))$. Finalmente, si $\mu \leq \kappa$, la relación $\lambda \leq \mu$ y el lema 7.4.3 constatan que μ no es un calibre para $C_p(L(\lambda, \kappa))$. $\square$

Comfort y Negrepointis obtuvieron el siguiente resultado relacionado con los calibres de $C_p(L(\lambda, \kappa), D(2))$ (véanse el ejemplo 2.6.1 y [16, Theorem 4.2, p. 80]):

Teorema 7.4.7. Si κ y λ son cardinales con $\omega \leq \lambda \leq \kappa$, entonces

$$C\left(C_p\left(L(\lambda, \kappa), D(2)\right)\right) = \{\mu \in \text{CN} : \text{cf}(\mu) > \omega \wedge \mu \notin [\lambda, \kappa] \wedge \text{cf}(\mu) \notin [\lambda, \kappa]\}.$$

7.5. Calibres de $C_p(X)$ cuando X es un producto topológico

Con respecto a los calibres de los espacios C_p sobre productos topológicos, la proposición 7.2.4 y el corolario 7.2.5 fueron nuestros pasos iniciales en esta dirección. Para obtener más resultados necesitamos establecer primero una generalización de [8, Lemma 9, p. 683] para calcular el i -peso de un producto arbitrario.

Proposición 7.5.1. *Si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una colección de espacios de Tychonoff con al menos dos puntos, entonces*

$$i w \left(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha \right) = \lambda \cdot \sup \{ i w(X_\alpha) : \alpha < \lambda \}.$$

Demostración. Sean $X := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ y $\mu := \lambda \cdot \sup \{ i w(X_\alpha) : \alpha < \lambda \}$. Si para cada $\alpha < \lambda$ fijamos un espacio de Tychonoff Y_α tal que X_α se condensa sobre Y_α y $i w(X_\alpha) = w(Y_\alpha)$, entonces X se condensa sobre el espacio de Tychonoff $\prod_{\alpha < \lambda} Y_\alpha$; en consecuencia,

$$i w(X) \leq w \left(\prod_{\alpha < \lambda} Y_\alpha \right) = \lambda \cdot \sup \{ w(Y_\alpha) : \alpha < \lambda \} = \mu.$$

Para determinar la desigualdad opuesta observemos que si Y es un espacio de Tychonoff de forma que X se condensa sobre Y y $i w(X) = w(Y)$, entonces, como cada X_α se encaja en el producto X , inferimos que todos los X_α se condensan sobre un subespacio de Y ; por ende, obtenemos que $\sup \{ i w(X_\alpha) : \alpha < \lambda \} \leq w(Y) = i w(X)$.

Lo que falta es notar que si $1 \leq \lambda < \omega$, lo hecho hasta ahora garantiza que $i w(X) = \mu$. En caso de que $\lambda \geq \omega$, utilizamos que el cubo de Cantor $D(2)^\lambda$ se encaja en X y que el i -peso es monótono para asegurar que

$$\lambda = n w \left(D(2)^\lambda \right) = i w \left(D(2)^\lambda \right) \leq i w(X).$$

En suma, $\mu \leq i w(X)$. □

Una consecuencia de la proposición 7.5.1 y el Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery (véase [32, Theorem 11.2, p 42]) es que el i -peso numerable se preserva bajo productos numerables y la separabilidad se preserva bajo productos de a lo sumo c factores. Estos hechos y el corolario 7.1.7 implican lo siguiente.

Corolario 7.5.2. *Sean $1 \leq n < \omega$ y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios de Tychonoff. Si denotamos por X al producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

1. Si cada X_α tiene i -peso numerable y $1 \leq \lambda \leq \omega$, entonces $C_{p,2n-1}(X)$ es fuertemente Šanin.
2. Cuando todos los X_α son separables y $1 \leq \lambda \leq \mathfrak{c}$, $C_{p,2n}(X)$ es fuertemente Šanin.
3. En consecuencia, si cada X_α es un espacio separable con i -peso numerable y $1 \leq \lambda \leq \omega$, entonces $C_{p,n}(X)$ es fuertemente Šanin.

Por ejemplo, si $\mathbb{S}$ es la recta de Sorgenfrey, entonces para cualesquiera $1 \leq \lambda \leq \omega$ y $1 \leq n < \omega$ se satisface que $C_{p,n}(\mathbb{S}^\lambda)$ es fuertemente Šanin.

Además, con las proposiciones 7.1.6 y 7.5.1 podemos dar muchos calibres para los espacios C_p en los productos de espacios de Tychonoff no triviales:

Proposición 7.5.3. Sean λ un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una colección de espacios de Tychonoff con al menos dos puntos. Si $\mu := \lambda \cdot \sup\{i w(X_\alpha) : \alpha < \lambda\}$ y $X_\pi := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, entonces

$$\{\kappa \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\kappa) > \mu\} \subseteq C\left(C_p(X_\pi)\right).$$

En particular, cuando X es un espacio de Tychonoff no trivial,

$$\{\kappa \in \mathbb{CN} : \text{cf}(\kappa) > \lambda \cdot i w(X)\} \subseteq C\left(C_p(X^\lambda)\right).$$

Un resultado de factorización, que es un caso particular de un enunciado más general presentado en el problema [84, 298, p. 33], establece lo siguiente: si λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos, el producto $\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ tiene la propiedad de Lindelöf y $f : \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f depende de menos de ω_1 coordenadas.

Nuestro objetivo ahora es determinar la colección $C(C_p(D(2)^\lambda))$ para todo cardinal $\lambda \geq \omega$. Una consecuencia del resultado mencionado en el párrafo anterior es que, si λ es un cardinal y $f \in C(D(2)^\lambda)$, entonces f depende de menos de ω_1 coordenadas. Este hecho será utilizado en el siguiente resultado:

Proposición 7.5.4. Si λ es un cardinal infinito, entonces $C_p(D(2)^\lambda)$ no tiene calibre λ .

Demostración. Primero, si $\text{cf}(\lambda) = \omega$, entonces el corolario 2.2.9 asegura que λ no es calibre para $C_p(D(2)^\lambda)$. Cuando $\text{cf}(\lambda) > \omega$ hacemos lo siguiente: para cada $\alpha < \lambda$, denotemos por $x_\alpha : \lambda \rightarrow D(2)$ a la función característica de $\{\alpha\}$; fijemos U_α , un subconjunto abierto y cerrado de $D(2)^\lambda$, con la propiedad de que $\{x_\alpha\} = U_\alpha \cap \{x_\beta : \beta < \lambda\}$, y denotemos por $\chi_\alpha : D(2)^\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ a la función característica de U_α .

Consideremos la colección $\{V(\chi_\alpha, \{x_\alpha, x_{\alpha+1}\}, 1/2) : \alpha < \lambda\}$ y tomemos $J \in [\lambda]^\lambda$. En busca de una contradicción, supongamos que existe una función

$$f \in \bigcap \{V(\chi_\alpha, \{x_\alpha, x_{\alpha+1}\}, 1/2) : \alpha \in J\}.$$

Sea $A \in [\lambda]^{\leq \omega}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in D(2)^\lambda$, $f(x) = f(y)$ siempre que $x \upharpoonright_A = y \upharpoonright_A$. Finalmente, si $\alpha \in J \cap (\sup A, \lambda)$, entonces $x_\alpha \upharpoonright_A = x_{\alpha+1} \upharpoonright_A$ y, por ende, si hacemos $r := f(x_\alpha) = f(x_{\alpha+1})$, la condición $f \in V(\chi_\alpha, \{x_\alpha, x_{\alpha+1}\}, 1/2)$ implica el absurdo $r < 1/2$ y $1/2 < r$. $\square$

Teorema 7.5.5. *Si λ es un número cardinal, entonces*

$$C\left(C_p\left(D(2)^\lambda\right)\right) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \lambda\}.$$

Demostración. Para empezar, como $n w(D(2)^\lambda) = \lambda$, la proposición 7.1.6 asegura que

$$\{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \lambda\} \subseteq C\left(C_p\left(D(2)^\lambda\right)\right).$$

Por otro lado, si $\kappa \in \text{CN}$ cumple $\text{cf}(\kappa) \leq \lambda$, entonces una combinación de las proposiciones 7.1.4 y 7.5.4 implica que $C_p(D(2)^\lambda)$ no tiene calibre $\text{cf}(\kappa)$. Por último, la proposición 2.2.1 asegura que κ no es un calibre para $C_p(D(2)^\lambda)$. $\square$

A partir del resultado previo podemos determinar con precisión la colección de calibres del espacio C_p de un producto topológico, siempre que los factores sean no triviales y tengan i -peso acotado convenientemente.

Proposición 7.5.6. *Si λ es un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una colección de espacios de Tychonoff de tal modo que, para cada $\alpha < \lambda$, $i w(X_\alpha) \leq \lambda$ y $|X_\alpha| \geq 2$, y $X_\pi := \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, entonces*

$$C\left(C_p\left(X_\pi\right)\right) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \lambda\}.$$

En especial, si X es un espacio de Tychonoff no trivial con $i w(X) \leq \lambda$, entonces $C(C_p(X^\lambda)) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \lambda\}$.

Demostración. Las proposiciones 7.1.4, 7.5.3 y 7.5.5 garantizan, respectivamente, que

$$\begin{aligned} C\left(C_p\left(X_\pi\right)\right) &\subseteq C\left(C_p\left(D(2)^\lambda\right)\right), \\ \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \lambda\} &\subseteq C\left(C_p\left(X_\pi\right)\right) \text{ y} \\ C\left(C_p\left(D(2)^\lambda\right)\right) &\subseteq \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \lambda\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C(C_p(X_\pi)) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \lambda\}$. $\square$

Arhangel'skiĭ y Tkachuk demostraron en [7] que si X es un espacio compacto de Hausdorff y $\text{cf}(w(X)) > \omega$, entonces $\text{cf}(w(X))$ no es un calibre para $C_p(X)$. Este resultado es útil para comprobar que la restricción sobre el i -peso del espacio es necesaria en la proposición 7.5.6:

Proposición 7.5.7. *Si X un espacio compacto de Hausdorff no trivial y λ es un cardinal infinito con $\text{cf}(w(X)) > \lambda$, entonces*

$$\{w(X), \text{cf}(w(X))\} \subseteq \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \lambda\} \setminus C\left(C_p(X^\lambda)\right).$$

Demostración. Claramente, tanto $w(X)$ como $\text{cf}(w(X))$ pertenecen a $\{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \lambda\}$. Por otra parte, $w(X^\lambda) = \lambda \cdot w(X) = w(X)$ (véase [36, Cap. 5]); en particular, X^λ es un espacio compacto de Hausdorff con $\text{cf}(w(X^\lambda)) = \text{cf}(w(X)) > \lambda \geq \omega$ y, por consiguiente, $\text{cf}(w(X))$ no es un calibre para $C_p(X^\lambda)$ por el teorema de Arhangel'skii y Tkachuk. Finalmente, la proposición 2.2.1 garantiza que $w(X)$ tampoco es un calibre para $C_p(X^\lambda)$. $\square$

Por ejemplo, para cualquier cardinal infinito κ , κ^+ es un elemento de $\{\mu \in \text{CN} : \text{cf}(\mu) > \kappa\}$ y no es un calibre para $C_p([0, \kappa^+]^\kappa)$. Así, la restricción $i w(X) \leq \lambda$ es indispensable en la proposición 7.5.6.

7.6. Calibres de $C_p(X)$ cuando X es una suma topológica

Para una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ emplearemos el símbolo X_s para denotar la suma topológica $\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$. El propósito de esta sección es obtener resultados al respecto de la colección $C(C_p(X_s))$.

Una primera observación es que, por un teorema clásico de dualidad (véase [4]), $C_p(X_s)$ es homomorfo al producto topológico $\prod_{\alpha < \lambda} C_p(X_\alpha)$. Por lo tanto, los resultados conocidos acerca de la preservación de calibres en los productos son útiles para determinar las condiciones de cadena de $C_p(X_s)$. El siguiente corolario es una consecuencia del corolario 2.2.9 y el teorema 2.8.12.

Corolario 7.6.1. *Sean κ un cardinal infinito, λ un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios topológicos y X un espacio topológico.*

1. $\text{UR} \cap \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha)) \subseteq C(C_p(X_s)) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha))$.
2. Si $\lambda < \text{cf}(\kappa)$ y $\kappa \in \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha))$, entonces $\kappa \in C(C_p(X_s))$.
3. $C(C_p(X)) = C(C_p(X \times D(\lambda)))$.

Una pregunta natural es bajo qué condiciones se satisface que

$$C(C_p(X_s)) = \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha)). \quad (7.6)$$

Para ciertas clases de espacios no es difícil comprobar que la relación (7.6) siempre se verifica.

Proposición 7.6.2. Si λ es un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios discretos, entonces

$$C(C_p(X_s)) = \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha)).$$

Demostración. Si $\mu := \lambda \cdot \sup \{|X_\alpha| : \alpha < \lambda\}$, entonces

$$C_p(X_s) \cong \prod_{\alpha < \lambda} C_p(X_\alpha) \cong \prod_{\alpha < \lambda} \mathbb{R}^{X_\alpha} \cong \mathbb{R}^\mu$$

y, por ende, la proposición 4.2.10 implica que

$$C(C_p(X_s)) = C(\mathbb{R}^\mu) = UC = \bigcap_{\alpha < \lambda} C(\mathbb{R}^{X_\alpha}) = \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha)).$$

□

Ahora, con el objetivo de proveer un resultado en este sentido para los espacios particulares que presentamos en las secciones anteriores, a continuación expondremos un teorema nuevo al respecto de la preservación de las condiciones de cadena en productos topológicos. Lo primero que haremos será demostrar un lema auxiliar.

Lema 7.6.3. Sean κ un cardinal infinito con $\text{cf}(\kappa) > \omega$, λ un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios topológicos. Sean $\mu < \text{cf}(\kappa)$ un número cardinal y $\{Y_\beta : \beta < \mu\}$ una familia de espacios topológicos que satisfacen las siguientes condiciones:

1. para cualquier $\alpha < \lambda$, existe $\beta < \mu$ con $X_\alpha \cong Y_\beta$;
2. para toda $\beta < \mu$, existe $\alpha < \lambda$ tal que $Y_\beta \cong X_\alpha$, y
3. cuando $\beta < \gamma < \mu$, Y_β no es homeomorfo a Y_γ .

Entonces, si $A \in \{C, P, WP\}$, la condición $\kappa \in \bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha)$ implica $\kappa \in A(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha)$.

Demostración. Si para cada $\beta < \mu$ definimos $J_\beta := \{\alpha < \lambda : X_\alpha \cong Y_\beta\}$ y $Z_\beta := Y_\beta^{|J_\beta|}$, entonces claramente $\{J_\beta : \beta < \mu\}$ es una partición de λ y

$$\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha \cong \prod_{\beta < \mu} \left(\prod_{\alpha \in J_\beta} X_\alpha \right) \cong \prod_{\beta < \mu} Z_\beta.$$

Luego, como $\kappa \in \bigcap_{\beta < \mu} A(Y_\beta)$, por el teorema 2.8.12(3) se satisface que $\kappa \in A(Z_\beta)$ siempre que $\beta < \mu$ y, por ende, el teorema 2.8.12(2) implica que $\kappa \in A(\prod_{\beta < \mu} Z_\beta)$. □

Proposición 7.6.4. *Los siguientes enunciados son equivalentes para $A \in \{C, P, WP\}$.*

1. *Si λ es un número cardinal, $\{\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es un subconjunto de CN y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos que satisfacen las siguientes condiciones para cualesquiera $\alpha < \lambda$ y $\beta < \lambda$:*

$$(a) \ A(X_\alpha) = \{\kappa \in CN : cf(\kappa) > \lambda_\alpha\}, \text{ y}$$

$$(b) \text{ si } \lambda_\alpha = \lambda_\beta, \text{ entonces } X_\alpha \cong X_\beta,$$

$$\text{entonces } \bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha) = A\left(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha\right).$$

2. *Si λ es un número cardinal, $\{\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es un subconjunto de CN y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia de espacios topológicos que satisfacen las siguientes condiciones para cualquier $\alpha < \lambda$:*

$$(a) \ A(X_\alpha) = \{\kappa \in CN : cf(\kappa) > \lambda_\alpha\}, \text{ y}$$

$$(b) \ \{\lambda_\beta : \beta < \lambda\} \text{ es estrictamente creciente,}$$

$$\text{entonces } \bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha) = A\left(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha\right).$$

Demostración. Para ver que (1) implica (2) supongamos que las condiciones (2)(a) y (2)(b) son ciertas. Nuestro objetivo es demostrar que (1)(b) es cierta también. En efecto, si $\alpha < \lambda$ y $\beta < \lambda$ cumplen $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$, entonces (2)(b) implica que $\alpha = \beta$ y, por lo tanto, $X_\alpha = X_\beta$; en particular, $X_\alpha \cong X_\beta$.

Para ver que (2) implica (1) supongamos que las condiciones (1)(a) y (1)(b) se cumplen. Sea $\{\mu_\beta : \beta < \mu\}$ una enumeración estrictamente creciente de $\{\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Para cada $\beta < \mu$ sea $J_\beta := \{\alpha < \lambda : \lambda_\alpha = \mu_\beta\}$. Además, sea $f : \mu \rightarrow \lambda$ una función de tal manera que $f(\beta) \in J_\beta$ para toda $\beta < \mu$. Claramente, $\{J_\beta : \beta < \mu\}$ es una partición de λ .

Ahora, notemos que si $\beta < \mu$, entonces

$$A(X_{f(\beta)}) = \{\kappa \in CN : cf(\kappa) > \lambda_{f(\beta)}\} = \{\kappa \in CN : cf(\kappa) > \mu_\beta\}.$$

Para cada $\beta < \mu$ sea $Z_\beta := (X_{f(\beta)})^{J_\beta}$. Resulta entonces que

$$A(Z_\beta) = \{\kappa \in CN : cf(\kappa) > \mu_\beta\}$$

por el teorema 2.8.12(3). En consecuencia, el inciso (2) implica que $\bigcap_{\beta < \mu} A(Z_\beta) = A\left(\prod_{\beta < \mu} Z_\beta\right)$. Finalmente, como

$$\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha \cong \prod_{\beta < \mu} \left(\prod_{\alpha \in J_\beta} X_\alpha \right) \cong \prod_{\beta < \mu} Z_\beta \quad \text{y} \quad \bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha) = \bigcap_{\beta < \mu} A(Z_\beta),$$

obtenemos que $\bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha) = A\left(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha\right)$. □

Resulta que para familias de espacios como los que menciona la proposición 7.6.4, la ausencia de cardinales en $\bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha)$ con cofinalidad débilmente inaccesible es suficiente para garantizar que $\bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha) = A(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha)$.

Teorema 7.6.5. Sean $A \in \{C, P, WP\}$, $\{\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\}$ y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ como en la proposición 7.6.4(1). Si $\text{cf}(\kappa)$ no es débilmente inaccesible para cualquier $\kappa \in \bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha)$, entonces $\bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha) = A(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha)$.

Demostración. Observemos que, como la contención $\bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha) \supseteq A(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha)$ siempre se satisface, únicamente necesitamos demostrar la inclusión $\bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha) \subseteq A(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha)$. Sea κ un elemento de $\bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha)$ y supongamos que κ no pertenece a $A(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha)$.

Sea $\sim$ la relación de equivalencia en λ definida mediante $\alpha \sim \beta$ si y sólo si $X_\alpha \cong X_\beta$. Si J un sistema completo de representantes para $\sim$, $\{X_\beta : \beta \in J\}$ satisface las condiciones (1), (2) y (3) del lema 7.6.3. Por lo tanto, la relación $\kappa \in \bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha) \setminus A(\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha)$ implica que $|J| \geq \text{cf}(\kappa)$.

Notemos ahora dos cosas: primero, la condición $\kappa \in \bigcap_{\alpha < \lambda} A(X_\alpha)$ garantiza que $\{\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \text{cf}(\kappa)$; segundo, si $\alpha, \beta \in J$ cumplen $\alpha \neq \beta$, entonces $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ porque X_α no es homeomorfo a X_β . De esta manera, $\{\lambda_\alpha : \alpha \in J\}$ es un subconjunto de $\text{cf}(\kappa)$ de cardinalidad $\text{cf}(\kappa)$ y, por ende, $\text{cf}(\kappa)$ es un cardinal débilmente inaccesible por el lema 1.2.7. $\square$

Corolario 7.6.6. Si no hay cardinales débilmente inaccesibles, entonces los enunciados de la proposición 7.6.4 se satisfacen.

Corolario 7.6.7. Sean λ un número cardinal, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios y $\{\lambda_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una colección de cardinales de tal forma que las siguientes condiciones se verifican para cualesquiera $\alpha < \lambda$ y $\beta < \lambda$:

1. $C(C_p(X_\alpha)) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \lambda_\alpha\}$, y
2. si $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$, entonces $C_p(X_\alpha) \cong C_p(X_\beta)$.

Si para cualquier $\kappa \in \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha))$ se satisface que $\text{cf}(\kappa)$ no es débilmente inaccesible, entonces

$$C(C_p(X_s)) = \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha)).$$

Es importante resaltar que por la proposición 7.5.5, si cada X_α es de la forma $D(2)^{\kappa_\alpha}$, entonces se satisfacen las condiciones (1) y (2) establecidas en el corolario 7.6.7. En estas circunstancias, si no existen cardinales débilmente inaccesibles, se cumple la relación (7.6).

No obstante, para ciertos casos particulares no es necesaria la hipótesis acerca de la no existencia de cardinales débilmente inaccesibles:

Lema 7.6.8. Sean λ un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios de tal forma que las siguientes condiciones se verifican para cualesquiera $\alpha < \lambda$ y $\beta < \lambda$:

1. $C(C_p(X_\alpha)) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > |X_\alpha|\}$ y
2. $\alpha < \beta < \lambda$ implica $|X_\alpha| \neq |X_\beta|$.

Bajo estas hipótesis,

$$C(C_p(X_s)) = \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha)).$$

Demostración. Sea $\kappa_\alpha := |X_\alpha|$ para cada $\alpha < \lambda$. Notemos que si $\kappa \in \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha))$, entonces $\text{cf}(\kappa) \in \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha))$ (véase la proposición 2.2.1) y, por ende, $\text{cf}(\kappa) \in C(C_p(X_s))$ por el corolario 7.6.1(1). Además, como $\{\kappa_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \text{cf}(\kappa)$, resulta que $\lambda = |\{\kappa_\alpha : \alpha < \lambda\}| \leq \text{cf}(\kappa)$ y $\sup\{\kappa_\alpha : \alpha < \lambda\} \leq \text{cf}(\kappa)$. Finalmente, las relaciones

$$\pi_w(C_p(X_s)) = |X_s| = \lambda \cdot \sup\{\kappa_\alpha : \alpha < \lambda\} \leq \text{cf}(\kappa) \leq \kappa$$

implican $\kappa \in C(C_p(X_s))$ en virtud de la proposición 2.2.3. $\square$

Proposición 7.6.9. Sean λ un número cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de espacios de tal forma que las siguientes condiciones se verifican para cualesquiera $\alpha < \lambda$ y $\beta < \lambda$:

1. $C(C_p(X_\alpha)) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > |X_\alpha|\}$;
2. $X_\alpha \cong X_\beta$ siempre que $|X_\alpha| = |X_\beta|$, y
3. si $I_\alpha := \{\gamma < \lambda : |X_\gamma| = |X_\alpha|\}$, entonces $|X_\alpha| \cdot |I_\alpha| = |X_\alpha|$.

Bajo estas hipótesis,

$$C(C_p(X_s)) = \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha)).$$

Demostración. Sean $\lambda_\alpha := |I_\alpha|$ y $\kappa_\alpha := |X_\alpha|$ para toda $\alpha < \lambda$. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en λ determinada mediante la regla $\alpha \sim \beta$ si y sólo si $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$. Observemos que si J es un sistema completo de representantes para $\sim$ y $X_J := \bigoplus_{\alpha \in J} (X_\alpha \times D(\lambda_\alpha))$, entonces $C_p(X_s) \cong C_p(X_J)$. Además, para cualquier $\alpha \in J$ el corolario 7.6.1(3) y el inciso (3) constatan que

$$\begin{aligned} C(C_p(X_\alpha \times D(\lambda_\alpha))) &= C(C_p(X_\alpha)) = \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \kappa_\alpha\} \\ &= \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > \kappa_\alpha \cdot \lambda_\alpha\} \\ &= \{\kappa \in \text{CN} : \text{cf}(\kappa) > |X_\alpha \times D(\lambda_\alpha)|\}. \end{aligned}$$

También, si $\alpha, \beta \in J$ son distintos, entonces $|X_\alpha \times D(\lambda_\alpha)| = \kappa_\alpha \cdot \lambda_\alpha = \kappa_\alpha \neq \kappa_\beta = \kappa_\beta \cdot \lambda_\beta = |X_\beta \times D(\lambda_\beta)|$. Por lo tanto, el corolario 7.6.1 y el lema 7.6.8 garantizan que

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha)) &\subseteq \bigcap_{\alpha \in J} C(C_p(X_\alpha)) = \bigcap_{\alpha \in J} C(C_p(X_\alpha \times D(\lambda_\alpha))) \\ &= C(C_p(X_J)) = C(C_p(X_s)) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha)). \end{aligned}$$

□

El siguiente corolario es consecuencia de la proposición 7.3.2, el teorema 7.4.6 y la proposición 7.6.9.

Corolario 7.6.10. Sean λ un número cardinal y $\{\kappa_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de cardinales distintos dos a dos. Si cada X_α es de la forma $[0, \kappa_\alpha]$, $[0, \kappa_\alpha]$, $L(\omega, \kappa_\alpha)$ ó $L(\omega_1, \kappa_\alpha)$, entonces

$$C(C_p(X_s)) = \bigcap_{\alpha < \lambda} C(C_p(X_\alpha)).$$

Para concluir este trabajo presentamos un ejemplo para constatar que, en general, la igualdad (7.6) no necesariamente es cierta. Le recomendamos al lector consultar la sección 7.4 para estar familiarizado con la notación.

Lema 7.6.11. Si κ y λ son cardinales con $\omega \leq \lambda \leq \kappa$ y $\text{cf}(\lambda) > \omega$, entonces para cualquier $f \in C_p(L(\lambda, \kappa))$ existe un subconjunto abierto U de $L(\lambda, \kappa)$ con $\kappa \in U$ y $f[U] = \{f(\kappa)\}$.

Demostración. Observemos que para cada $n < \omega$ el conjunto $U_n := f^{-1}[B_{2^{-n}}(f(\kappa))]$ es abierto en $L(\lambda, \kappa)$ y $\kappa \in U_n$. Luego, como la relación $\text{cf}(\lambda) > \omega$ implica que $U := \bigcap_{n < \omega} U_n$ satisface $|L(\lambda, \kappa) \setminus U| = |\bigcup_{n < \omega} L(\lambda, \kappa) \setminus U_n| < \lambda$, entonces U es abierto en $L(\lambda, \kappa)$, $\kappa \in U$ y $f[U] = \{f(\kappa)\}$. □

Proposición 7.6.12. Sean κ y λ un par de cardinales con $\kappa > \lambda > \text{cf}(\kappa) > \omega$ y $\text{cf}(\lambda) > \omega$. Además, sea $\{\kappa_\alpha : \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ una (κ, λ) -sucesión. Con estos antecedentes,

$$\kappa \in \bigcap_{\alpha < \text{cf}(\kappa)} C(C_p(L(\lambda, \kappa_\alpha))) \setminus C\left(C_p\left(\bigoplus_{\alpha < \text{cf}(\kappa)} L(\lambda, \kappa_\alpha)\right)\right).$$

Demostración. Para cada $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ sea $X_\alpha := L(\lambda, \kappa_\alpha) \times \{\alpha\}$. En virtud de que $\text{cf}(\kappa) > \omega$, $\text{cf}(\kappa) < \lambda$ y $\kappa_\alpha < \kappa$ para cualquier $\alpha < \text{cf}(\kappa)$, el teorema 7.4.6 garantiza que κ es un calibre para cada $C_p(X_\alpha)$. Para verificar que κ no es un calibre para $C_p(X_s)$, sean $J_0 := [0, \kappa_0]$ y $J_\alpha := [\kappa_\alpha, \kappa_{\alpha+1})$ siempre que $\alpha < \text{cf}(\kappa)$. Además, para toda $\xi < \kappa$ sea $\alpha(\xi) < \text{cf}(\kappa)$ el único ordinal tal que $\xi \in J_{\alpha(\xi)}$.

Ahora, para cada $\xi < \kappa$ sea $f_\xi : X_s \rightarrow \mathbb{R}$ la función continua dada por $f_\xi[X_s \setminus X_{\alpha(\xi)+1}] \subseteq \{1\}$ y si $\eta \in [0, \kappa_{\alpha(\xi)+1}]$, entonces

$$f_\xi(\eta, \alpha(\xi) + 1) := \begin{cases} 1, & \text{si } \eta = \xi, \\ 0, & \text{si } \eta \neq \xi. \end{cases}$$

También, sean $x_\xi := (\xi, \alpha(\xi) + 1)$ y $y_\xi := (\kappa_{\alpha(\xi)+1}, \alpha(\xi) + 1)$ siempre que $\xi < \kappa$. Consideremos la familia $\{V(f_\xi, \{x_\xi, y_\xi\}, 1/2) : \xi < \kappa\}$ y supongamos, en busca de una contradicción, que existen $J \in [\kappa]^\kappa$ y $f \in C_p(X_s)$ tales que $f \in \bigcap \{V(f_\xi, \{x_\xi, y_\xi\}, 1/2) : \xi \in J\}$.

Empleemos el lema 7.6.11 para encontrar un abierto $U_\alpha \subseteq L(\lambda, \kappa_\alpha)$ con $\kappa_\alpha \in U_\alpha$ y $f[U_\alpha \times \{\alpha\}] = \{f(\kappa_\alpha, \alpha)\}$, siempre que $\alpha < \text{cf}(\kappa)$. Nuestro objetivo es probar que $J \cap J_\alpha \subseteq L(\lambda, \kappa_{\alpha+1}) \setminus U_{\alpha+1}$ para cualquier $\alpha < \text{cf}(\kappa)$. Claramente, si $\alpha < \text{cf}(\kappa)$, $J \cap J_\alpha$ está contenido en $L(\lambda, \kappa_{\alpha+1})$. Por otra parte, si suponemos la existencia de $\xi \in J \cap J_\alpha \cap U_{\alpha+1}$, entonces la condición $\xi \in U_{\alpha+1}$ implica que $f(x_\xi) = f(y_\xi)$, mientras que la relación $\xi \in J \cap J_\alpha$ garantiza que

$$|f(x_\xi) - f_\xi(x_\xi)| = |f(x_\xi) - 1| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad |f(y_\xi) - f_\xi(y_\xi)| = |f(y_\xi)| < \frac{1}{2};$$

en consecuencia, $f(x_\xi) \neq f(y_\xi)$, una contradicción.

De esta manera, como para cada $\alpha < \text{cf}(\kappa)$ se satisface que $J \cap J_\alpha \subseteq L(\lambda, \kappa_{\alpha+1}) \setminus U_{\alpha+1}$, entonces $|J \cap J_\alpha| \leq |L(\lambda, \kappa_{\alpha+1}) \setminus U_{\alpha+1}| < \lambda$. Finalmente, obtenemos el absurdo $\kappa = |J| = |\bigcup_{\alpha < \text{cf}(\kappa)} J \cap J_\alpha| \leq \text{cf}(\kappa) \cdot \sup\{|J \cap J_\alpha| : \alpha < \text{cf}(\kappa)\} \leq \text{cf}(\kappa) \cdot \lambda = \lambda < \kappa$. En suma, κ no es un calibre para $C_p(X_s)$. $\square$

Bibliografia

- [1] S. Argyros, *Isomorphic embeddings of $\ell^1(\Gamma)$ in classical Banach spaces*, Doctoral Dissertation, Athens University, (In Greek), 1977.
- [2] S. Argyros, S. Mercourakis, S. Negrepontis, *Functional-analytic properties of Corson-compact spaces*, *Studia Mathematica*, **89(3)** (1988), 197–229.
- [3] S. Argyros, A. Tsarpalias, *Calibers of Compact Spaces*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **270** (1982), 149–162.
- [4] A. V. Arhangel'skiĭ, *Topological function spaces*, Kluwer academic publishers, *Mathematics and its Applications*, vol. 78, 1992.
- [5] A. V. Arhangel'skiĭ, V. I. Ponomarev, *On dyadic bicomacta*, *Soviet Math. Dokl.*, **9** (1968), 1220–1223.
- [6] A. V. Arhangel'skiĭ, M. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis press, *Atlantis studies in mathematics*, 2008.
- [7] A. V. Arhangel'skiĭ, V. V. Tkachuk, *Calibers and point-finite cellularity of the space $C_p(X)$ and some questions of S. Gul'ko and M. Husek*, *Topol. Appl.*, **23** (1986), 65–73.
- [8] B. S. Bailey, *I -weight of compact and locally compact LOTS*, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **48(4)** (2007), 677–688.
- [9] B. S. Bailey, *i -weight, special base properties and related covering properties*, Doctoral dissertation, Graduate Faculty of Auburn University, 2005.
- [10] B. Balcar, F. Franěk, *Independent families in complete Boolean algebras*, *Trans. Am. Math. Soc.*, **274(2)** (1982), 607–618.

- [11] H. R. Bennett, D. J. Lutzer, *Separability, the countable chain condition and the Lindelöf property in linearly orderable spaces*, Proc. Am. Math. Soc., **23(3)** (1969), 664–667.
- [12] G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Math. Annalen **20**, (1882) 113–121.
- [13] F. Casarrubias Segura, Á. Tamariz Mascarúa, *Elementos de topología general*, Aportaciones matemáticas, Serie *Textos*, núm. 37, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2023.
- [14] F. S. Cater, P. Erdős, F. Galvin, *On the density of λ -box products*, Gen. Topol. Appl., **9(3)** (1978), 307–312.
- [15] W. W. Comfort, I. S. Gotchev, *Cardinal invariants for κ -box products: weight, density character and Suslin number*, Dissertationes Mathematicae, **516** (2016), 1–41.
- [16] W. W. Comfort, S. Negrepointis, *Chain conditions in topology*, Cambridge University Press, 1982.
- [17] E. van Douwen, *The Pixley–Roy topology on spaces of subsets*, Set-theoretic topology (G. M. Reed, ed.), pp. 111–134, 1977.
- [18] A. Dow, I. Juhász, *Weight, net weight, and elementary submodels*, Topol. Appl., **373** (2025), 109469.
- [19] B. Efimov, *Solution of some problems on dyadic bicomacta*, Soviet Math. Dokl., **10** (1968), 776–779.
- [20] R. Engelking, *General topology*, Sigma series in pure mathematics, Heldermann, vol. 6, 1989.
- [21] R. Engelking, *On functions defined on cartesian products*, Fundam. Math., **59(2)** (1966), 221–231.
- [22] P. Erdős, A. Hajnal, A. Máté, R. Rado, *Combinatorial set theory: partition relations for cardinals*, North Holland, 1984.
- [23] D. H. Fremlin, *Consequences of Martin's Axiom*, Cambridge University Press, **84**, 1984.
- [24] J. A. Gallardo Quiroz, *El principio combinatorio de Jensen*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

- [25] F. Galvin, *Chain conditions and products*, Fundam. Math., **108**(1) (1980), 33–48.
- [26] J. Gerlits, *On a generalization of dyadicity*, Studia Sci. Math. Hungar., **13** (1978), 1–17.
- [27] J. Gerlits, Z. S. Nagy, *Some properties of $C(X)$, I*, Topol. Appl., **14**(2) (1982), 151–161.
- [28] A. M. Gleason, *Projective topological spaces*, Illinois J. Math, **2** (1958), 482–489.
- [29] A. Hajnal, I. Juhász, *When is a Pixley–Roy hyperspace ccc?*, Topol. Appl., **13** (1982), 33–41.
- [30] L. J. Halbeisen, *Combinatorial set theory. With a gentle introduction to forcing*, Springer monographs in mathematics, Springer-Verlag London, 2012.
- [31] F. Hernández Hernández, *Teoría de conjuntos: una introducción*, 2.^a ed., Aportaciones matemáticas, Serie Textos, núm. 13, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.
- [32] R. Hodel, *Cardinal functions I*, Handbook of set-theoretic topology (K. Kunen y J. E. Vaughan, eds.), pp. 1–61, 1984.
- [33] R. E. Hodel, J. E. Vaughan, *Reflection theorems for cardinal functions*, Topol. Appl., **100** (2000), 47–66.
- [34] R. B. Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, Ann. Math. Logic, **4**(3) (1972), 229–308.
- [35] W. B. Johnson, *On Continuous Images of Cantor Spaces*, Am. Math. Mon., **75**(8) (1968), 869–871.
- [36] I. Juhász, *Cardinal functions in topology - Ten years later*, Math. Centre Tracts, vol. 123, 1980.
- [37] I. Juhász, S. Shelah, *Generic left-separated spaces and calibers*, Topol. Appl., **132** (2003), 103–108.
- [38] I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy, *The class $C(\omega_1)$ and countable net weight*, Topol. Appl., **364** (2025), 109106.
- [39] N. D. Kalamidas, G. D. Spiliopoulos, *Compact sets in $C_p(X)$ and calibers*, Canadian Mathematical Bulletin, **35** (1992), 497–502.
- [40] K. Kunen, *Set theory*, Studies in logic and foundations, London college publications, vol. 34, 2013.

- [41] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland publishing Co., vol. 102, 1980.
- [42] K. Kunen, F. D. Tall, *Between Martin's Axiom and Souslin's Hypothesis*, Fundam. Math., **102** (1979), 173–181.
- [43] D. Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Publ. Math. Univ. Belgrade, **4** (1935), 1–138.
- [44] D. Kurepa, *La condition de Souslin et une propriété caractéristique des nombre réels*, C. R. Acad. Paris, **231** (1950), 1113–1114.
- [45] D. J. Lutzer, *Pixley–Roy topology*, Topology Proceedings, **3** (1978), 139–158.
- [46] J. Mack, S. A. Morris, E. T. Ordman, *Free topological groups and the projective dimension of a locally compact abelian group*, Proc. Am. Math. Soc., **40**(1) (1973), 303–308.
- [47] A. Marsh, *Topology of function spaces*, Doctoral dissertation, University of Pittsburgh, 2004.
- [48] T. Matos Wiederhold, *Aplicaciones del Lema de Rasiowa-Sikorski a la teoría de órdenes parciales y a la teoría de Ramsey*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2020.
- [49] D. W. McIntyre, *A regular countable chain condition space without compact-caliber* (ω_1, ω), Ann. New York Acad. Sci. **704**(1) (2006), 269–272.
- [50] A. W. Miller, *Descriptive Set Theory and Forcing: How to Prove Theorems about Borel Sets the Hard Way*, Lecture Notes in Logic, Cambridge University Press, 2017.
- [51] J. T. Moore, *A Solution to the L-space problem*, J. Am. Math. Soc., **19**(3) (2006), 717–736.
- [52] J. T. Moore, *A Solution to the L-space problem and related ZFC constructions*, (2005), <https://arxiv.org/abs/math/0501524v1>.
- [53] C. Pixley, P. Roy, *Uncompletable Moore spaces*, Proc. Auburn Univ. Conf. (W. R. R. Transue, ed.), pp. 75–85, 1969.
- [54] J. R. Porter, R. G. Woods, *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces*, Springer-Verlag New York, 1988.

- [55] F. de J. Prieto Lara, *Una introducción a las funciones cardinales topológicas*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2024.
- [56] A. Primavesi, *Guessing Axioms, Invariance and Suslin Trees*, PhD thesis, University of East Anglia, 2011.
- [57] A. Ríos Herrejón, *Singular precalibers for topological products*, Topol. Appl., **317** (2022), 108190.
- [58] A. Ríos Herrejón, *Weakly Separated Spaces and Pixley–Roy Hyperspaces*, Bull. Iran. Math. Soc., (2023) 49:58, DOI: <https://doi.org/10.1007/s41980-023-00800-9>.
- [59] A. Ríos Herrejón, Á. Tamariz Mascarúa, *Some notes on topological calibers*, Coll. Math., **174(2)** (2023), 257–283.
- [60] N. M. Roy, *Is the product of ccc spaces a ccc space?*, Publicacions Matemàtiques, **33** (1989), 173–183.
- [61] M. E. Rudin, *A normal hereditarily separable non-Lindelöf space*, Ill. J. Math., **16(4)** (1972), 621–626.
- [62] M. Sakai, *Cardinal functions of Pixley–Roy hyperspaces*, Topol. Appl., **159** (2012), 3080–3088.
- [63] S. Sakai, *Cardinal functions on Pixley–Roy hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **89(2)** (1983), 336–340.
- [64] N. A. Šanin, *A theorem from the general theory of sets*, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS **53** (1946), 399–400.
- [65] N. A. Šanin, *On intersection of open subsets in the product of topological spaces*, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS **53** (1946), 503–506.
- [66] N. A. Šanin, *On the product of topological spaces*, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS **53** (1946), 595–598.
- [67] N. A. Šanin, *On the product of topological spaces*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **24** (1948), 1–112.
- [68] B. Šapirovsĭĭ, *On discrete subspaces of topological spaces; weight, tightness and Suslin number*, Soviet Math. Dokl., **13** (1972), 215–219.
- [69] D. B. Shakhmatov, *A direct proof that every infinite compact group G contains $\{0, 1\}^{w(G)}$* , Ann. New York Acad. Sci., **728** (1994), 276–283.

- [70] D. B. Shakhmatov, *Precalibers of σ -compact topological groups*, Mat. Zametki, **39(6)** (1986), 859–868.
- [71] S. Shelah, *Remarks on cardinal invariants in topology*, Gen. Topol. Appl., **7(3)** (1977), 251–259.
- [72] J. R. Shoenfield, *Martin's axiom*, Am. Math Monthly, **82** (1975), 610–617.
- [73] M. M. Souslin, *Problème 3*, Fundam. Math., **1** (1920), 223–224.
- [74] L. A. Steen, J. A. Seebach, *Counterexamples in topology*, 2.^a ed., Springer-Verlag New York, 1978.
- [75] F. D. Tall, *The countable chain condition versus separability — Applications of Martin's axiom*, Gen. Topol. Appl., **4** (1974), 315–339.
- [76] F. D. Tall, *First countable spaces with caliber $\aleph_1$ may or may not be separable*, Set-theoretic topology (G. M. Reed ed.), Academic Press, New York, pp. 353–358, 1977.
- [77] M. G. Tkachenko, *Chains and Cardinals*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **239(3)** (1978), Soviet Math. Dokl., **19(2)** (1978) (English translation), 382–385.
- [78] M. G. Tkachenko, *Factorization theorems for topological groups and their applications*, Topol. Appl., **38** (1991), 21–37.
- [79] M. G. Tkachenko, *Introduction to topological groups*, Topol. Appl., **86(3)** (1998), 179–231.
- [80] M. G. Tkachenko, *Souslin property in free topological groups on bicomacta*, Mat. Zametki, **34(4)** (1983), 601–607.
- [81] V. V. Tkachuk, *A C_p -theory problem book. Compactness in function spaces*, Problem books in mathematics, Springer-Verlag New York, 2015.
- [82] V. V. Tkachuk, *A C_p -theory problem book. Functional equivalences*, Problem books in mathematics, Springer-Verlag New York, 2016.
- [83] V. V. Tkachuk, *A C_p -theory problem book. Special features of function spaces*, Problem books in mathematics, Springer-Verlag New York, 2014.
- [84] V. V. Tkachuk, *A C_p -theory problem book. Topological and function spaces*, Problem books in mathematics, Springer-Verlag New York, 2011.
- [85] V. V. Tkachuk, *Approximation of $\mathbb{R}^X$ with countable subsets of $C_p(X)$ and calibers of the space $C_p(X)$* , Comm. Math. Univ. Carolin., **27(2)** (1986), 267–276.

- [86] V. V. Tkachuk, *Lindelöf Σ -spaces: an omnipresent class*, RACSAM, **104** (2) (2010), 221–244.
- [87] S. Todorčević, *Forcing positive partition relations*, Trans. Amer. Math. Soc., **280**(2) (1983), 703–720.
- [88] S. Todorčević, *Remarks on chain conditions in products*, Compos. Math., **55**(3) (1985), 295–302.
- [89] S. Todorčević, *Remarks on cellularity in products*, Compos. Math., **57**(3) (1986), 357–372.
- [90] M. L. Wage, *Homogeneity of Pixley–Roy spaces*, Topol. Appl, **28** (1988), 45–57.
- [91] R. C. Walker, *The Stone–Čech compactification*, Springer-Verlag, 1974.
- [92] R. G. Wilson, R. Benitez, *Topología general*, Trillas, 2017.

Tabla de símbolos

$(P, \leq)$, 14	$X(P)$, 60
(X, τ) , 7	$X \cap Y$, 1
$(\leftarrow, y)$, 3	$X \cong Y$, 8
$(\leftarrow, y]$, 3	$X \cup Y$, 1
$(x, \rightarrow)$, 3	$X(P^*)$, 60
(x, y) , 3	$X \setminus Y$, 1
$(x, y]$, 3	X^λ , 2
(x_a) , 2	X_M , 168
$C(\kappa)$, 136	X_s , 187
$C_p(X)$, 165	$[F, S]$, 133
$C_{p,n}(X)$, 167	$[X]^{<\kappa}$, 2
$D(\kappa)$, 8, 105, 108, 175, 177, 188	$[X]^{<\leq \kappa}$, 2
$J(\kappa)$, 172, 174	$[X]^\kappa$, 2
$L(X)$, 10	$[x, \rightarrow)$, 3
$L(\lambda, \kappa)$, 177, 179, 182, 183, 192	$[x, y)$, 3
$L^*(X)$, 158	$[x, y]$, 3
$P(\kappa, X)$, 49	$A(\kappa)$, 59
P^* , 60	$\text{AR}(X)$, 7, 61, 63
$R(X)$, 141, 143, 145–147, 149, 150, 152, 153, 162, 164	$\text{AR}(X)^+$, 61
$R^*(X)$, 145	$C(X)$, 9, 26, 28–34, 36, 41–44, 46, 48, 55, 62, 63, 86, 88, 91, 93, 101, 108, 110, 112, 117, 118, 122, 124, 129, 135, 139, 156, 157, 166, 167, 169, 175, 183, 186–192
T_1 , 7	$\text{CA}(X)$, 7
T_2 , 7	CN , 3
T_3 , 7	
T_4 , 7	
$V(f, A, \varepsilon)$, 165	
$WP(\kappa, X)$, 49	

$C^*(X)$, 100–103, 106–108, 110, 112, 113, 117–119, 122–124, 129	$\kappa \rightarrow (\lambda)_v^\mu$, 82
$\mathcal{F}(X)$, 133	κ^+ , 2
$\mathcal{F}[X]$, 133	$\log(\kappa)$, 39, 40, 110, 142, 169
$G(X)$, 61–63, 77, 89	$\mathbb{L}$, 32
ON , 3	$\mathbb{N}$, 2
$P(X)$, 9, 26, 31–34, 36, 55, 62, 63, 88, 89, 101, 108, 110, 112, 117, 118, 124, 129, 135, 139, 156, 189, 190	$\mathbb{Q}$, 2
$P^*(X)$, 100–102, 106–108, 110, 112, 113, 117, 118, 123, 124, 129	$\mathbb{R}$, 2
$\mathcal{P}(X)$, 1	$\mathbb{S}$, 8, 87, 135, 138, 142, 170, 185
R , 3, 101	$\mathbb{Z}$, 2
$\Sigma(X, p)$, 12	$\mathcal{L}$, 33
$\Sigma_i(\kappa)$, 41	$\mathcal{S}(X)$, 143
UC , 3, 9, 31, 33, 39, 56, 82, 84–86, 88, 89, 91, 110, 112, 113, 117–119, 124, 135, 138, 139, 154, 156, 157, 166, 176, 188	c , 2, 3, 33, 59, 65, 71, 87, 92, 94, 95, 111–113, 120, 128, 138–140, 142–144, 169, 184, 185
UR , 3, 9, 55, 86, 89, 167, 187	H , 95
$WP(X)$, 9, 26, 31–34, 36, 55, 62, 88, 101, 108, 110, 112, 117, 118, 122, 124, 129, 135, 139, 156, 189, 190	$MA(\kappa)$, 65–67, 81, 85, 95, 96, 148
$WP^*(X)$, 100–104, 106–108, 110, 112, 117, 118, 122–124, 129	SCH , 131
$\aleph_a$, 2, 6, 10, 11, 15, 86, 95, 104, 107, 108, 113, 119, 122, 141, 159, 163, 170	SH , 78, 96
αX , 8, 85, 107, 128, 177	ZFC , 14, 27, 30, 59, 65, 77, 79, 81, 85, 91, 97, 105, 107, 119, 122, 148
βX , 8, 82, 83, 87, 112	ω , 2
$\bigcap \mathcal{A}$, 1	$\bar{A}$, 7
$\bigcup \mathcal{A}$, 1	$\bar{Y}^\omega$, 27
$\bigoplus_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, 8, 13, 35, 36, 88, 121, 137, 150, 187	$\phi^*(X)$, 11
$cf(\kappa)$, 2	$\pi w(X)$, 10, 24, 29, 30, 39, 42, 62, 86, 154
$\mathfrak{s}(P)$, 15	π_a , 2
$\mathfrak{s}(X)$, 10, 25–27, 39, 102, 109, 135	$\prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, 2, 12, 13, 37, 38, 40, 42, 47, 55, 58, 88, 127, 128, 130, 151–153, 155, 157, 184–186, 189, 190
$\chi(X)$, 10, 94	$\prod_{\alpha < \lambda}^{\text{fin}} P_\alpha$, 21
$\chi(x, X)$, 10	$\prod_{a \in S} X_a$, 2
$\diamond$, 79	$\psi(X)$, 10, 147
$\text{dom}(f)$, 1	$\psi(x, X)$, 10
$\text{img}(f)$, 1	$\mathcal{A} _Y$, 1, 35
$\text{int } A$, 7	$f _A$, 2
κX , 8	$\square_{\alpha < \lambda} X_\alpha$, 130
	$\text{st}(x, \mathcal{C})$, 83, 85
	$\sup X$, 3
	τ_X , 7
	$\tau_X(x)$, 7
	τ_X^+ , 7
	CH , 3, 77, 95, 110, 119

GCH, 3, 30, 40, 121, 127, 128, 153

$\mathbb{R}$, 143

$c(P)$, 15

$c(X)$, 10, 24–27, 29, 32–36, 57–60, 62, 64, 94,
96, 109, 110, 134, 145–148, 152,
159, 169

$c^*(X)$, 29

$d(P)$, 15

$d(X)$, 10, 12, 24, 26, 32, 34, 39, 40, 58, 62, 92,
93, 95, 109, 134, 140, 154, 158,
168

$dc(X)$, 159, 162, 163

$e(X)$, 10, 169

$f[A]$, 1

$f^{-1}[B]$, 1

$f^{-1}\{z\}$, 1

$f^\#$, 167

$hL(X)$, 10, 96, 134, 142, 159–161

$hd(X)$, 10, 93, 134, 140, 142, 158, 161

$hd_c(X)$, 158

$iw(X)$, 167–169, 184–187

$k(P)$, 15

$k(X)$, 10, 24–27, 102, 109

$liw(X)$, 169

$liw(x, X)$, 169

$nw(X)$, 10, 134, 139, 140, 142, 143,
146–148, 155, 157, 167

$o(X)$, 10

$p \mid q$, 14

$p \perp q$, 14

$p^\perp$, 60

$p^\dagger$, 60

$s(X)$, 10, 147

$t(X)$, 10, 92, 93

$t(x, X)$, 10

$w(X)$, 10, 62

$wL(X)$, 158–162

$w\check{s}(P)$, 15

$w\check{s}(X)$, 10, 24–27, 66, 102, 109

$^x Y$, 2

Índice analítico

- (κ, λ) -sucesión, 5
- C -encajado, 167, 175
- L -espacio, 91
- S -espacio, 91
- Δ -sistema, 4, 21, 38, 51–53, 70, 177, 180
- Σ -producto, 12, 39, 78, 106, 154
- ω -cerradura, 27
- ω -cubierta, 159
- ω -denso, 27
- π -peso, 10, 24, 29, 30, 39, 42, 62, 86, 154
- i -peso, 167–169, 184–187
- i -peso local, 169
- k -espacio, 94, 158, 161–163

- altura, 141
- amplitud, 10, 147
- anchura, 141
- anticadena, 14
- Axioma de Martin, 65
- Axioma de Martin para κ , 65–67, 81, 85, 95, 96, 148

- base local, 9

- cadena en un preorden, 14
- calibre, 9, 24–38, 40, 42, 44, 46, 48, 55, 62, 63, 86, 90, 92, 93, 130, 135, 138, 156, 157, 161, 166–169, 174–176, 183, 185–187, 190–192
- calibre (κ, λ) , 46
- calibre en un preorden, 14
- calibre*, 100–103, 106, 107, 120, 121, 123, 129, 130
- cardinal débilmente compacto, 103
- cardinal débilmente inaccesible, 2, 6, 34, 109, 110, 128, 190
- cardinal fuertemente inaccesible, 3
- cardinal límite, 2
- cardinal límite fuerte, 2, 30
- cardinal regular, 2
- cardinal singular, 2
- cardinal sucesor, 2
- cardinalidad, 2
- carácter, 10, 94
- carácter local, 9
- celularidad, 10, 24–27, 29, 32–36, 57–60, 62, 64, 94, 96, 109, 110, 134, 145–148, 152, 159, 169
- celularidad discreta, 159, 162, 163
- celularidad en un preorden, 14
- clase de Tall, 95
- cofinalidad, 2
- compactación de Alexandroff, 8, 85, 107, 128, 177

- compactación de Stone-Čech, 8, 82, 83, 87, 112
- compactación de un espacio topológico, 8
- completamente separados, 170–172
- condensación, 8
- condición de la cadena contable, 8
- condición de la cadena contable discreta, 159
- condición de la cadena contable en un preorden, 14
- conjunto abierto canónico, 8
- conjunto abierto regular, 7
- conjunto centrado en un preorden, 14
- conjunto cerrado regular, 7
- conjunto cofinal, 3
- conjunto denso en un preorden, 14
- conjunto finito, 2
- conjunto ligado en un preorden, 14
- conjunto linealmente ordenado, 18
- conjunto numerable, 2
- conjunto parcialmente ordenado, 14
- conjunto potencia, 1
- conjunto preordenado, 13
- conjunto preordenado dual, 60
- cono en un preorden, 60
- cota inferior en un preorden, 14
- cota superior en un preorden, 14
- cuadrado lexicográfico, 33
- densidad, 10, 12, 24, 26, 32, 34, 39, 40, 58, 62, 92, 93, 95, 109, 134, 140, 154, 158, 168
- densidad en un preorden, 14
- densidad hereditaria, 10, 93, 134, 140, 142, 158, 161
- diferencia, 1
- dominio de una función, 1
- elemento maximal en un preorden, 14
- elemento minimal en un preorden, 14
- elemento máximo en un preorden, 14
- elemento mínimo en un preorden, 14
- elementos compatibles, 14
- elementos incompatibles, 14
- equipotente, 1
- erizo metrizable, 172, 174
- espacio H -cerrado, 26, 105
- espacio cero-dimensional, 7, 61, 68, 77, 89
- espacio cofinito, 117, 118, 122, 123, 142
- espacio compacto diádico, 89
- espacio compacto poliádico, 128
- espacio cósmico, 11, 110, 139, 142, 154, 163
- espacio de Šanin, 9, 86–89, 93, 94, 96
- espacio de Gleason, 61–63, 77, 89
- espacio discreto, 8, 105, 108, 175, 177, 188
- espacio débilmente Lindelöf, 158, 163
- espacio débilmente separado, 141, 142, 146–150, 152–154, 158, 162, 163
- espacio extremadamente desconexo, 7, 11, 61, 68, 77, 89, 128
- espacio fuertemente Šanin, 9, 86–89, 94, 96
- espacio hiperconexo, 113, 114, 116, 117
- espacio localmente H -cerrado, 26
- espacio semirregular, 7, 62
- espacio separado-derecho, 141
- espacio separado-izquierdo, 141
- espacio submetrizable, 90, 143, 170
- espacio topológico, 7
- estrechez, 10, 92, 93
- estrechez local, 9
- estrella de un punto, 83, 85
- extensión, 10, 169
- extensión λ -Lindelöf, 177, 179, 182, 183, 192
- extensión de un espacio topológico, 8
- familia ajena por pares, 1
- familia casi ajena, 111
- familia celular, 8, 25–27, 29, 31–37, 60–64, 66, 70, 73, 79, 87, 103–105, 109–111, 123, 130, 131, 134, 135, 138, 146–148, 159

- familia centrada, 8, 9, 23–26, 32, 48, 49, 53,
 54, 61, 66, 91, 99–101, 106, 112,
 114–116, 138
 familia compatible de funciones, 2, 38, 54
 familia con la propiedad de la intersección
 finita, 8
 familia de subconjuntos, 1
 familia discreta, 159
 familia elemental, 166
 familia ligada, 9, 16, 19, 23–26, 38, 48, 85,
 99–101, 103, 106, 114, 115, 124,
 125, 138
 fibra, 2
 filtro $\mathcal{D}$ -genérico, 65
 filtro en $\text{AR}(X)$, 61
 filtro en X , 115
 filtro en un preorden, 65
 filtro libre en X , 116
 función abierta, 8, 36, 53, 123, 130
 función biyectiva, 1
 función cardinal topológica, 9
 función cerrada, 8, 12, 63
 función continua, 8, 12, 36, 47, 48, 84, 87,
 89, 123, 136, 149, 165, 179, 181,
 182, 193
 función de elección, 2
 función dual, 167
 función inyectiva, 1
 función irreducible, 12, 63
 función restringida, 2
 función suprayectiva, 1

 grado de Lindelöf, 10
 grado de Lindelöf débil, 158–162
 grado de Lindelöf hereditario, 10, 96, 134,
 142, 159–161
 grupo topológico, 82

 Hipótesis de Souslin, 78, 96
 Hipótesis del Cardinal Singular, 131
 Hipótesis del Continuo, 3, 77, 95, 110, 119

 Hipótesis Generalizada del Continuo, 3, 30,
 40, 121, 127, 128, 153
 homeomorfismo, 8, 9, 33, 43, 77, 144, 146,
 147, 151, 154–158, 160, 188, 190

 imagen de una función, 1
 imagen directa, 2
 imagen inversa, 2
 intersección, 1

 Lema de Kuratowski-Zorn, 14, 62, 68, 134
 Lema del Δ -sistema, 4, 21, 38, 51–53, 70,
 177, 180
 Lindelöf Σ , 34, 82–85
 logaritmo, 39, 40, 110, 142, 169
 línea de Souslin, 78, 79, 96
 línea larga, 33

 número de Šanin, 10, 25–27, 39, 102, 109,
 135, 154
 número de Šanin débil, 10, 24–27, 66, 102,
 109
 número de Šanin débil en un preorden, 14
 número de Šanin en un preorden, 14
 número de Knaster, 10, 24–27, 102, 109
 número de Knaster en un preorden, 14
 número de separación débil, 141, 143,
 145–147, 149, 150, 152, 153, 162,
 164

 orden dual, 60

 pareja finitamente productiva, 126
 pareja productiva, 126
 peso, 10, 62
 peso red, 10, 134, 139, 140, 142, 143,
 146–148, 155, 157, 167
 precalibre, 9, 24–27, 29–38, 40, 55, 62, 63,
 66, 67, 130, 156, 166
 precalibre (κ, λ) , 48
 precalibre débil, 9, 24–27, 29–38, 55, 57, 62,
 63, 84, 85, 130, 156, 166
 precalibre débil (κ, λ) , 48

- precalibre débil en un preorden, 14
- precalibre en un preorden, 14
- precalibre*, 100–102, 106, 107, 120, 121, 123, 129, 130
- precalibre* débil, 100–103, 106, 107, 120, 121, 123, 125, 128–130
- producto caja, 130
- producto cartesiano, 2
- producto directo, 15
- producto directo con soporte finito, 21
- producto topológico, 8, 12, 13, 37, 38, 40, 42, 47, 55, 58, 88, 127, 128, 130, 151–153, 155, 157, 184–186, 189, 190
- propiedad de Knaster, 9
- propiedad de Knaster en un preorden, 14
- proyección canónica, 2
- pseudobase, 9
- pseudocarácter, 10, 147
- pseudocarácter local, 9
- raíz de un Δ -sistema, 4
- recta de Sorgenfrey, 8, 87, 135, 138, 142, 170, 185
- reflejo de una función cardinal, 93
- segmento inicial, 141
- separación débil, 141, 142, 144, 146, 147, 149–151, 153, 154, 162
- subproducto, 2
- subproducto finito, 2
- sucesión no trivial, 142
- suma topológica, 8, 13, 35, 36, 88, 121, 137, 150, 187
- topología, 7
- topología de la convergencia puntual, 165
- topología de los conos, 60
- topología de Pixley–Roy, 133
- topología producto, 8
- topología suma, 8
- traza, 1, 35
- ultrafiltro en $\text{AR}(X)$, 61
- ultrafiltro en X , 116
- unión, 1
- átomo en un preorden, 18



Instituto de
Matemáticas UNAM