

Exposiciones de matemáticas de la Universidad de Guadalajara

Compiladores:

María Elena Olivares Pérez
Luis Ángel Zaldívar Corichi

aportaciones **matemáticas**

electrónicas

am^e 2

Exposiciones de matemáticas de la Universidad de Guadalajara

Compiladores:

**María Elena Olivares Pérez
Luis Ángel Zaldívar Corichi**

Comité Editorial

Marcelo Aguilar González de la Vega *IM, UNAM*

José Luis Cisneros-Molina *IM, UNAM*

José Ma. González Barrios Murguía *IIMAS, UNAM*

Jesús González Espino Barros *CINVESTAV*

Luis Hernández Lamonedá *CIMAT*

Jorge León Vázquez *CINVESTAV*

Max Neumann Coto *IM, UNAM*

Laura Ortiz Bobadilla *IM, UNAM*

Sergio Rajsbaum Gorodezky *IM, UNAM*

Jorge X. Velasco Hernández *IM, UNAM*

Editores Ejecutivos

Juan José Montellano Ballesteros

Instituto de Matemáticas, UNAM

juancho@im.unam.mx

José Luis Cisneros-Molina

Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, UNAM

jlcm@matcuer.unam.mx

jlcisneros@im.unam.mx

Aportaciones Matemáticas
Electrónicas

Exposiciones de matemáticas de la Universidad de Guadalajara

Compiladores:

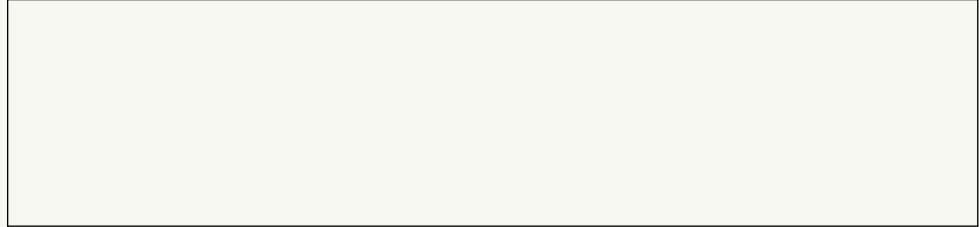
**María Elena Olivares Pérez
Luis Ángel Zaldívar Corichi**



aportaciones **matemáticas**
electrónicas



Ciudad de México, 2025



Compiladores:

María Elena Olivares Pérez

Luis Ángel Zaldívar Corichi

Universidad de Guadalajara

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Coordinación de Matemáticas

Blvd. Marcelino García Barragán 1421, esq Calzada Olímpica, módulo V, C.P. 44430

Guadalajara, Jalisco, México

1a. Edición, 2025

Colección *Aportaciones matemáticas electrónicas*, Núm. 2

Fecha de edición: enero de 2025

D.R. © 2025 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad Universitaria, Alcaldía de Coyoacán,

C.P. 04510, Ciudad de México.

ISBN: 978-607-30-9059-9 (Colección Aportaciones matemáticas electrónicas)

ISBN: 978-607-587-044-1 (Exposiciones de matemáticas de la Universidad de Guadalajara)

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

Edición:

Instituto de Matemáticas, UNAM

Av. Universidad 3000

04510, Ciudad de México

Aportaciones Matemáticas Electrónicas

Esta nueva colección tiene como propósito reflejar diferentes aspectos de la actividad matemática en México ofreciendo libros en formato electrónico editados en el Instituto de Matemáticas de la UNAM, concebidos para tener el máximo alcance posible hacia la comunidad matemática universitaria, nacional e internacional, dada la facilidad de difundir obras en este soporte.

Se consideran en esta colección tres tipos de publicaciones: textos orientados a estudiantes de licenciatura y posgrado, compilaciones dirigidas fundamentalmente al público mexicano, en cuyos libros se recogen trabajos presentados en reuniones nacionales u otros que contribuyan a la divulgación de temas específicos de matemáticas, e investigaciones que pueden incluir monografías sobre temas actuales o memorias de congresos internacionales y talleres de investigación.

Todos los trabajos propuestos para ser publicados en esta colección son sometidos a estricto arbitraje. Los libros electrónicos son una publicación de la UNAM a través del Instituto de Matemáticas, y algunos títulos cuentan con la colaboración de autores adscritos a instituciones tales como el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), el Centro de Investigación en Matemáticas (Cimat), la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM), el Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), entre otras, así como de diversas universidades en varios estados del país.

Reseña de *Exposiciones de matemáticas de la Universidad de Guadalajara*

La abstracción se puede considerar como un método mediante el cual se generaliza una idea para el entendimiento de alguna situación concreta; la matemática como filosofía es uno de los grandes exponentes de los varios usos de la abstracción.

La presente recopilación expone de manera sustancial los usos tangibles y no-tangibles de la abstracción matemática. El pasado verano se llevó a cabo la octava Escuela de Verano en Matemáticas, en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, en la cual se expusieron temas actuales de investigación en la matemática tales como teoría de grupos aplicada a la óptica, temas selectos de EDOS, algoritmo y autómatas celulares, topología sin-puntos, haces vectoriales y superficies de Riemann.

Esta distinta variedad de temas no sólo representa parte del trabajo que se ha estado haciendo en el Departamento de Matemáticas de CUCEI; tiene también como objetivo visibilizarlo como uno de los principales centros de investigación matemática del país.

En este compendio participan las y los profesores del Departamento de Matemáticas que dan servicio a la Licenciatura en Matemáticas, así como de los departamentos de Física, Ingeniería Química e Ingeniería Civil y Topografía del CUCEI, además del Departamento de Ciencias Naturales y Exactas del Centro Universitario de los Valles (CUValles).

En esta ocasión, se incrementó la participación de docentes y alumnos respecto al año pasado: fueron 45 profesores y profesoras que se involucraron en la impartición de los 11 minicursos de la Escuela de Verano, con la inscripción de poco más de cien estudiantes.

Esperamos que nuestra comunidad matemática crezca en número, así como en conocimiento profundo de temas actuales de la matemática, y, por supuesto, en desarrollo de habilidades que coadyuven a mejorar nuestra sociedad.

CONTENIDO

<i>Simulación numérica del intercambio térmico en cuerpos de agua</i>	1
Néstor García Chan, Tzitalali Gasca Ortiz, Jorge Manuel Montes Aréchiga, Diego Armando Pantoja González, Federico Angel Velázquez Muñoz	
<i>Autómatas celulares: teoría y algoritmos</i>	33
Alonso Castillo Ramírez, Luguís de los Santos Baños, María Guadalupe Magaña Chávez, Ramón Harath Ruiz Medina, Eduardo Veliz Quintero	
<i>Temas selectos de sistemas de EDOs</i>	71
Elba Lilia de la Cruz García, Luis Manuel Piñuelas Castro, Alexander Yakhno, Liliya Yakhno	
<i>Haces vectoriales y sus secciones</i>	89
Juan Manuel Márquez Bobadilla, O. Mata-Gutiérrez, Eduardo Reza Gurrola, María de la Paz Suárez Fernández	
<i>Optimización clásica vs optimización no clásica</i>	135
Miguel Ángel Alatorre Zamora, Fernando Ignacio Becerra López, Emilia Fregoso Becerra, Edgar Alejandro Guerrero Arroyo, Juan Antonio Licea Salazar, Mauricio Nava Flores, Abel Palafox González	
<i>Introducción a Varias Variables Complejas</i>	169
Celia Ávalos Ramos, Isidro Humberto Munive Lima y Sofía Ortega Castillo	
<i>Aplicaciones de Teoría de Grupos en óptica Cuántica</i>	185
Juan Jesús Díaz Guevara, Andrés García Sandoval, Omar Vladimir Macías Sandoval, Iván Fernando Valtierra Carranza	
<i>El campo de funciones meromorfas sobre superficies de Riemann</i>	217
Miriam Bocado Gaspar, Diego Rodríguez Guzman, Angel Zaldívar Corichi	
<i>Axiomas de separación en la categoría de marcos</i>	245
Juan Carlos Monter Cortés, Luis Ángel Zaldívar Corichi	
<i>Transformada de Fourier Discreta</i>	281
Ricardo Águila Gómez, Martín Muñoz Chávez, Alejandro Christopher Nava Téllez, María Elena Olivares Pérez, Ernesto Urenda Cazares	

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL INTERCAMBIO TÉRMICO EN CUERPOS DE AGUA

NÉSTOR GARCÍA CHAN, TZITLALI GASCA ORTIZ, JORGE MANUEL MONTES ARÉCHIGA,
DIEGO ARMANDO PANTOJA GONZÁLEZ, FEDERICO ANGEL VELÁZQUEZ MUÑOZ

RESUMEN. En este trabajo se presentan diferentes técnicas numéricas para abordar el problema de la contaminación térmica en diferentes cuerpos de agua y escalas. Así se presentan modelos matemáticos aplicados a lagos, ríos e incluso océanos. Para esto se presentan las ecuaciones en derivadas parciales del transporte, haciendo énfasis en su interpretación física. Posteriormente, su discretización numérica basada en diferencias finitas es formulada para los casos 1D y 2D. Finalmente diferentes aplicaciones son mostradas en diferentes escenarios donde se simula numéricamente la dispersión de contaminantes usando para esto tanto software científico como código de elaboración propia.

ABSTRACT. In this paper, different numerical techniques are formulated to show the thermal pollution in different water bodies and scales. Thus the presented models are applied to simulate the pollutant dispersion in lagoons, rivers, and oceans. To do it, we showed the partial differential equations related to transport and highlighted its physical interpretation. Later, its numerical discretization based on finite differences was formulated for 1D and 2D cases. Finally, applications in different realistic domains are shown where the pollutant dispersion is simulated using software and our code programming in scientific software.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35K05.

Palabras Claves. Diferencias finitas, Intercambio térmico, Transporte de calor en cuerpos de agua.

1. INTRODUCCIÓN

El problema del sobrecalentamiento de cuerpos de agua es un tema de estudio importante para mitigar los efectos dañinos al medio ambiente. Dicho sobrecalentamiento puede producirse de forma natural (como la presencia de emisiones de calor subterráneas) pero son más comunes las que se producen por acciones antropogénicas. Así es recurrente la instalación de sistemas de enfriamiento basados en la circulación o contacto de agua fría con una superficie que se desea enfriar, así por ejemplo reactores nucleares se suelen localizar cerca de grandes cuerpos de agua. Si bien dichos sistemas son necesarios rompen con el equilibrio térmico de su entorno perjudicando la flora y fauna. Para estudiar el impacto del sobrecalentamiento en cuerpos de agua los modelos matemáticos y la simulación numérica son herramientas básicas que nos permiten de forma barata una primer aproximación a su impacto, además, permiten definir estrategias para su mitigación. Por tanto modelos matemáticos como la ecuación de transporte junto al método de diferencias finitas con ampliamente usados para dicho fin. Así en este capítulo veremos las herramientas numéricas más conocidas para abordar este problema junto a modelos matemáticos en EDPs adecuados. Algunos ejemplos en ríos y dominios más amplios son estudiados con el objetivo de mostrar una primer aproximación al estudio de este problema medioambiental.

2. ECUACIÓN DE DIFUSIÓN.

2.1. Método de Euler adelantado. Muchos de los problemas en física pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales parabólicas que se resuelven para la incógnita $u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(x, t)u + d(x, t) \quad (2.1)$$

donde b es positivo. Se necesita una condición inicial dada en $t = 0$ es decir:

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad (2.2)$$

donde $u^0(x)$ es una función dada. La solución debe satisfacer la ecuación (2.1) para $t > 0$ y x en una región abierta R . La solución puede estar definida en una región cerrada y debe satisfacer ciertas condiciones de frontera, estas pueden involucrar a la variable en si u o a su primer derivada temporal $\partial u / \partial t$.

Si $x = 0$ es la frontera izquierda, la condición de frontera sería de la forma:

$$\alpha_0(t)u + \alpha_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2(t) \quad (2.3)$$

donde

$$\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \leq 0 \quad \text{y} \quad \alpha_0 - \alpha_1 > 0 \quad (2.4)$$

Y en la frontera derecha, $x = 1$ tenemos:

$$\beta_0(t)u + \beta_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} = \beta_2(t) \quad (2.5)$$

donde

$$\beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad \beta_0 + \beta_1 > 0 \quad (2.6)$$

Para aproximar la ecuación anterior por diferencias finitas, dividimos el dominio cerrado $\bar{R} \times [0, T_F]$ en un conjunto de líneas paralelas a los ejes x y t para formar una cuadrícula o malla.

Suponemos que las líneas están espaciadas por Δx y Δt . Las intersecciones

$$(x_i = i\Delta x, t_n = n\Delta t), i = 0, 1, \dots, I, n = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

donde $\Delta x = 1/I$, son llamados puntos de malla, un ejemplo se puede los puntos de malla se pueden ver en la Figura 1. La solución se obtendrá para cada punto de malla, es decir:

$$u_i^n \approx u(x_i, t_n) \quad (2.8)$$

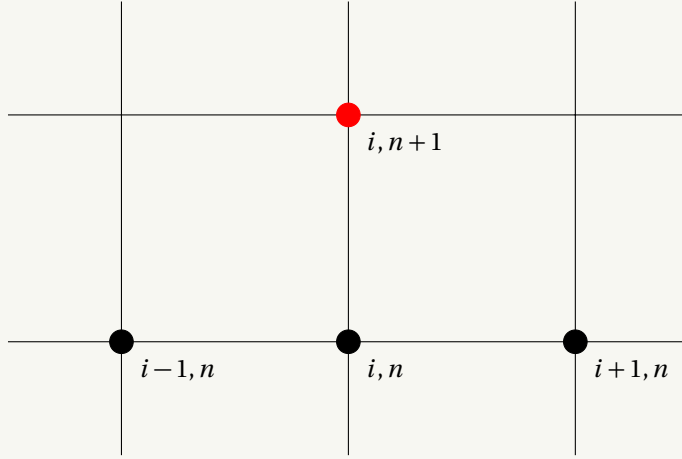


FIGURA 1. Stencil del esquema adelantado en tiempo, centrado en espacio.

Para el problema usaremos diferencias adelantadas para la parte temporal:

$$\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} \approx \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \quad (2.9)$$

y diferencias centradas para la derivada parcial de segundo orden espacial:

$$\frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{(\Delta x)^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) \quad (2.10)$$

Igualando los términos y cambiando la notación:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.11)$$

tenemos que:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \mu(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (2.12)$$

donde

$$\mu := \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (2.13)$$

Cada valor en el nivel de tiempo $t_n + 1$ puede calcularse independientemente a partir de los valores en el tiempo t_n ; por esta razón se denomina esquema de diferencias explícitas.

Finalmente para las condiciones iniciales y de frontera tendríamos

$$u_i^0 = u^0(x_i), i = 1, 2, \dots, I-1 \quad (2.14)$$

$$u_0^n = u_i^n = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Implementación en Python.

El siguiente código es un ejemplo de el método de Euler, nótese que se está usando vectorización para optimizar el cálculo.

```
def euler(Nt, dx, dt, u0, L, alpha):
    mu = (dt/(dx**2))
    x = np.arange(0, L+dx, dx)
    t = np.arange(0, Nt*dt, dt)

    sol = np.zeros((Nt, len(x)))
    u_n = np.zeros(len(x))

    u0 = u0(x)
    u = u0
    for n in range(Nt):
        u_n[1:-1] = u[1:-1] + mu*(u[:-2] -
            2*u[1:-1] + u[2:])
        u = u_n
        sol[n] = u
    return x, t, mu, sol
```

Ejercicios.

Ejercicio 3.1

Obtener la solución numérica de la ecuación

$$u_t = u_{xx} \quad \text{para } t > 0, 0 < x < 1$$

$$u^0(0) = u^0(1) = 0$$

$$u^0(x) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-L/2)^2}, \sigma = 0.5$$

2.2. Conducción de calor. La conducción de calor es un proceso difusivo, y se puede aproximar resolviendo la ecuación de calor; en una dimensión:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

donde α es un coeficiente de difusividad térmica que va a depender del tipo de material conductor y T es la temperatura. Discretizando la ecuación tenemos

$$T_j^{n+1} = T_i^n + \mu(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad (2.17)$$

sujeto a la restricción de estabilidad:

$$\mu = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (2.18)$$

En este tipo de problemas en lugar de especificar el valor de la solución en la frontera, es preciso especificar el valor de la derivada de la solución en la frontera. Este tipo de condiciones de frontera se conocen como **Condiciones de frontera de Neumann**. Supongamos que en el lado derecho del dominio existe un flujo de calor, la C.F se expresa como:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} = q(t) \quad (2.19)$$

y discretizando:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} \approx \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} = q(t) \quad (2.20)$$

En el contexto de la conducción de calor, la derivada espacial de la temperatura es la densidad de flujo de calor o simplemente flujo de calor q con unidades de W/m^2 .

Ejercicios.**Ejercicio 3.2**

Suponga que tenemos una barra de un material con un coeficiente de difusividad térmica $\alpha = 1 \text{ m}^2\text{s}$, una longitud $L = 1 \text{ m}$ y temperatura $T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ a lo largo de toda la barra. En un tiempo $t = 0$, se calienta el extremo izquierdo de la barra ($x = 0$) manteniéndose a una temperatura de $T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, en el lado derecho de la barra se tiene un material aislante.

- Escriba un código para resolver la ecuación de difusión de calor para el ejemplo de la barra donde se implementen las condiciones de frontera de Neumann.
- Realice una gráfica para visualizar los resultados.

2.3. Método de Euler atrasado (Implícito). Las simulaciones con el esquema de Euler adelantado muestran que la restricción del paso de tiempo, $\mu \leq 1/2$ que significa $\Delta t \leq \Delta X^2/(2\alpha)$, puede ser relevante al comienzo del proceso de difusión, cuando la solución cambia bastante rápido, pero a medida que aumenta el tiempo, el proceso se ralentiza y un Δt pequeño puede ser un inconveniente.

Mediante el uso de esquemas implícitos, que conducen a sistemas acoplados de ecuaciones lineales que deben resolverse en cada paso de tiempo, es posible tener cualquier tamaño de Δt (pero la precisión disminuye al aumentar Δt).

Si utilizamos el esquema adelantado podemos escribir la ecuación de difusión como:

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.21)$$

Ahora suponemos que u_i^{n-1} ya está calculado, pero todas las cantidades en el “nuevo” paso de tiempo n son desconocidas. Esta vez no es posible resolver con respecto a u_i^n porque este valor está acoplado a sus vecinos en el espacio, u_{i-1}^n y u_{i+1}^n , que también son desconocidos, ver Figura 2.

Tomemos el caso cuando $N_x = 3$, donde N_x es el número total del puntos de malla en x , para $i = 1, \dots, N_x - 1 = 1, 2$ tenemos:

$$\frac{u_1^n - u_1^{n-1}}{\Delta t} = \alpha \frac{u_2^n - 2u_1^n + u_0^n}{\Delta x^2} \quad (2.22)$$

$$\frac{u_2^n - u_2^{n-1}}{\Delta t} = \alpha \frac{u_3^n - 2u_2^n + u_1^n}{\Delta x^2}. \quad (2.23)$$

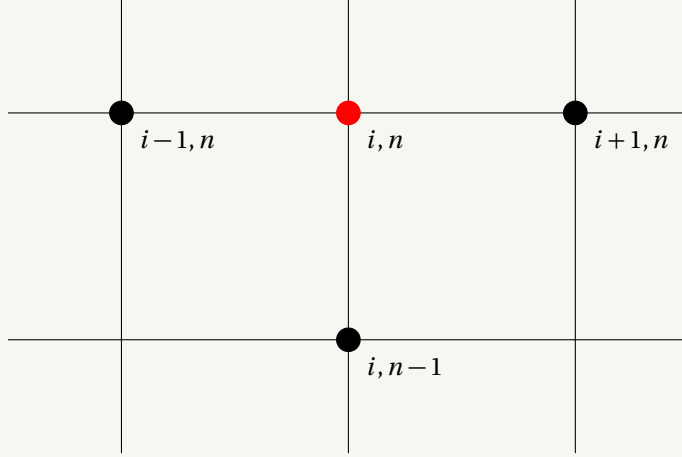


FIGURA 2. Stencil del esquema atrasado en tiempo, centrado en espacio.

donde los valores en la frontera u_0^n y u_3^n son conocidos. Acomodando las incógnitas u_1^n y u_2^n en el lado izquierdo y multiplicando por Δt tenemos:

$$(1 + 2\mu)u_1^n - \mu u_2^n = u_1^{n-1}, \quad (2.24)$$

$$-\mu u_1^n + (1 + 2\mu)u_2^n = u_2^{n-1}. \quad (2.25)$$

Este es un sistema de ecuaciones 2×2 acoplado para las incógnitas u_1^n y u_2^n . en forma matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\mu & -\mu \\ -\mu & 1 + 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{n-1} \\ u_2^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

En el caso general la ecuación (1) da lugar a un sistema acoplado de ecuaciones de $(N_x - 1) \times (N_x - 1)$ para todas las incógnitas u_i^n en los puntos espaciales $i = 1, \dots, N_x - 1$, entonces podemos reescribir la ecuación (1) como:

$$-\mu u_{i-1}^n + (1 + 2\mu)u_i^n - \mu u_{i+1}^n = u_{i-1}^{n-1} \quad (2.27)$$

para $i = 1, \dots, N_x - 1$. Aquí podríamos imponer las condiciones de frontera, es decir:

$$u_0^n = 0 \quad (2.28)$$

$$u_{N_x}^0 = 0 \quad (2.29)$$

Este sistema de ecuaciones algebraicas se puede escribir en forma matricial:

$$AU = b \quad (2.30)$$

donde $U = (u_0^n, \dots, u_{N_x}^n)$.

La matriz A tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & A_{j,j-1} & A_{j,j} & A_{j,j+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & A_{N_x-1,N_x} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_{N_x,N_x-1} & A_{N_x,N_x} \end{pmatrix}$$

Los elementos diferentes de cero están dados por:

$$A_{i,i-1} = -\mu \quad (2.31)$$

$$A_{i,i} = 1 + 2\mu \quad (2.32)$$

$$A_{i,i+1} = -\mu \quad (2.33)$$

para los puntos de malla $i = 1, \dots, N_x - 1$.

La primera y la última ecuación del sistema corresponden a las condiciones de frontera, donde la solución es conocida, y por lo tanto debemos tener:

$$A_{0,0} = 1 \quad (2.34)$$

$$A_{0,1} = 0 \quad (2.35)$$

$$A_{N_x,N_x-1} = 0 \quad (2.36)$$

$$A_{N_x,N_x} = 1 \quad (2.37)$$

Finalmente podemos escribir a b como:

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{N_x} \end{pmatrix}$$

con

$$b_0 = 0 \quad (2.38)$$

$$b_i = u_i^{n-1}, \quad i = 1, \dots, N_x - 1 \quad (2.39)$$

$$b_{N_x} = 0 \quad (2.40)$$

La matriz A contiene cantidades que no cambian en el tiempo. Por lo tanto, A puede formarse antes de que entremos en las fórmulas recursivas para la evolución temporal. Sin embargo, el lado derecho b debe actualizarse en cada paso de tiempo.

2.4. Método de Crank–Nicolson. En el esquema de Crank–Nicolson se utilizan diferencias centradas en tiempo y espacio en combinación con un promedio en el tiempo. Se requiere que la ecuación se satisfaga en los puntos de malla espacial, pero en medio de los puntos de malla temporal.

$$\frac{\partial}{\partial t} u \left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}} \right) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}} \right) + f \left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (2.41)$$

para $i = 1, \dots, N_x - 1$ y $n = 0, \dots, N_t - 1$.

En el lado derecho de la ecuación tenemos una expresión de la forma:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_i^{n+\frac{1}{2}} + u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} \right) + f_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.42)$$

El problema es que no calculamos $u_i^{n+\frac{1}{2}}$, entonces podemos remplazar este término por un promedio aritmético:

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} (u_i^n + u_i^{n+1}) \quad (2.43)$$

Y de igual manera para el término fuente:

$$f_i^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} (f_i^n + f_i^{n+1}) \quad (2.44)$$

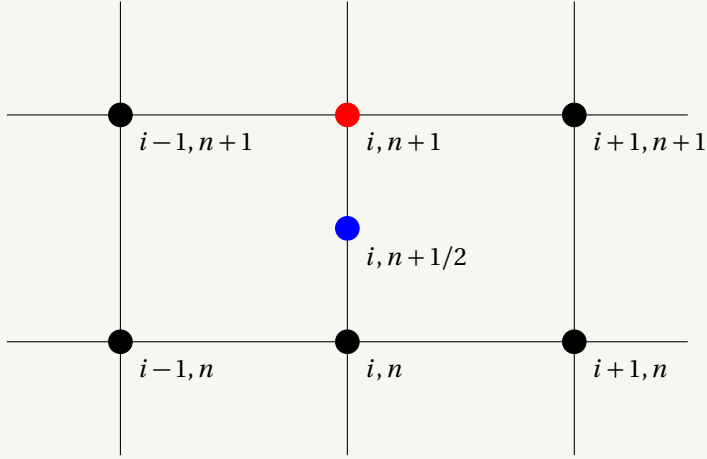


FIGURA 3. Stencil del esquema de Crank–Nicolson.

Reescribiendo el lado izquierdo de la ecuación y re–acomodando tenemos:

$$u_i^{n+1} - \frac{1}{2}\mu(u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) = u_i^n + \frac{1}{2}\mu(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) + \frac{1}{2}f_i^{n+1} + \frac{1}{2}f_i^n \quad (2.45)$$

Como en el esquema de Euler atrasado, las nuevas incógnitas u_{i-1}^{n+1} , u_i^{n+1} , y u_{i+1}^{n+1} están acopladas en un sistema lineal $AU = b$, donde A tiene la misma estructura que en el caso de Euler atrasado:

$$A_{i,i-1} = -\frac{1}{2}\mu \quad (2.46)$$

$$A_{i,i} = 1 + \mu \quad (2.47)$$

$$A_{i,i+1} = -\frac{1}{2}\mu \quad (2.48)$$

para los puntos internos, $i = 1, \dots, N_x - 1$. Las ecuaciones para los puntos en la frontera son:

$$A_{0,0} = 1 \quad (2.49)$$

$$A_{0,1} = 0 \quad (2.50)$$

$$A_{N_x, N_x - 1} = 0 \quad (2.51)$$

$$A_{N_x, N_x} = 1 \quad (2.52)$$

Y b está dado por:

$$b_0 = 0 \quad (2.53)$$

$$b_i = u_i^{n-1} + \frac{1}{2}(f_i^n + f_i^{n+1}), \quad i = 1, \dots, N_x - 1 \quad (2.54)$$

$$b_{N_x} = 0 \quad (2.55)$$

2.5. Método generalizado θ . Para la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G(u) \quad (2.56)$$

donde $G(u)$ es algún operador diferencial espacial, el método- θ está dado por:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \theta G(u_i^{n+1}) + (1 - \theta)G(u_i^n) \quad (2.57)$$

La característica importante de este esquema de discretización es que se puede implementar una sola fórmula y luego generar una familia de esquemas dependiendo del valor de θ :

- $\theta = 0$ resulta en el esquema de Euler adelantado en tiempo.
- $\theta = 1$ resulta en el esquema de Euler atrasado en tiempo.
- $\theta = \frac{1}{2}$ resulta en el esquema de Crank–Nicolson en tiempo.

Es decir $t_{n+\theta} = \theta t_{n+1} + (1 - \theta)t_n$.

Aplicando este método a la ecuación de difusión en 1D tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = & \alpha \left(\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1 - \theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \\ & + \theta f_i^{n+1} + (1 - \theta)f_i^n \end{aligned} \quad (2.58)$$

Que nos lleva a un sistema de matrices con:

$$A_{i,i-1} = -\mu\theta, \quad A_{i,i} = 1 + 2\mu\theta, \quad A_{i,i+1} = -\mu\theta \quad (2.59)$$

y para b_i tenemos:

$$b_i = u_i^n + \mu(1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \Delta t \theta f_i^{n+1} + \Delta t(1-\theta) f_i^n \quad (2.60)$$

2.6. Difusión en un medio heterogéneo. La difusión en medios heterogéneos normalmente implica un coeficiente de difusión no constante, es decir, $\alpha = \alpha(x)$. Un modelo 1D para difusión considerando este tipo de coeficiente es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad x \in (0, L), t \in (0, T], \quad (2.61)$$

$$u(x, 0) = I(x), \quad x \in [0, L], \quad (2.62)$$

$$u(0, t) = U_0, \quad t > 0, \quad (2.63)$$

$$u(L, t) = U_L, \quad t > 0. \quad (2.64)$$

Y discretizando con el método- θ generalizado tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = & \theta \frac{1}{\Delta x^2} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \alpha_{i-\frac{1}{2}} (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) \right) \\ & + (1-\theta) \frac{1}{\Delta x^2} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1}^n - u_i^n) - \alpha_{i-\frac{1}{2}} (u_i^n - u_{i-1}^n) \right) \\ & + \theta f_i^{n+1} + (1-\theta) f_i^n, \end{aligned} \quad (2.65)$$

donde podemos tomar la media aritmética para α , por ejemplo:

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\alpha_i + \alpha_{i+1}).$$

Implementación en Python.

```

def solver(I, alpha, f, L, Nx, Nt, dx, dt, theta, u_L, u_R):
    ...
    if isinstance(alpha, (float, int)):
        alpha = np.zeros(Nx+1) + alpha
    elif callable(alpha):
        a_0 = np.zeros(x.shape)
        for i in range(Nx+1):
            a_0[i] = alpha(x[i])
        alpha = a_0
    mu = alpha*(dt/dx**2)
    diagonal[1:-1] = 1 + mul[1:-1]*(alpha[2:]
        + 2*alpha[1:-1] + alpha[:-2])
    lower[:-1] = -mul[1:-1]*(alpha[1:-1]
        + alpha[:-2])
    upper[1:] = -mul[1:-1]*(alpha[2:]
        + alpha[1:-1])
    diagonal[0] = 1
    upper[0] = 0
    diagonal[Nx] = 1
    lower[-1] = 0
    A = scipy.sparse.diags(diagonals=[diagonal, ...
        lower, upper],
        offsets=[0, -1, 1],
        shape=(Nx+1, Nx+1),
        format='csr')
    for i in range(0, Nx+1):
        u_n[i] = I(x[i])
    sol = np.zeros((Nt, len(u)))
    for n in range(0, Nt):
        b[1:-1] = u_n[1:-1] + mur[1:-1]*(
            (alpha[2:]+alpha[1:-1])*(u_n[2:]
            -u_n[1:-1])-(alpha[1:-1]+alpha[0:-2])*
            (u_n[1:-1]-u_n[:-2]))+
            dt*theta*f(x[1:-1], t[n+1]) +
            dt*(1-theta)*f(x[1:-1], t[n])
        u[:] = scipy.sparse.linalg.spsolve(A, b)
        u_n[:] = u[:]
        sol[n] = u[:]
    return u, x, t, sol, mu

```


Ejercicios.**Ejercicio 3.3**

Suponga que tenemos una barra de longitud L construida con tres capas. Las fronteras entre las capas se denotan con $b_0 \cdots b_3$, donde $b_0 = 0$ y $b_3 = L$. Si las capas están hechas de materiales con propiedades diferentes y además estas se mantienen constantes dentro de la capa, podemos expresar el coeficiente de difusividad térmica como:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_0, & b_0 \leq x < b_1 \\ \alpha_1, & b_1 \leq x < b_2 \\ \alpha_2, & b_2 \leq x \leq b_3 \end{cases}$$

donde $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_0/2$ y $\alpha_2 = \alpha_1/2$. Inicialmente se tiene una temperatura $T = 0^\circ\text{C}$ a lo largo de toda la barra. En un tiempo $t = 0$, se calienta el extremo izquierdo ($x = 0$) manteniéndose a una temperatura de $T = 100^\circ\text{C}$ y en el lado derecho se tiene un material aislante.

- Utilice $b_1 = 0.25$ y $b_2 = 0.5$ para la posición de las fronteras entre capas.
- Realice una gráfica para visualizar los resultados.

3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL INTERCAMBIO TÉRMICO EN CUERPOS DE AGUA

3.1. Modelo de la polución térmica en un río. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio cubierto con agua (lago, río, estuario u otro) y sea $T > 0$ el tiempo de modelación. Si denotamos con τ la temperatura del agua en $\Omega \times (0, T)$ entonces debe satisfacer la siguiente ecuación de transporte

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla \tau - \nabla \cdot (E \nabla \tau) = \pm \mathfrak{F} \quad (3.1)$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ denota la velocidad del fluido y \mathfrak{F} denota el intercambio de calor entre el cuerpo de agua y su entorno. Es importante notar que las dimensiones de la ecuación son [$^{\circ}C \, s \, e \, g^{-1}$] (*Grado Celsius por unidad de tiempo*). También notamos que el transporte estaría dado por advección y difusión a pesar que el primero suele ser dominante sobre todo en ríos. La ecuación anterior requiere condiciones de tipo inicial y de frontera, así asumiendo que conocemos la temperatura inicial en todo el dominio en el tiempo $t = 0$ y que Ω tiene una frontera Γ dividida en tres segmentos: entrada Γ_{in} , salida Γ_{out} y pared Γ_w , podemos enunciar

$$\tau(\mathbf{x}, 0) = \tau^0(\mathbf{x}) \quad (3.2a)$$

$$\nabla \tau \cdot \mathbf{n} = -q \text{ sobre } \Gamma_{in} \quad (3.2b)$$

$$\nabla \tau \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_{out} \quad (3.2c)$$

$$E \nabla \tau \cdot \mathbf{n} - (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}) \tau = 0 \text{ sobre } \Gamma_w \quad (3.2d)$$

donde τ^0 es una función conocida, e imponiendo un flujo térmico a la entrada del río, que la temperatura no traspasa las paredes y que en la salida el calor escapa sólo por acción de la velocidad del agua en el dominio.

Es posible imponer al inicio del cuerpo de agua una condición de temperatura conocida como veremos en el caso 1D.

Si la longitud del río es notablemente superior a su ancho y profundidad el modelo anterior puede simplificarse al caso 1D, así la temperatura es ahora $\tau = \tau(x, t)$ para todo punto $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ y que satisface el siguiente problema en EDPs con

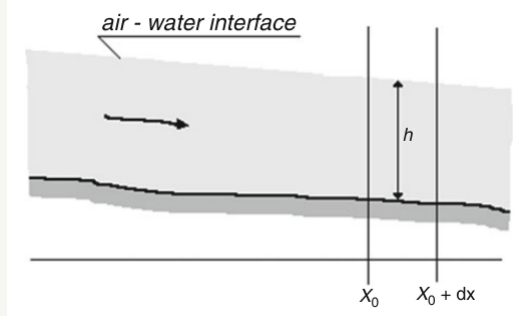


FIGURA 4. Esquema de la partícula elemental. Observe que solo aparecen dos dimensiones, longitud dx y profundidad h , a pesar de esto se debe considerar también el ancho w (Tomada de Benedini and Tsakiris, Springer 2013).

valores inicial-frontera:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} - E \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \pm \mathfrak{F}(\tau, x, t) \quad (3.3a)$$

$$\tau(x, 0) = \tau^0(x) \quad (3.3b)$$

$$\tau(0, t) = \tau_0(t) \quad (3.3c)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (3.3d)$$

La justificación para usar un modelo 1D para un río fue que su longitud es mucho mayor que su ancho (w) y profundidad (h), sin embargo esto no quiere decir que estas últimas dimensiones no pueden ser tomadas en cuenta. Así delimitamos la llamada *partícula elemental* con los puntos $x_0 \in (0, L)$ y $x_0 + \delta_x$. Después podemos tomar su área $A = w \delta_x$ y su volumen $V = h w \delta_x$. La partícula elemental será importante para definir los forzamientos del modelo de intercambio de calor en un río, sin embargo esto no tendrá sentido hasta definir la discretización del dominio $[0, L] \times [0, T]$ en el contexto de la solución numérica del modelo.

Recordemos que \mathfrak{F} denota el intercambio térmico con el ambiente, este debe incluir aspectos naturales como antropogénicos (polución). Comenzamos con la el llamado *point heat injection* que suele tener consecuencias útiles asumiendo que la gran cantidad de agua fría puede extinguir el calor proveniente de inyecciones de agua

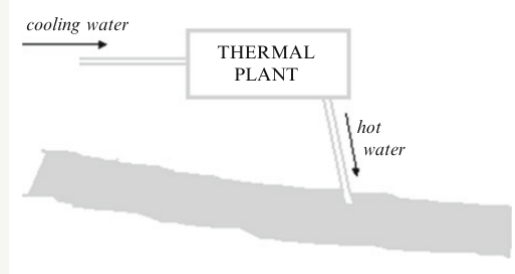


FIGURA 5. Esquema de la inyección de agua caliente en el río. Este tipo de inyección suele ser puntual y entonces no incluye dimensiones (Tomada de Benedini and Tsakiris, Springer 2013).

caliente o de cuerpos sumergidos. Así denotando con W_h el calor neto inyectado en el río tenemos la igualdad

$$\mathfrak{F} = \frac{W_h}{\rho C p V} \quad (3.4)$$

Si la inyección de calor es un flujo de agua caliente entonces debemos considerar las propiedades del agua caliente y fría. Así denotando con q el flujo de agua caliente, ρ_q la densidad del agua caliente, $x_q \in (0, L)$ el punto de inyección y τ_q la temperatura del agua fría tenemos que

$$W_h = \rho_q q C_p \tau_q$$

y por tanto

$$\mathfrak{F} = \frac{\rho_q q \tau_q}{\rho V} \quad (3.5)$$

notando que el calor específico C_p fue considerado igual para el agua fría y caliente.

Una forma indirecta de inyección de calor es asumir la presencia de un radiador sumergido en el río, dado que el agua caliente no estaría en contacto directo con el río la inyección de calor es por convección, así el calor neto estaría dado por

$$W_h = \eta(\tau_w - \tau) F_{rad}$$

siendo $\eta = f + r$ la resistencia al intercambio con f la propagación laminar y r la radioactiva, τ_w la temperatura de la pared del radiador y F_w el área que cubre el

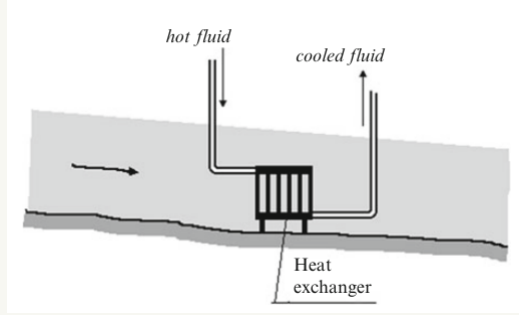


FIGURA 6. Esquema de un radiador sumergido donde observamos que las dimensiones pueden ser determinadas a pesar de considerar un dominio 1D (Tomada de Benedini y Tsakiris, Springer 2013).

radiador dentro del río. Por tanto el forzamiento estaría dado por

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \frac{\eta(\tau_w - \tau)F_{rad}}{\rho C_p V} \quad (3.6)$$

Los forzamientos anteriores son comúnmente antropogénicos sin embargo intercambios naturales son el de agua-aire y agua-fondo que obedecen a las condiciones meteorológicas y geológicas. Si denotamos con H_n el calor neto entrante entonces

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \frac{H_n F_{fs}}{\rho C_p V} \quad (3.7)$$

siendo F_{fs} el área de la superficie que recibe el calor H_n . El calor neto H_n representa un equilibrio térmico en el volumen de la partícula elemental V siendo en una de sus caras la fuente de intercambio agua-aire

$$H_n = H_{sn} + H_{an} - H_b \pm H_c - H_e$$

siendo H_{sn} el calor debido a la radiación entrante de onda corta, H_{an} el calor debido a la radiación atmosférica entrante de onda larga, H_b el calor saliente de onda larga, H_c el calor entrante-saliente debido a la convección o conducción y H_e la pérdida de calor por evaporación.

De forma similar si G denota el calor que pasa a través del fondo del río entonces

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \frac{G F_{rb}}{\rho C_p V} \quad (3.8)$$

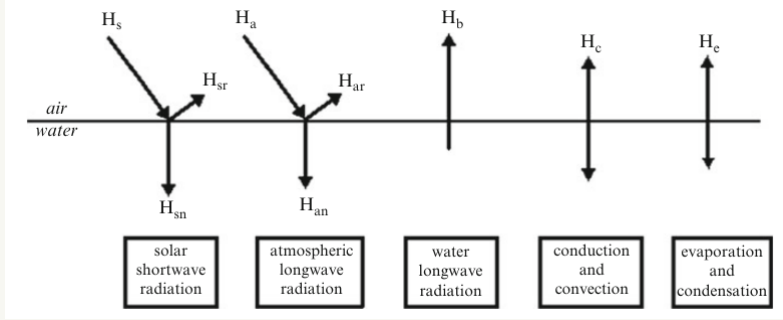


FIGURA 7. Esquema con los diferentes procesos-fuentes del intercambio de calor entre el río y el aire. Observe que estos claramente dependen de condiciones meteorológicas (Tomada de Benedini y Tsakiris, Springer 2013).

siendo F_{rb} el área del fondo donde pasa el calor.

4. SOLUCIÓN NUMÉRICA POR DIFERENCIAS FINITAS

Sean $M, N \in \mathbb{Z}^+$, definimos los incrementos $\delta_x = L/M$ y $\delta_t = T/N$ en espacio y tiempo lo que nos permite particionar el segmento (río) $[0, L]$ en M trozos delimitados por los puntos (nodos) $x_{i+1} = x_i + \delta_x$, $i = 0, \dots, M-1$, además de fijar los instantes de tiempo $t^n = n\delta_t$, $n = 0, \dots, N$. Es importante notar que tenemos $M+1$ nodos por $N+1$ instantes de tiempo, que en su conjunto nos proporcionan una malla \mathcal{G} que cubre el dominio $[0, L] \times [0, T]$. La intención es pues encontrar la temperatura τ en cada punto de la malla, para esto consideramos que la evaluación $\tau(x_i, t^n)$ es denotada con τ_i^n y aproximamos cada término de la EDP en el punto (x_i, t^n) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t}(x_i, t^n) &\approx \frac{\tau_i^{n+1} - \tau_i^n}{\delta_t}, & \frac{\partial \tau}{\partial x}(x_i, t^n) &\approx \frac{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n}{\delta_x} \\ \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} &\approx \frac{\tau_{i-1}^n - 2\tau_i^n + \tau_{i+1}^n}{\delta_x^2}, & \mathfrak{F}(x_i, t^n) &= \mathfrak{F}_i^n \\ \nu(x_i, t^n) &= \nu_i^n. \end{aligned}$$

Notamos además que las condiciones inicial y de frontera son también discretizadas como $\tau^0(x_i) = \tau_i^0$, $i = 0, \dots, M$ y $\tau_0(t^n) = \tau_0^n$, $n = 0, \dots, N$. Sustituyendo lo anterior en

la ecuación diferencial es posible obtener

$$\frac{\tau_i^{n+1} - \tau_i^n}{\delta_t} + \nu_{x,i}^n \frac{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n}{\delta_x} - E \frac{\tau_{i-1}^n - 2\tau_i^n + \tau_{i+1}^n}{\delta_x^2} = \mathfrak{F}_i^n$$

que nos permite despejar el valor τ_i^{n+1} ya que la condición inicial garantiza que todas las temperaturas y forzamientos en t^n son conocidos, por tanto obtendríamos

$$\tau_i^{n+1} = \beta_1 \tau_{i-1}^n + \beta_2 \tau_i^n + \beta_3 \tau_{i+1}^n + \delta_t \mathfrak{F}_i^n$$

siendo $\beta_1 = \nu_{x,i}^n \frac{\delta_t}{\delta_x} + E \frac{\delta_t}{\delta_x^2}$, $\beta_2 = 1 - \nu_{x,i}^n \frac{\delta_t}{\delta_x} - 2E \frac{\delta_t}{\delta_x^2}$ y $\beta_3 = E \frac{\delta_t}{\delta_x^2}$. Es importante notar que el esquema es válido para $i = 1, \dots, M-1$ y $n = 0, \dots, N-1$. Para el nodo $i = M$ el esquema es

$$\tau_M^{n+1} = \beta_1 \tau_{M-1}^n + \beta_2 \tau_M^n + \beta_3 \tau_{M+1}^n + \delta_t \mathfrak{F}_M^n$$

pero τ_{M+1}^n esta fuera del dominio. Considere aplicar la condición frontera al final del río

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(L, t^n) \approx \frac{\tau_{M+1}^n - \tau_{M-1}^n}{2\delta_x} = 0$$

implicando que $\tau_{M+1}^n = \tau_{M-1}^n$ para todo n . Por tanto tenemos una ecuación especial para $i = M$

$$\tau_M^{n+1} = (\beta_1 + \beta_3) \tau_{M-1}^n + \beta_2 \tau_M^n + \delta_t \mathfrak{F}_M^n$$

Dada la temperatura inicial τ_i^0 y la condición frontera en la entrada del río τ_0^n , encontrar la temperatura τ_i^{n+1} a partir del esquema explícito

$$\tau_i^{n+1} = \beta_1 \tau_{i-1}^n + \beta_2 \tau_i^n + \beta_3 \tau_{i+1}^n + \delta_t \mathfrak{F}_i^n \quad (4.1)$$

para $i = 1, \dots, M-1$, mientras que para $i = M$ tenemos la ecuación

$$\tau_M^{n+1} = (\beta_1 + \beta_3) \tau_{M-1}^n + \beta_2 \tau_M^n + \delta_t \mathfrak{F}_M^n \quad (4.2)$$

en ambos casos $n = 1, \dots, N-1$.

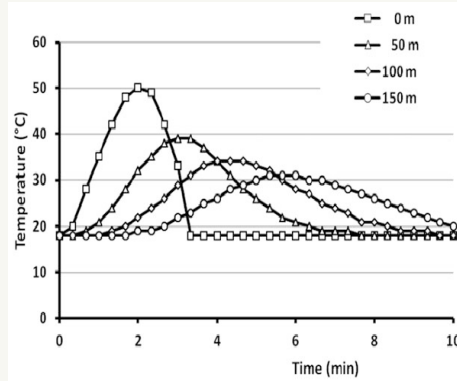
El esquema *Upwind* es estable bajo la condición

$$\frac{\nu \delta_t}{\delta_x} + \frac{2E \delta_t}{\delta_x^2} \leq 1 \quad (4.3)$$

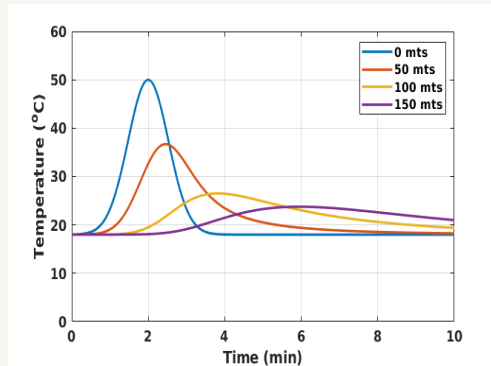
y alcanza calidad si ocurre

$$\frac{\nu \delta_t}{\delta_x} \ll \frac{2\delta_x}{\delta_x - \nu \delta_t} \quad (4.4)$$

Considere un canal con longitud $L = 150[mts]$, ancho $w = 8[mts]$ y profundidad $h = 0.9[mts]$. Sean los incrementos en tiempo y espacio $\delta_t = 20[seg]$ y $\delta_x = 25[mts]$ y una velocidad promedio de $\nu = 0.3[mts \text{ seg}^{-1}]$. Otros datos asumidos son



(a) Tomada de Benedini & Tsakiris



(b) Upwind

FIGURA 8. Experimento 2, contaminante no conservativo. Comparación de la solución dada en Benedini & Tsakiris y la obtenida con el esquema de tipo Upwind

$E = 5.0[m\,t\,s^2\,seg^{-1}]$, $H_n = 2000[Cal\,m\,t\,s^{-2}\,dia^{-1}]$. Finalmente asumimos que la temperatura a la entrada es conocida (Ver Figura 16.7 de Benedini y Tsakiris) y que la temperatura inicial es de $18^\circ C$.

Para obtener soluciones mejores considere ahora los incrementos $\delta_x = 2[m t s]$ y $\delta_t = 1[s e g]$. Considere que una planta térmica desfoga el agua caliente residual en el punto $x_p = 100[m t s]$, con un flujo de $q = 0.01[m t s^3 s e g^{-1}]$, temperatura $\tau_q = 30[^\circ C]$ y densidad $\rho_q = 980[k g m t s^{-3}]$.

Considere que un radiador está sumergido en el río en el punto $x_p = 50[m t s]$, con una temperatura de $\tau_{rad} = 90[^\circ C]$, y un área de contacto con el agua de $F_{rad} = h\delta_x[m t s^2]$.

Considere los valores mostrados en la tabla 16.1 y la figura 16.6 ambas de Benedini y Tsakiris. Con esto defina los valores H_n y G , el calor neto entrante del aire al agua y el calor neto entrante del fondo al agua. Para ver como influyen estos parametros elimine cualquier otro forzamiento del código.

Para evitar una estabilidad numérica condicionada existen esquemas alternativos de tipo implícito (p.ej. Euler y Crank-Nicholson), así formulamos lo siguiente considerando la discretización anterior:

$$\frac{\tau_i^{n+1} - \tau_i^n}{\delta_t} + \nu_{x,i}^{n+1} \frac{\tau_i^{n+1} - \tau_{i-1}^{n+1}}{\delta_x} - E \frac{\tau_{i-1}^{n+1} - 2\tau_i^{n+1} + \tau_{i+1}^{n+1}}{\delta_x^2} = \mathfrak{F}_i^{n+1}$$

lo que conlleva cambios significativos.

5. FLUJOS DE CALOR CON DATOS SATELITALES DE REANÁLISIS NARR EN CUERPOS DE AGUA

Se considera el flujo calor con base en una ecuación diferencial de temperatura la cual tiene la forma de:

$$\text{Acumulación y Distribución} = \text{entrada} - \text{salida} \quad (5.1)$$

En el contexto de flujos de calor en cuerpos de agua se tienen los siguientes elementos:

$$\text{acumulación y distribución} = V\rho C \frac{dT}{dt} + \nabla^2 T \quad (5.2)$$

$$\text{entrada} - \text{salida} = AJ \pm Q\rho CT \quad (5.3)$$

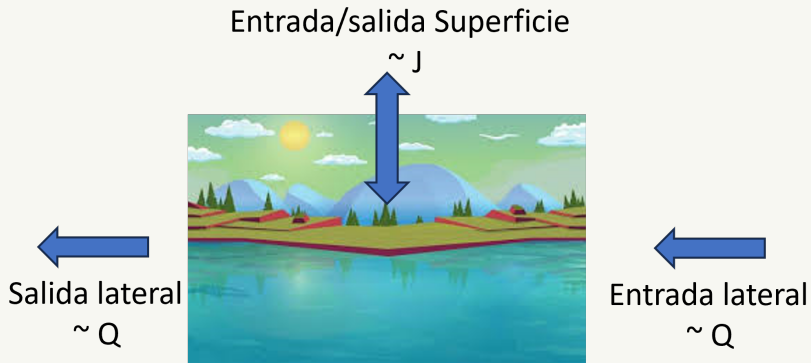


FIGURA 9. Flujos de entrada y salida

Donde

$T \rightarrow$ temperatura, $[^{\circ}\text{C}]$
$V \rightarrow$ volumen, $[m^3]$
$A \rightarrow$ área, $[m^2]$
$\rho \rightarrow$ densidad, $[\frac{kg}{m^3}]$
$C \rightarrow$ calor específico, $[\frac{J}{kg^{\circ}C}]$
$Q \rightarrow$ caudal, $[\frac{m^3}{s}]$
$J \rightarrow$ Flujo de calor en la superficie, $[\frac{J}{s m^2} = \frac{W}{m^2}]$

Los flujos calor en la superficie además se componen principalmente de:

$$J = J_{Solar} + J_{atm} + J_{agua} + J_{cond} + J_{evap} \quad (5.4)$$

En donde cada término tiene una relación temporal o con la misma temperatura T , con base en fórmulas empíricas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} J_{Solar} &\sim J_s \text{sen}(\omega t) \\ J_{atm} &\sim T_{aire}^4 \\ J_{agua} &\sim T^4 \\ J_{Cond} &\sim T \\ J_{evap} &\sim e^T \end{aligned}$$

Además, cada término tiene una relación con otras variables meteorológicas como es la humedad relativa, la temperatura del aire y el esfuerzo del viento.

Entonces la ecuación diferencial de la temperatura es:

$$V \rho C \frac{dT}{dt} + \nabla^2 T = AJ \pm Q \rho C T \quad (5.5)$$

En esta sección se propone resolver uno de los casos más simples, con las siguientes suposiciones:

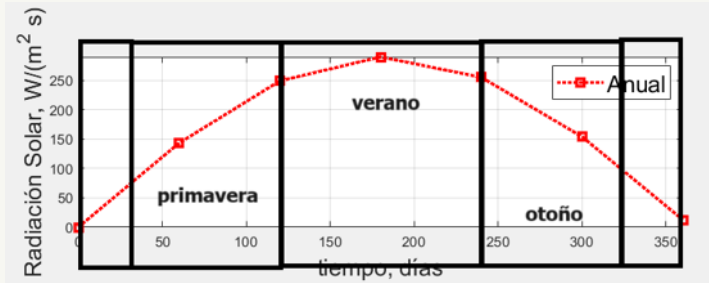


FIGURA 10. aproximación de la radiación solar anual

$$T(t_0 = 0) = 15^\circ C$$

$$Q = 0 \frac{m^3}{s}$$

$$J_{atm} = J_{agua} = J_{Cond} = J_{evap} = 0 \frac{W}{m^2}$$

$$\nabla^2 = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{(2*365)} \frac{rad}{d}$$

$$V = 5.3 \times 10^8 m^3$$

$$A = 2.5 \times 10^6 m^2$$

$$\rho \rightarrow 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$C = 4182 \frac{J}{Kg^\circ C}$$

$$J_S = 290 \frac{W}{m^2}$$

Es decir, se resolverá la siguiente ecuación.:

$$\frac{dT}{dt} = a J_S \text{sen}(\omega t) \quad (5.6)$$

Con

$$a = \frac{A}{V\rho C} \quad (5.7)$$

En este caso, la solución analítica será:

$$T(t) = T(t_0) + \frac{aJ_s}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \quad (5.8)$$

Mientras que numéricamente la solución se basa en la definición formal de la derivada, es decir:

$$\frac{dT}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} \approx \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T^{k+1} - T^k}{\Delta t} \quad (5.9)$$

con

$$\Delta t \text{ fijo} \quad (5.10)$$

y

$$T^1 = T(t_0) \quad (5.11)$$

Es decir,

$$T^{k+1} = T^k + aJ_s\Delta t \text{ sen}(\omega t_k) \quad (5.12)$$

A continuación, se muestran los resultados de la solución para $dt = 60$ d. Pero si las ecuaciones se resuelven para $dt = 10$ d, las soluciones se mejora.

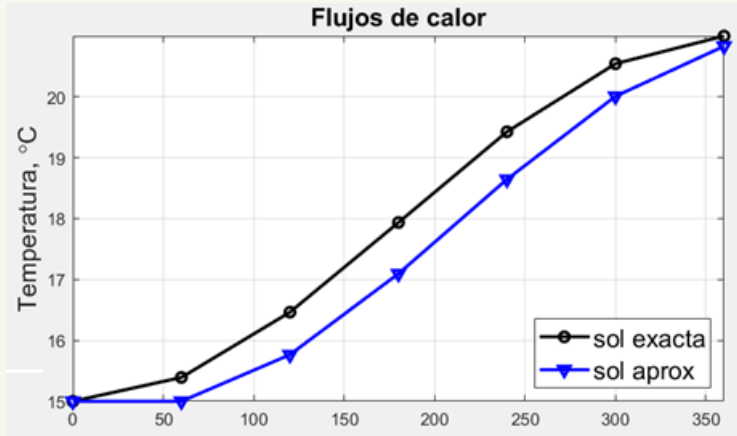
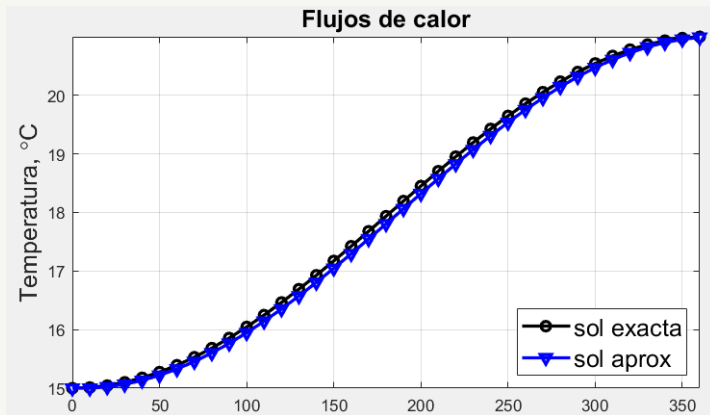
DATOS SATELITALES DE REANÁLISIS NARR

De la plataforma <https://psl.noaa.gov/data/gridded/data.narr.html> es posible descarga datos para región de Norte America, en una resolución espacial de aproximadamente 32 km, de hasta cada 3 hrs.

Se descarga la variable "downward shortwave radiation flux" que es el equivalente de la radiación solar.

Estos datos se muestran en la figura 15.

En este caso, al utilizar estos datos reales" se obtiene la figura 16.

FIGURA 11. Soluciones: numérica, aproximada para $dt = 60$ dFIGURA 12. Soluciones: numérica, aproximada para $dt = 10$ d

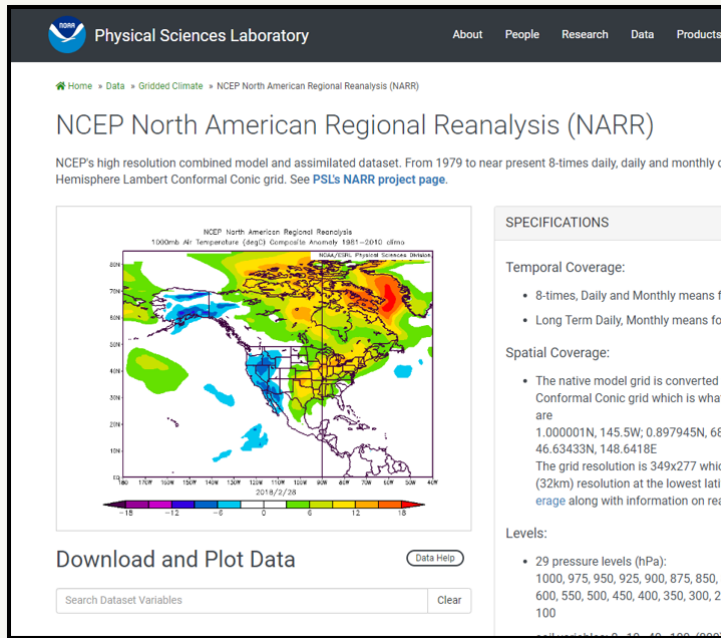


FIGURA 13. Plataforma NARR

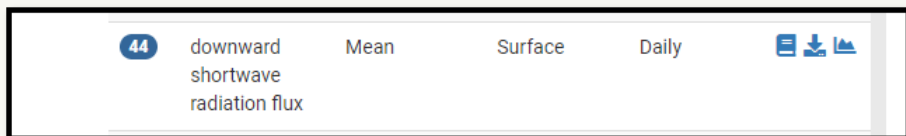


FIGURA 14. Variable de radiación solar

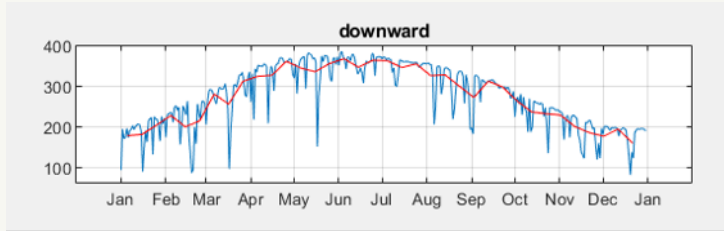


FIGURA 15. Variable de radiación solar de datos del NARR

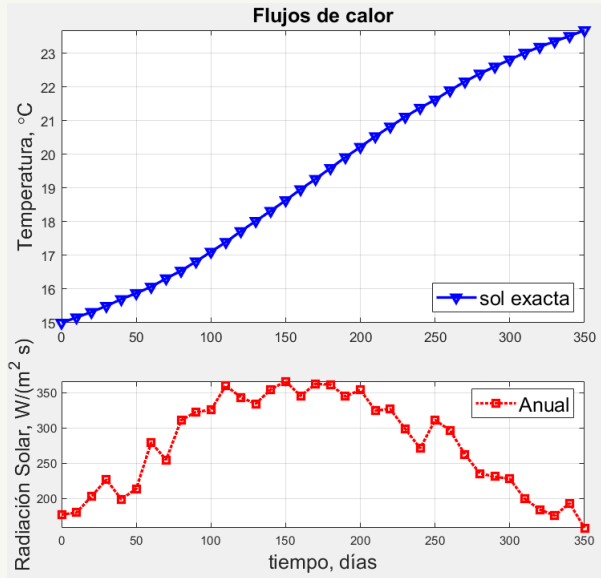


FIGURA 16. Solución con datos reales de radiación solar de NARR

REFERENCIAS

- [1] G.K. Geoffrey, Atmospheric and oceanic fluid dynamics. *Cambridge University Press*, 2017.
- [2] P. Connolly, R. Hogan, Computer Practical: Shallow Water Model. *The University of Manchester*, 2014.
- [3] L. Zavala-Sansón, *Apuntes de Oceanografía Física. Dispersión y difusión en el océano*. CISESE, (2021).
- [4] T. Gasca-Ortiz, F.J. Domínguez-Mota, D.A. Pantoja, *Determination of Optimal Diffusion Coefficients in Lake Zirahuén through a Local Inverse Problem*. Mathematics, no 9, (2021).
- [5] R.E. Thomson, W.J. Emery, Data analysis methods in physical oceanography. *Newnes*, (2014).
- [6] PlasticAdrift, <https://plasticadrift.org/>
- [7] M. Benedini, G. Tsakiris, Water Quality Modelling for Rivers and Streams. *Springer*, (2012).
- [8] C.A.J Fletcher, Computational techniques for fluid dynamics 1 – Fundamental and general techniques. *Springer*, (1990).

DEPTO. DE FÍSICA, CUCEL, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLV MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN
1421, 4443-GUADALAJARA

E-mail address: federico.velazquez@academicos.udg.mx

E-mail address: diego.pantoja@academicos.udg.mx

E-mail address: tzitlali.gasca@academicos.udg.mx

E-mail address: jorge.montes@academicos.udg.mx

E-mail address: nestor.gchan@academicos.udg.mx

AUTÓMATAS CELULARES: TEORÍA Y ALGORITMOS

ALONSO CASTILLO RAMÍREZ, LUGUIS DE LOS SANTOS BAÑOS, MARÍA GUADALUPE
MAGAÑA CHÁVEZ, RAMÓN HARATH RUIZ MEDINA, EDUARDO VELIZ QUINTERO

RESUMEN. En este texto abordamos la teoría básica de los autómatas celulares, los cuales son funciones entre espacios de configuraciones discretos definidos mediante una función local. Demostramos el célebre Teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon que caracteriza a los autómatas celulares como funciones continuas equivariantes. Además, presentamos algoritmos para calcular conjuntos memoria mínimos, obtener la composición de dos funciones locales, y decidir la idempotencia de un autómata celular definido por un patrón. Finalmente, discutimos algunos aspectos dinámicos como la equicontinuidad y la sensibilidad.

1. INTRODUCCIÓN

Los autómatas celulares son funciones entre espacios de configuraciones discretos que están determinadas por un conjunto memoria finito y una función local fija. Originalmente concebidos por John von Neumann y Stanislaw Ulam en el Laboratorio Nacional de Los Álamos la década de 1940, los autómatas celulares se han vinculado con diversas áreas de las matemáticas tales como dinámica simbólica y teoría de la computación, además contar con importantes aplicaciones dentro de la física, química, biología, ciencias computacionales y en el modelado de sistemas discretos complejos.

El ejemplo más famoso de un autómata celular es el Juego de la Vida, definido por el matemático inglés John H. Conway en un espacio discreto bidimensional mediante un conjunto memoria pequeño y una función local relativamente sencilla. Sorprendentemente, el Juego de la Vida es capaz de simular una Máquina de Turing Universal,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 37B15, 68Q80.

Palabras Claves. Autómatas celulares. Acción shift. Topología prodiscreta. Conjunto memoria mínimo. Diagrama espacio-tiempo. Equicontinuidad. Sensibilidad.

lo que se ha considerado como un ejemplo palpable del surgimiento de la complejidad a partir de la sencillez.

En años recientes, los trabajos de T. Ceccherini-Silberstein y M. Coornaert [3], entre otros, han enriquecido enormemente la teoría de los autómatas celulares al estudiarlos usando herramientas de la teoría de grupos, la topología y los sistemas dinámicos.

En este capítulo presentamos los fundamentos modernos de la teoría de autómatas celulares, incluyendo la demostración del célebre Teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon. Además, presentamos algoritmos para calcular conjuntos memoria mínimos, obtener la composición de dos funciones locales, y decidir la idempotencia de un autómata celular definido por un patrón. Finalmente, discutimos algunos aspectos dinámicos como la equicontinuidad y la sensibilidad.

Este texto fue elaborado para el curso *Autómatas celulares: teoría y algoritmos* impartido en la VIII Escuela de Verano en Matemáticas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías de la Universidad de Guadalajara llevado a cabo del 24 al 28 de junio de 2024. Asumimos que el lector conoce conceptos básicos de teoría de grupos y topología.

2. LA ACCIÓN SHIFT

2.1. Acciones de grupo. En primer lugar, recordamos la definición de acción de grupo.

Definición 2.1 (acción de grupo). Dado un grupo G y un conjunto X , una *acción* de G en X es una función $\cdot : G \times X \rightarrow X$, la cual satisface las siguientes condiciones:

- i) $e \cdot x = x$, para todo $x \in X$.
- ii) $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, para toda $g, h \in G$ y todo $x \in X$.

En las condiciones anteriores, denotamos a la imagen del par (g, x) bajo la acción como $g \cdot x$. Es fácil identificar que la propiedad *i*) nos indica que el elemento identidad siempre actúa como la función identidad. La condición *ii*) es una propiedad de compatibilidad, la cual nos dice que debe de existir una asociatividad entre la acción y la operación del grupo.

De manera equivalente, una acción de G sobre X puede definirse como un homomorfismo de G en el grupo de simetrías de X , es decir, como un homomorfismo de la forma $\varphi : G \rightarrow \text{Sym}(X)$.

Ejemplo 2.1. Consideremos un grupo G , y tomemos $X = G$. Podemos definir una acción de G en sí mismo de la siguiente manera:

$$g \cdot x = gx, \quad \forall g, x \in G.$$

Es sencillo verificar que se cumplen las condiciones *i)* y *ii)* de la definición de acción de grupo.

Ejemplo 2.2. Consideremos un grupo G , y tomemos $X = G$. Podemos definir una acción de G en sí mismo de la siguiente manera:

$$g \cdot x = gxg^{-1}, \quad \forall g, x \in G.$$

Verificamos que se cumple la condición *i)*:

$$e \cdot x = exe^{-1} = exe = x, \quad \forall x \in X.$$

Y ahora verificamos que se cumple la condición *ii)* para toda $g, h, x \in G$:

$$(gh) \cdot x = (gh)x(gh)^{-1} = (gh)x(h^{-1}g^{-1}) = g(hxh^{-1})g^{-1} = g(h \cdot x)g^{-1} = g \cdot (h \cdot x).$$

Ejemplo 2.3. Consideremos un subgrupo H de G , y a su conjunto de clases laterales izquierdas G/H . Es posible definir una acción de G sobre G/H de la siguiente manera:

$$g \cdot (xH) = (gx)H, \quad \forall g, x \in G.$$

Para cualquier clase lateral $gH \in G/H$ se cumple que

$$e \cdot (xH) = (ex)H = xH.$$

Por otro lado, para toda $g, h, x \in G$ se cumple que

$$g \cdot (h \cdot (xH)) = g \cdot (hxH) = ghxH = (gh) \cdot (xH).$$

Como se cumple la condición de compatibilidad, tenemos una acción de grupos.

Ejercicio 2.1. Dada una acción de un grupo G sobre un conjunto X , muestra que la relación en X dada como:

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x,$$

es una relación de equivalencia.

Definición 2.2 (órbita). Dado un grupo G que actúa sobre un conjunto X , definimos la G -órbita de un elemento $x \in X$ como:

$$Gx := \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Definición 2.3 (estabilizador). Dado un grupo G , un conjunto X sobre el cual G actúa y un elemento $x \in X$, definimos el estabilizador de x como:

$$G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

Proposición 2.1. Dada la acción de un grupo G sobre un conjunto X , el conjunto de órbitas $\{Gx : x \in X\}$ forma una partición de X .

Demostración. Primero debemos observar que las clases de equivalencia de la relación de equivalencia sobre X dada en el Ejercicio 2.1 son precisamente las órbitas. El resultado queda demostrado debido a que las clases de equivalencia de una relación de equivalencia siempre forman una partición. \square

Ejemplo 2.4. Consideremos la acción de multiplicación izquierda de un grupo G sobre sí mismo. Notemos que

$$Ge = \{g \cdot e : g \in G\} = \{ge : g \in G\} = G.$$

En todos los elementos de G están en una misma órbita.

Proposición 2.2. Dado un grupo G que actúa sobre un conjunto X y un elemento $x \in X$, el estabilizador G_x es un subgrupo de G .

Demostración. Claramente $e \in G_x$, porque $e \cdot x = x$. Consideremos $a, b \in G_x$. Notemos que $b \cdot x = x$ implica que $x = b^{-1} \cdot x$, es decir $b^{-1} \in G_x$. Entonces se tiene que

$$ab^{-1} \cdot x = a \cdot (b^{-1} \cdot x) = a \cdot x = x,$$

por lo que $ab^{-1} \in G_x$, y por tanto G_x es un subgrupo de G . \square

Ejemplo 2.5. Consideremos la acción de multiplicación izquierda de un grupo G sobre sí mismo. Para toda $g, x \in G$, si $g \cdot x = gx = x$, la propiedad cancelativa implica que $g = e$. En consecuencia, $G_x = \{e\}$ para toda $x \in G$.

Teorema 2.3 (órbita-estabilizador). Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X y sea $x \in X$, entonces

$$|Gx| = |G/G_x|.$$

Demostración. Definimos una función $f : Gx \rightarrow G/G_x$ dada por:

$$f(h \cdot x) = hG_x, \quad \forall h \in G.$$

Se tiene que

$$g \cdot x = h \cdot x \iff g^{-1}h \cdot x = x \iff g^{-1}h \in G_x \iff gG_x = hG_x \iff f(g \cdot x) = f(h \cdot x).$$

Esta cadena de bicondicionales muestra tanto que f está bien definida y que es inyectiva. Para cualquier clase lateral $hG_x \in G/G_x$ existe $h \cdot x \in Gx$ de tal manera que $f(h \cdot x) = hG_x$, por lo que f es una función sobreyectiva. Por lo tanto, f es biyectiva, lo que demuestra la igualdad entre las cardinalidades. \square

2.2. Espacio de configuraciones.

Definición 2.4 (configuración). Sea G un grupo y A un conjunto. Una *configuración* $x : G \rightarrow A$ es simplemente una función con dominio G y codominio A . El *espacio de configuraciones* se denota como

$$A^G := \{x : G \rightarrow A \mid x \text{ es una función}\}.$$

El espacio de configuraciones A^G puede identificarse con el producto cartesiano $\prod_{g \in G} A$, ya que cada función $x : G \rightarrow A$ puede identificarse con una tupla $(x(g))_{g \in G}$. De hecho, un producto cartesiano arbitrario está definido mediante funciones.

Definición 2.5 (acción shift). Definimos la *acción shift* de G en A^G como sigue: para cada $g \in G$ y $x \in A^G$, la función $g \cdot x \in A^G$ está dada por

$$(g \cdot x)(h) := x(g^{-1}h), \quad \forall h \in G.$$

Lema 2.4. *Efectivamente, la acción shift de G en A^G es una acción de grupos.*

Demostración. Verificamos que se cumplen las dos condiciones de acciones de grupos:

- i) $(e \cdot x)(h) = x(h)$, $\forall h \in G$, así que $e \cdot x = x$, $\forall x \in A^G$.
- ii) $g_2 \cdot (g_1 \cdot x)(h) = x(g_1^{-1}g_2^{-1}h) = x((g_2g_1)^{-1}h) = (g_2g_1 \cdot x)(h)$, $\forall h \in G$, así que $g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = g_2g_1 \cdot x$, $\forall x \in A^G$.

\square

Ejemplo 2.6. Recordemos que \mathbb{Z}_n es el grupo aditivo de clases de enteros módulo n :

$$\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Podemos identificar a cualquier configuración $x \in A^{\mathbb{Z}_n}$ como una n -tupla

$$x = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}),$$

donde $a_k := x(k)$.

En particular, si $A = \{0, 1\}$, entonces las configuraciones en $A^{\mathbb{Z}_n}$ pueden ser vistas como n -tuplas de ceros y unos.

Por ejemplo, si $n = 3$, entonces existen 8 configuraciones en $A^{\mathbb{Z}_3}$:

$$A^{\mathbb{Z}_3} = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 0) \\ (0, 0, 1) \\ (0, 1, 0) \\ (1, 0, 0) \\ (0, 1, 1) \\ (1, 0, 1) \\ (1, 1, 0) \\ (1, 1, 1) \end{array} \right\}.$$

Para cualquier $k \in \mathbb{Z}_3$, la acción shift de \mathbb{Z}_3 en $A^{\mathbb{Z}_3}$ se aplica como

$$k \cdot x = (a_{-k}, a_{1-k}, a_{2-k}),$$

donde la operación en los subíndices se hace módulo 3. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} x &= (1, 0, 0) \\ 1 \cdot x &= (0, 1, 0) \\ 2 \cdot x &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Con esto, descubrimos que la acción shift de \mathbb{Z}_3 en $A^{\mathbb{Z}_3}$ tiene 4 órbitas, las cuales están dadas en la siguiente tabla:

	(0, 1, 1)	(0, 0, 1)	
(0, 0, 0)	(1, 0, 1)	(0, 1, 0)	(1, 1, 1)
	(1, 1, 0)	(1, 0, 0)	

Ejemplo 2.7. Sea $G = \mathbb{Z}$ y $A = \{0, 1\}$. Una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ es formalmente una función $x : \mathbb{Z} \rightarrow A$, pero puede verse como una sucesión *bi-infinita* como sigue

$$x = \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$$

donde $x_i := x(i)$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. La acción shift de $n \in \mathbb{Z}$ en $A^{\mathbb{Z}}$ es

$$n \cdot x = \dots, x_{-2-n}, x_{-1-n}, x_{-n}, x_{1-n}, x_{2-n}, \dots$$

Por ejemplo, si $x = \dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots$, entonces

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= \dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots \\ 1 \cdot x &= \dots, 0, 0, 0, 1, 0, \dots \\ (-1) \cdot x &= \dots, 0, 1, 0, 0, 0, \dots \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8. Cuando $G = \mathbb{Z}^2$, podemos visualizar una configuración en $A^{\mathbb{Z}^2}$ como una coloración de una cuadrícula infinita bidimensional.

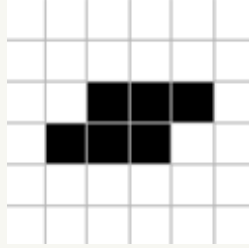


FIGURA 1. Configuración sobre $A^{\mathbb{Z}^2}$.

Definición 2.6 (G -equivariante). Dado un grupo G que actúa sobre dos conjuntos X y Y , una función $f : X \rightarrow Y$ se dice G -equivariante si se satisface que:

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x), \quad \forall g \in G, \forall x \in X.$$

Ejemplo 2.9. Consideremos el espacio de configuraciones $A^{\mathbb{Z}}$, y una función $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ definida por

$$\sigma(x) := 1 \cdot x, \quad \forall x \in A^{\mathbb{Z}}.$$

Observemos que σ es \mathbb{Z} -equivariante respecto a la acción shift de \mathbb{Z} en $A^{\mathbb{Z}}$, debido a que se cumple que

$$\sigma(k \cdot x) = 1 \cdot (k \cdot x) = (1+k) \cdot x = (k+1) \cdot x = k \cdot (1 \cdot x) = k \cdot \sigma(x),$$

para toda $x \in A^{\mathbb{Z}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 2.2. Determina todos los homomorfismos de un grupo G en sí mismos que sean G -equivariantes con la acción de multiplicación izquierda.

3. AUTÓMATAS CELULARES

3.1. La topología prodiscreta. De ahora en adelante, consideremos un grupo arbitrario G , al que nos referimos como el *universo*, y un conjunto A , al que nos referimos como el *alfabeto*.

Definición 3.1 (topología prodiscreta). La *topología prodiscreta* del espacio de configuraciones $A^G = \prod_{g \in G} A$ es la topología producto de la topología discreta en cada componente A .

Los conjuntos abiertos de una topología pueden darse en términos de una colección de conjuntos abiertos llamada *base*, lo que significa que todo abierto puede escribirse como uniones arbitrarias de elementos de la base. También es posible caracterizar a una topología en términos de una colección de conjuntos abiertos llamada *subbase*, lo que significa que todo abierto puede escribirse como uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos en la subbase (y las intersecciones finitas de los elementos de una subbase forman una base).

Una propiedad importante de la topología producto (consulta [7] o [8]), es que las proyecciones $\pi_g : A^G \rightarrow A$, definidas como $\pi_g(x) := x(g)$, $\forall x \in A^G$, son funciones continuas. Además, el conjunto de las preimágenes de una base de A bajo las proyecciones forma una subbase para la topología producto; como el alfabeto A tiene la topología discreta, los conjuntos unipuntuales de A forman una base, por lo que una subbase de A^G es la colección

$$\mathcal{S} := \{\pi_g^{-1}(a) : g \in G, a \in A\},$$

donde $\pi_g^{-1}(a) = \{x \in A^G : x(g) = a\}$. Los conjuntos $\pi_g^{-1}(a)$ son esencialmente el conjunto de todas las configuraciones de A^G que tienen a $a \in A$ en su “coordenada g -ésima”.

Por lo anterior, una base de A^G está dada por intersecciones finitas de los conjuntos $\pi_g^{-1}(a) \in \mathcal{S}$; es decir, los elementos de una base de la topología prodiscreta tienen la forma

$$\pi_{g_1}^{-1}(a_1) \cap \pi_{g_2}^{-1}(a_2) \cap \cdots \cap \pi_{g_n}^{-1}(a_n) = \{x \in A^G : x(g_i) = a_i, \forall i\}, \quad (1)$$

donde $g_i \in G$, $a_i \in A$.

Definición 3.2 (patrón). Un *patrón* $p \in A^S$ es una función de la forma $p : S \rightarrow A$, donde $S \subseteq G$ es un subconjunto finito.

Para un patrón $p : S \rightarrow A$, también usamos la notación

$$p = (p(s))_{s \in S}.$$

Dado un subconjunto finito $S := \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subseteq G$, podemos definir al patrón $p : S \rightarrow A$ como $p(g_i) := a_i \in A$, por lo que los básicos (1) de la topología prodiscreta pueden reescribirse en términos de p :

$$V(p) := \{x \in A^G : x|_S = p\} = \{x \in A^G : x(g_i) = p(g_i) = a_i, \forall i\}.$$

A los básicos $V(p) \subseteq A^G$ se les conoce como *cilindros básicos*. De manera similar, para cualquier subconjunto finito $K \subseteq G$ podemos construir una vecindad abierta de una

configuración $x \in A^G$ como sigue:

$$V(x, K) := \{z \in A^G : z|_K = x|_K\} = \bigcap_{k \in K} \pi_k^{-1}(\{x(k)\}).$$

En otras palabras, $V(x, K)$ contiene a todas las configuraciones de A^G que coinciden con x en K . Usando la notación de patrón, es fácil ver que $V(x, K) = V(x|_K)$.

El siguiente lema resume algunas propiedades importantes de la topología prodiscreta (consulta [3, Cap. 1]).

Lema 3.1. *Sea G un grupo y A un conjunto.*

1. *La topología prodiscreta A^G es un espacio de Hausdorff.*
2. *La topología prodiscreta A^G es totalmente desconexa (lo que significa que los únicos conjuntos conexos son los unipuntuales).*
3. *La topología prodiscreta A^G es discreta si y solo si G es finito.*
4. *La topología prodiscreta A^G es compacta si y solo si A es finito (por el Teorema de Tychonoff).*
5. *La topología prodiscreta A^G es metrizable si y solo si G es numerable. En tal caso, A^G es homeomorfo al conjunto de Cantor en los números reales.*

Lema 3.2. *Una función $\tau : A^G \rightarrow A^G$ es continua en la topología prodiscreta si y solo si $\pi_g \circ \tau : A^G \rightarrow A$ es continua $\forall g \in G$.*

Explicaremos más en detalle el punto (5.) del Lema 3.1. Sea G un grupo numerable y consideremos una sucesión creciente de subconjuntos finitos de G :

$$\emptyset = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$$

Definimos una función $d : A^G \times A^G \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 2^{-\max\{n \geq 0 : x|_{E_n} = y|_{E_n}\}} & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

para toda $x, y \in A^G$.

Teorema 3.3. *La función $d : A^G \times A^G \rightarrow \mathbb{R}$ definida anteriormente es una métrica. Además, la topología inducida por d es la topología prodiscreta de A^G .*

Cuando $G = \mathbb{Z}$, es usual considerar $E_0 = \emptyset$, y para $n \geq 1$,

$$E_n = [-n + 1, n - 1] := \{-n + 1, -n + 2, \dots, n - 2, n - 1\}.$$

Ejemplo 3.1. Sea $G = \mathbb{Z}$ y $A = \{0, 1\}$. Si $\mathbf{0}$ es la configuración constante, es decir

$$\mathbf{0} = \dots 00000 \dots,$$

y e_i es la configuración con 1 en el i -ésimo término y 0 en todos los demás términos, entonces

$$d(\mathbf{0}, e_i) = 2^{-|i|}.$$

Ejercicio 3.1. Justifica la afirmación del ejemplo anterior usando la definición de la métrica $d : A^{\mathbb{Z}} \times A^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Lema 3.4. La acción shift de G en A^G es una acción continua. Esto significa que para toda $g \in G$, la función $\phi_g : A^G \rightarrow A^G$ dada por

$$\phi_g(x) = g \cdot x, \quad \forall x \in A^G,$$

es continua en la topología prodiscreta de A^G .

Demostración. Usaremos el Lema 3.2. Para toda $g, h \in G$ y $x \in A^G$, tenemos que

$$\pi_h \circ \phi_g(x) = \pi_h(g \cdot x) = (g \cdot x)(h) = x(g^{-1}h) = \pi_{g^{-1}h}(x).$$

Esto demuestra que

$$\pi_h \circ \phi_g = \pi_{g^{-1}h}, \quad \forall g, h \in G.$$

Como las proyecciones siempre son continuas en la topología prodiscreta, entonces la composición $\pi_h \circ \phi_g$ siempre es continua. Por el Lema 3.2, concluimos que ϕ_g es continua para toda $g \in G$. \square

3.2. Autómatas celulares. La siguiente definición de autómata celular es una generalización de la definición original de John Von Neumann y puede encontrarse en [3, Cap. 1].

Definición 3.3 (autómata celular). Sea G un grupo y A un conjunto. Un autómata celular sobre A^G es una función

$$\tau : A^G \rightarrow A^G$$

tal que existe un subconjunto finito $S \subseteq G$ (llamado *conjunto memoria* de τ) y una función local $\mu : A^S \rightarrow A$ que satisfacen

$$\tau(x)(g) = \mu((g^{-1} \cdot x)|_S),$$

para toda $x \in A^G$, $g \in G$.

Intuitivamente, podemos pensar en un autómata celular $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ como una transformación global del espacio de configuraciones $A^{\mathbb{Z}}$ la cual está definida localmente mediante $\mu : A^S \rightarrow A$. En general, como veremos más adelante, un conjunto memoria S para un autómata celular no es único.

El escenario clásico, y más estudiado, es cuando $G = \mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, y A es un conjunto finito. Una excelente revisión de este escenario puede encontrarse en [6].

Ejemplo 3.2. Sea $G = \mathbb{Z}$ y $A = \{0, 1\}$. Sea $S = \{-1, 0\} \subseteq \mathbb{Z}$. Dada cualquier función $\mu : A^S \rightarrow A$, podemos definir un autómata celular

$$\tau(x)(i) = \mu(((-i) \cdot x)|_S) = \mu(x_{i-1}, x_i).$$

Es decir,

$$\tau(x) = (\dots, \mu(x_{-2}, x_{-1}), \mu(x_{-1}, x_0), \mu(x_0, x_1), \dots).$$

Vemos que el comportamiento global de τ al aplicarse en sucesiones bi-infinitas está determinado por la función local μ .

Ejemplo 3.3. Sea $G = \mathbb{Z}$ y $A = \{0, 1\}$. Sea $S = \{-1, 0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$ y definamos $\mu : A^S \rightarrow A$ por medio de la siguiente tabla

$z \in A^S$	111	110	101	100	011	010	001	000
$\mu(z)$	0	1	1	0	1	1	1	0

donde un patrón $z \in A^S$ está identificado con la tríada $z_{-1}z_0z_1$. Sea $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ el autómata celular definido por esta función local $\mu : A^S \rightarrow A$. Para aplicar τ a una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ se hace lo siguiente: el i -ésimo término en la imagen, $\tau(x)(i)$, es igual a $\mu(x_{i-1}x_ix_{i+1})$, de acuerdo a la tabla que define a μ . Por ejemplo,

$$\tau(\dots 000 \underbrace{010}_{\mu(010)} 00 \dots) = \dots 0011000 \dots$$

Al autómata celular de este ejemplo se le conoce como *Regla 110*.

La Regla 110 es un ejemplo particular de un *autómata celular elemental*, el cual es un autómata celular $\tau : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ que admite un conjunto memoria $S = \{-1, 0, 1\}$. Los autómatas celulares elementales se etiquetan como ‘Regla M ’, donde M es un número entre 0 y 255. En cada caso, la función local $\mu_M : A^S \rightarrow A$ está determinada como sigue: sea $M_1 \dots M_8$ la representación binaria de M y escribamos los elementos de A^S en orden lexicográfico decreciente, es decir, 111, 110, \dots , 000; entonces, la imagen del i -ésimo elemento de A^S bajo μ_M es M_i .

Por ejemplo, el número 110 en binario es 01101110, lo que corresponde a la segunda fila de la tabla que define a la función local de la Regla 110 en el Ejemplo 3.3.

Ejercicio 3.2. Encuentra las tablas de los autómatas celulares elementales Regla 90 y Regla 105. Evalúa cada uno de estos autómatas celulares en las siguientes configuraciones:

$$x := \dots 00000\dots, \quad y := \dots 00100\dots, \quad z := \dots 101010\dots$$

Ejemplo 3.4 (Juego de la Vida). Sea $G = \mathbb{Z}^2$ y $A = \{0, 1\}$. El Juego de la Vida es el autómata celular $\tau : A^G \rightarrow A^G$ definido por el conjunto memoria

$$S = \{-1, 0, 1\}^2 = \{(a, b) : a, b \in \{-1, 0, 1\}\},$$

y la función local $\mu : A^S \rightarrow A$ dada por

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\sum_{s \in S} x(s) = 3) \vee ((\sum_{s \in S} x(s) = 4) \wedge (x(0, 0) = 1)) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado un autómata celular $\tau : A^G \rightarrow A^G$ es posible encontrar su función local $\mu : A^S \rightarrow A$ simplemente evaluándolo en la identidad del grupo, ya que

$$\tau(x)(e) = \mu((e^{-1} \cdot x)|_S) = \mu(x|_S), \quad \forall x \in A^G.$$

Ahora demostraremos algunas propiedades algebraicas y topológicas de los autómatas celulares.

Lema 3.5. *Todo autómata celular $\tau : A^G \rightarrow A^G$ es una función continua en la topología prodiscreta.*

Demostración. Usaremos el Lema 3.2. Sea S un conjunto memoria de τ y $\mu : A^S \rightarrow A$ su función local. Para cualquier $g \in G$, tenemos que

$$\pi_g \circ \tau(x) = \tau(x)(g) = \mu((g^{-1} \cdot x)|_S) = \mu \circ \text{Res}_S \circ \varphi_{g^{-1}}(x), \quad \forall x \in A^G,$$

donde $\varphi_{g^{-1}} : A^G \rightarrow A^G$ y $\text{Res}_S : A^G \rightarrow A^S$ son las funciones inducidas por la acción shift y la restricción a S , es decir

$$\varphi_{g^{-1}}(x) = g^{-1} \cdot x \quad \text{y} \quad \text{Res}_S(x) = x|_S, \quad \forall x \in A^G.$$

Demostraremos que cada una de estas funciones es continua:

1. La función $\varphi_{g^{-1}}$ es continua por el Lema 3.4.

2. Como S es finito, entonces A^S tiene la topología discreta. Luego, la colección de conjuntos unipuntuales $\{\{p\} : p \in A^S\}$ es una base para la topología de A^S . La función Res_S es continua si y solo si, para toda $x \in A^S$, los conjuntos $\text{Res}_S^{-1}(p)$ son abiertos en A^G . Observemos que

$$\text{Res}_S^{-1}(p) = \{x \in A^G : x|_S = p\} = V(p),$$

donde $V(p)$ es el cilindro básico asociado con el patrón $p \in A^S$. Por lo tanto, $\text{Res}_S^{-1}(p)$ es abierto para toda $p \in A^S$. Esto demuestra que $\text{Res}_S : A^G \rightarrow A^S$ es continua.

3. La función local $\mu : A^S \rightarrow A$ es continua al ser una función entre espacios topológicos discretos.

Por lo tanto, para toda $g \in G$, la función $\pi_g \circ \tau : A^G \rightarrow A$ es continua al ser igual a la composición de tres funciones continuas; el Lema 3.2 implica que $\tau : A^G \rightarrow A^G$ es continua. \square

Lema 3.6. *Todo autómata celular $\tau : A^G \rightarrow A^G$ es G -equivariante.*

Demostración. Sean S y $\mu : A^S \rightarrow A$ un conjunto memoria y función local de τ , respectivamente. Para todo $g, h \in G$ y $x \in A^G$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \tau(g \cdot x)(h) &= \mu((h^{-1} \cdot (g \cdot x))|_S) \\ &= \mu(((h^{-1}g) \cdot x)|_S) \\ &= \mu((g^{-1}h)^{-1} \cdot x|_S) \\ &= \tau(x)(g^{-1}h) \\ &= g \cdot \tau(x)(h). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tau(g \cdot x) = g \cdot \tau(x)$ para toda $g \in G$ y $x \in A^G$, lo que demuestra la G -equivarianza. \square

Cuando el conjunto A es finito, el Teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon caracteriza los autómatas celulares como transformaciones del espacio de configuraciones A^G continuas y G -equivariantes.

Teorema 3.7 (Curtis-Hedlund-Lyndon). *Sea G un grupo y A un conjunto finito. Una función $\tau : A^G \rightarrow A^G$ es un autómata celular si y solo si τ es G -equivariante y continua en la topología prodiscreta.*

Demostración. El converso queda demostrado por los Lemas 3.5 y 3.6, y no requiere la finitud de A .

Supongamos que $\tau : A^G \rightarrow A^G$ es una función G -equivariante y continua. Consideremos la función $\hat{\mu} : A^G \rightarrow A$ dada por

$$\hat{\mu}(x) := \tau(x)(e), \quad \forall x \in A^G,$$

donde $e \in G$ es la identidad del grupo. Debido a que $\hat{\mu} = \pi_e \circ \tau$, el Lema 3.2 implica que $\hat{\mu}$ es una función continua. Por lo tanto, para toda $x \in A^G$ y toda vecindad V de $\hat{\mu}(x)$ existe una vecindad $V(x, K_x)$ de x (donde $K_x \subseteq G$ es finito) tal que $\hat{\mu}(V(x, K_x)) \subseteq V$. Si tomamos $V = \{\hat{\mu}(x)\}$, tenemos que

$$\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(z), \quad \forall z \in V(x, K_x). \quad (2)$$

La colección $\{V(x, K_x) : x \in A^G\}$ es una cubierta abierta de A^G . Debido a que A es finito, A^G es compacto por el Lema 3.1 (4.), así que existe un subconjunto finito $F \subseteq A^G$ tal que $\{V(x, K_x) : x \in F\}$ es una cubierta abierta de A^G . Definamos el siguiente subconjunto finito de G :

$$S := \bigcup_{x \in F} K_x.$$

Demostraremos que si $y, z \in A^G$ son tales que $y|_S = z|_S$, entonces $\mu(y) = \mu(z)$. Sea $x_0 \in F$ tal que $y \in V(x_0, K_{x_0})$. Como $K_{x_0} \subseteq S$, tenemos que $y|_{K_{x_0}} = z|_{K_{x_0}}$, y por lo tanto $z \in V(x_0, K_{x_0})$. Luego, por la propiedad (2) de arriba,

$$\hat{\mu}(y) = \hat{\mu}(x_0) = \hat{\mu}(z).$$

Con base en lo anterior, podemos definir la función $\mu : A^S \rightarrow A$ como $\mu(z) := \hat{\mu}(\hat{z})$, para toda $z \in A^S$, donde $\hat{z} \in A^G$ es cualquier extensión de la función $z : S \rightarrow A$. Por G -equivarianza, tenemos que para cualquier $x \in A^G$, $g \in G$,

$$\tau(x)(g) = g^{-1} \cdot \tau(x)(e) = \tau(g^{-1} \cdot x)(e) = \hat{\mu}(g^{-1} \cdot x) = \mu((g^{-1} \cdot x)|_S).$$

Así, τ es un autómata celular con conjunto memoria S y función local $\mu : A^S \rightarrow A$. \square

4. EL CONJUNTO MEMORIA MÍNIMO

Los autómatas celulares no tienen conjuntos memoria únicos. Si $S \subseteq G$ es un conjunto memoria para un autómata celular $\tau : A^G \rightarrow A^G$, con respectiva función local $\mu : A^S \rightarrow A$, entonces para cualquier superconjunto finito $S' \supseteq S$ podemos definir una función local $\mu' : A^{S'} \rightarrow A$ como

$$\mu'(z) := \mu(z|_S), \quad \forall z \in A^{S'}.$$

Es sencillo observar que μ' también define al autómata celular τ :

$$\tau(x)(g) = \mu((g^{-1} \cdot x)|_S) = \mu'((g^{-1} \cdot x)|_{S'}), \quad \forall x \in A^G, g \in G.$$

Por lo tanto, S' es un conjunto memoria para $\tau : A^G \rightarrow A^G$.

A pesar de lo anterior, todo autómata celular tiene un único conjunto memoria de cardinalidad mínima [3, Sec. 1.5]. Para demostrar esto, primero vamos a probar que la intersección de dos conjuntos memoria siempre es un conjunto memoria.

Lema 4.1. *Sea $\tau : A^G \rightarrow A^G$ un autómata celular con conjuntos memoria S_1 y S_2 . Entonces $S_1 \cap S_2$ también es un conjunto memoria para τ .*

Demostración. Sean $\mu_1 : A^{S_1} \rightarrow A$ y $\mu_2 : A^{S_2} \rightarrow A$ funciones locales que definen a $\tau : A^G \rightarrow A^G$ respecto a los conjuntos memoria S_1 y S_2 . Por definición tenemos que

$$\mu_1(x|_{S_1}) = \tau(x)(e) = \mu_2(x|_{S_2}), \quad \forall x \in A^G. \quad (3)$$

Vamos a definir una función $\mu : A^{S_1 \cap S_2} \rightarrow A$ como

$$\mu(x) := \mu_1(\hat{x}|_{S_1}), \quad \forall x \in A^{S_1 \cap S_2},$$

donde $\hat{x} \in A^G$ es cualquier extensión de la función $x \in A^{S_1 \cap S_2}$. Para probar que μ está bien definida, sean $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in A^G$ tales que $\hat{x}_1|_{S_1 \cap S_2} = \hat{x}_2|_{S_1 \cap S_2}$. Definimos $z \in A^G$ como

$$z(g) := \begin{cases} \hat{x}_1(g) & \text{si } g \in S_1 \\ \hat{x}_2(g) & \text{si } g \in G \setminus S_1 \end{cases}$$

Notemos que $z|_{S_1} = \hat{x}_1|_{S_1}$ y $z|_{S_2} = \hat{x}_2|_{S_2}$. Por (3), tenemos que

$$\mu_1(\hat{x}_1|_{S_1}) = \mu_1(z|_{S_1}) = \mu_2(z|_{S_2}) = \mu_2(\hat{x}_2|_{S_2}) = \mu_1(\hat{x}_2|_{S_1}).$$

Claramente, $\mu : A^{S_1 \cap S_2} \rightarrow A$ es una función local que define a τ , por lo que $S_1 \cap S_2$ es un conjunto memoria para τ \square

Teorema 4.2. *Sea $\tau : A^G \rightarrow A^G$ un autómata celular. Sea S_0 un conjunto memoria de de cardinalidad mínima (el cual existe, por el Principio del Buen Orden).*

1. *Un subconjunto finito $S \subseteq G$ es un conjunto memoria de τ si y solo si $S_0 \subseteq S$.*
2. *S_0 es único, es decir, si T_0 es un conjunto memoria de τ de cardinalidad mínima, entonces $S_0 = T_0$.*

Demostración. 1. Como demostramos al inicio de esta sección, cualquier superconjunto finito de un conjunto memoria es conjunto memoria, por lo que la implicación recíproca está clara. Supongamos ahora que $S \subseteq G$ es cualquier conjunto memoria de τ . Por el Lema 4.1, $S \cap S_0$ es un conjunto memoria para

τ . Como $|S \cap S_0| \leq |S_0|$, la minimalidad de la cardinalidad de S_0 implica que $|S \cap S_0| = |S_0|$. Al ser $S \cap S_0$ un subconjunto del conjunto finito S_0 , debemos tener que $S \cap S_0 = S_0$. Por lo tanto, $S_0 \subseteq S$.

2. Aplicamos el punto (1.) a T_0 para obtener $S_0 \subseteq T_0$. Sin embargo, por la minimalidad de la cardinalidad de T_0 , y al ser conjuntos finitos, debemos tener que $T_0 = S_0$.

□

Definición 4.1 (conjunto memoria mínimo). El conjunto memoria mínimo (CMM) de un autómata celular $\tau : A^G \rightarrow A^G$, denotado por $\text{cmm}(\tau)$, es el único conjunto memoria de τ de cardinalidad mínima. El conjunto memoria mínimo de una función local $\mu : A^S \rightarrow A$, denotado por $\text{cmm}(\mu)$, es el conjunto memoria mínimo del autómata celular definido por μ .

En adelante, para cada $s \in S$, será conveniente considerar la función $\text{Res}_s : A^S \rightarrow A^{S \setminus \{s\}}$ definida por

$$\text{Res}_s(z) := z|_{S \setminus \{s\}}, \quad \forall z \in A^S.$$

Decimos que un elemento $s \in S$ es *esencial* para una función local $\mu : A^S \rightarrow A$ si existen $z, w \in A^S$ tales que

$$\text{Res}_s(z) = \text{Res}_s(w) \quad \text{pero} \quad \mu(z) \neq \mu(w).$$

Proposición 4.3. Sea $\mu : A^S \rightarrow A$ una función local. Entonces,

$$\text{cmm}(\mu) = \{s \in S : s \text{ es esencial para } \mu\}.$$

Demostración. Sea $S_0 := \text{cmm}(\mu)$. Como S_0 es un conjunto de memoria para el autómata celular definido por μ , debemos tener $S_0 \subseteq S$ por el Teorema 4.2 (1.). Supongamos que $s \in S$ no es esencial para μ . Definimos $\mu' : A^{S \setminus \{s\}} \rightarrow A$ por $\mu'(y) := \mu(\hat{y})$, para todo $y \in A^{S \setminus \{s\}}$, donde $\hat{y} \in A^S$ es cualquier extensión de y . Para demostrar que μ' está bien definida, sean $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in A^S$ dos extensiones de $y \in A^{S \setminus \{s\}}$. Luego,

$$\text{Res}_s(\hat{y}_1) = y = \text{Res}_s(\hat{y}_2) \implies \mu(\hat{y}_1) = \mu(\hat{y}_2),$$

donde la implicación se cumple porque s no es esencial para μ . Esto demuestra que μ' no depende de la extensión que tomemos, por lo que está bien definida. Como μ y μ' definen al mismo autómata celular, el Teorema 4.2 (1.) implica que $S_0 \subseteq S \setminus \{s\}$. Por lo tanto, $s \notin S_0$.

Recíprocamente, supongamos que $s \in S \setminus S_0$. Sea $\mu_0 : A^{S_0} \rightarrow A$ la función local asociada con S_0 que define al mismo autómata celular que μ . Si s es esencial para μ , existen

$z, w \in A^S$ tales que $\text{Res}_s(z) = \text{Res}_s(w)$ pero $\mu(z) \neq \mu(w)$. Sin embargo, $z|_{S \setminus \{s\}} = w|_{S \setminus \{s\}}$ implica que $\mu_0(z|_{S_0}) = \mu_0(w|_{S_0})$, ya que $s \notin S_0$. Esto es una contradicción, por lo que s no es esencial para μ . \square

Ejemplo 4.1. Sean $G := \mathbb{Z}$, $A := \{0, 1\}$ y $S := \{-1, 0, 1\}$. Consideremos el autómata celular elemental $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ definido por la función local $\mu : A^S \rightarrow A$ descrita por la siguiente tabla:

$z \in A^S$	111	110	101	100	011	010	001	000
$\mu(z) \in A$	0	1	1	0	1	0	0	0

Este autómata celular elemental es la Regla 102. En este caso, el elemento $-1 \in S$ no es esencial para μ ; esto puede deducirse tachando la coordenada correspondiente a -1 en las tuplas de A^S , y observando que no hay contradicciones en las imágenes de $x_0 x_1 \in A^{\{0,1\}}$. Con esto, podemos obtener una tabla reducida correspondiente a una función local $\mu' : A^{\{0,1\}} \rightarrow A$ que define a τ :

$z \in A^{\{0,1\}}$	11	10	01	00
$\mu'(z) \in A$	0	1	1	0

Ahora, podemos comprobar que 0 y 1 son ambos esenciales para μ' :

- La coordenada 0 es esencial porque $\text{Res}_0(11) = \text{Res}_0(01)$ pero $\mu(11) = 0 \neq 1 = \mu(01)$.
- La coordenada 1 es esencial porque $\text{Res}_1(11) = \text{Res}_1(10)$ pero $\mu(11) = 0 \neq 1 = \mu(10)$.

Por lo tanto,

$$cmm(\mu) = cmm(\mu') = \{0, 1\}.$$

Ejemplo 4.2. En el caso del función local $\mu : A^S \rightarrow A$ de la Regla 110 dada en el Ejemplo 3.3, podemos comprobar que todos los elementos de $S = \{-1, 0, 1\}$ son esenciales para μ , por lo que $cmm(\mu) = S$.

Ejercicio 4.1. Encuentra el conjunto memoria mínimo de los autómatas celulares elementales Regla 170, Regla 151, y Regla 255.

Algoritmo 1: Algoritmo para encontrar el conjunto memoria mínimo

Input: Conjunto memoria S y función local $\mu : A^S \rightarrow A$
Output: Conjunto memoria mínimo S_0

```

1  $S_0 := \emptyset$ ;
2 for  $s \in S$  do
3   for  $p, q \in A^S$  do
4     if  $(Res_s(p) = Res_s(q)) \wedge (\mu(p) \neq \mu(q))$  then
5        $S_0 := S_0 \cup \{s\}$ ;
6       break
7     end
8   end
9 end
10 return  $S_0$ 

```

Cuando $A = \{0, 1\}$, veremos que existe una conexión interesante entre el conjunto memoria mínimo de un autómata celular y el conjunto de *patrones generadores*.

Definición 4.2 (patrones generadores). Sea $A = \{0, 1\}$ y sea S un subconjunto finito de un grupo G tal que $e \in S$. Los *patrones generadores* $\mathcal{P} \subseteq A^S$ de una función local $\mu : A^S \rightarrow A$ (también llamados *transiciones activas*) se definen como

$$\mathcal{P} := \{z \in A^S : \mu(z) \neq z(e)\}.$$

En otras palabras, \mathcal{P} es el conjunto de patrones en los cuales $\mu : A^S \rightarrow A$ no actúa como la proyección π_e . Observemos que si \mathcal{P} son los patrones generadores de μ , entonces

$$\mu(z) = \begin{cases} z(e)^c & \text{si } z \in \mathcal{P} \\ z(e) & \text{si } z \notin \mathcal{P}, \end{cases} \quad \forall z \in A^S,$$

donde $z(e)^c$ denota al complemento de $z(e) \in A = \{0, 1\}$.

Además, $\mu : A^S \rightarrow A$ es igual a la proyección a e (lo que significa que el autómata celular definido por μ es la función identidad) si y solo si $\mathcal{P} = \emptyset$. Se sigue por definición que cada función local $\mu : A^S \rightarrow A$ tiene un único conjunto de patrones generadores \mathcal{P} .

Ejemplo 4.3. Sean $G := \mathbb{Z}$, $S := \{-1, 0, 1\}$ y $A := \{0, 1\}$.

1. Sea $\mu : A^S \rightarrow A$ la función local de la Regla 110. Entonces, μ es generado por el conjunto de patrones $\mathcal{P} = \{111, 101, 001\}$.

2. Sean $\mu : A^S \rightarrow A$ y $\mu' : A^{\{0,1\}} \rightarrow A$ las funciones locales de la Regla 102 dadas en el Ejemplo 4.1. Entonces μ es generado por el conjunto de patrones $\{111, 101, 011, 001\}$ y μ' es generado por el conjunto de patrones $\{11, 01\}$.

Ahora definimos uno de los objetos fundamentales de estudio en dinámica simbólica.

Definición 4.3 (subshift). Un subconjunto $X \subseteq A^G$ es un *subshift* si es cerrado en la topología prodiscreta de A^G y *G-invariante* en el siguiente sentido

$$g \cdot x \in X, \quad \forall g \in G, x \in X.$$

Resulta que cualquier subshift $X \subseteq A^G$ puede definirse a través de un (posiblemente infinito) conjunto de *patrones prohibidos*. En nuestro contexto, para $\mathcal{P} \subseteq A^S$, consideramos el subshift $X_{\mathcal{P}} \subseteq A^G$ definido por los patrones prohibidos \mathcal{P} :

$$X_{\mathcal{P}} := \{x \in A^G : (g \cdot x)|_S \notin \mathcal{P}, \forall g \in G\}.$$

Ejercicio 4.2. Demuestra que efectivamente el conjunto $X_{\mathcal{P}}$ es cerrado y *G-invariante*.

El conjunto $X_{\mathcal{P}}$ es un subshift *de tipo finito*, ya que el conjunto de patrones prohibidos es un conjunto finito.

Lema 4.4. Sea $A = \{0, 1\}$ y sea S un subconjunto finito de un grupo G tal que $e \in S$. Sea $\mathcal{P} \subseteq A^S$ el conjunto de patrones generadores de una función local $\mu : A^S \rightarrow A$, y sea $\tau : A^G \rightarrow A^G$ el autómata celular definido por μ . Entonces el conjunto de puntos fijos de τ ,

$$\text{Fix}(\tau) := \{x \in A^G : \tau(x) = x\},$$

es igual al subshift $X_{\mathcal{P}}$.

Demostración. Observemos que $x \in \text{Fix}(\tau)$ si y solo si $\tau(x) = x$, lo cual se cumple si y solo si $\tau(x)(g) = x(g)$ para toda $g \in G$. Por la definición de autómata celular y de acción shift, lo anterior es equivalente a

$$\mu((g^{-1} \cdot x)|_S) = (g^{-1} \cdot x)(e), \quad \forall g \in G.$$

Por definición de patrones generadores, la igualdad anterior se cumple si y solo si $(g^{-1} \cdot x)|_S \notin \mathcal{P}$, para toda $g \in G$. Finalmente, esto es equivalente a que $x \in X_{\mathcal{P}}$. \square

Sean $A := \{0, 1\}$ y $S := \{-1, 0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$. La siguiente Tabla 1, obtenida mediante cálculos computacionales, muestra los tamaños de los conjuntos memoria mínimos de funciones locales $\mu : A^S \rightarrow A$ de acuerdo con los tamaños de su conjunto generador de patrones $\mathcal{P} \subseteq A^S$.

TABLA 1. Patrones generadores y conjuntos memoria mínimos de ECA.

$ \mathcal{P} $	Número de funciones locales	Tamaño de CMM
0	1	1
1	8	3
2	28	3 o 2
3	56	3
4	70	0, 1, 2, o 3
5	56	3
6	28	3 o 2
7	8	3
8	1	1

Dado que $|A^S| = 8$, hay $\binom{8}{k}$ funciones locales generadas por $k := |\mathcal{P}|$ patrones diferentes. Cuando $k = 0$, el autómata celular debe ser la identidad, mientras que cuando $k = 8$, el autómata celular debe ser la regla que intercambia 0's y 1's (Regla 51). La mayor variedad de conjuntos de memoria mínimos aparece cuando $k = 4$, incluyendo los autómatas celulares constantes (Reglas 0 y 255) cuyo conjunto memoria mínimo es el vacío \emptyset . Observemos también que la tabla presenta una simetría respecto a la fila central.

El siguiente teorema es el resultado principal obtenido en el artículo [2].

Teorema 4.5. *Sea G un grupo y sea $A = \{0, 1\}$. Sea $S \subseteq G$ un subconjunto finito tal que $e \in S$ y $|S| \geq 2$. Sea $\mu : A^S \rightarrow A$ una función local con patrones generadores $\mathcal{P} \subseteq A^S$. Entonces:*

1. Si $|\mathcal{P}| \neq |A|^{|S|} - |A|^{|S|-1}$, entonces $e \in \text{cmm}(\mu)$.
2. Si $|\mathcal{P}|$ no es un múltiplo de $|A|$, entonces $\text{cmm}(\mu) = S$.

5. COMPOSICIÓN DE AUTÓMATAS CELULARES

Sobre cualquier grupo, la composición de dos autómatas celulares es nuevamente un autómata celular. A continuación, demostraremos este hecho y después explicaremos de forma detallada cómo obtener la función local de la composición de dos autómatas celulares.

Observación 5.1. Sea S un conjunto memoria de un autómata celular $\tau : A^G \rightarrow A^G$. Si $x, y \in A^G$ satisfacen que $x|_{gS} = y|_{gS}$ para algún $g \in G$, entonces

$$\tau(x)(g) = \mu((g^{-1} \cdot x)|_S) = \mu((g^{-1} \cdot y)|_S) = \tau(y)(g).$$

Teorema 5.1. Sean $\tau : A^G \rightarrow A^G$ y $\sigma : A^G \rightarrow A^G$ autómatas celulares con conjuntos memoria T y S , respectivamente. Entonces $\tau \circ \sigma : A^G \rightarrow A^G$ es un autómata celular con conjunto memoria $TS := \{ts : t \in T, s \in S\}$.

Demostración. Sean T y S conjuntos memoria para τ y σ , respectivamente. Sea $\hat{\mu} : A^G \rightarrow A$ definida por $\hat{\mu}(x) = \tau \circ \sigma(x)(e)$, para toda $x \in A^G$. Demostraremos que si $x, y \in A^G$ satisfacen que $x|_{TS} = y|_{TS}$, entonces $\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(y)$. Ciertamente, por la observación anterior, $\sigma(x)(t) = \sigma(y)(t)$ para toda $t \in T$. Luego $\sigma(x)|_T = \sigma(y)|_T$, lo que implica que $\tau(\sigma(x)) = \tau(\sigma(y))$. Con esto podemos definir una función local $\mu : A^{TS} \rightarrow A$ de la forma $\mu(z) = \hat{\mu}(z')$, donde $z \in A^{TS}$ y $z' \in A^G$ es cualquier extensión de z . Esta es la función local de $\tau \circ \sigma : A^G \rightarrow A^G$, lo que demuestra que $\tau \circ \sigma$ es un autómata celular. \square

Incluso si T y S son conjuntos memoria mínimos para τ y σ , respectivamente, el conjunto memoria mínimo de $\tau \circ \sigma$ puede ser un subconjunto propio de TS [4, Ex. 1.27].

Si $\mu : A^T \rightarrow A$ y $\nu : A^S \rightarrow A$ son las funciones locales de τ y σ , respectivamente, entonces la función local de $\tau \circ \sigma$ es $\mu \star \nu : A^{TS} \rightarrow A$ dada por

$$(\mu \star \nu)(z) = \mu(\nu(z_t)_{t \in T}), \quad \forall z \in A^{ST},$$

donde $z_t \in A^S$ está definido por $z_t(s) := z(ts)$, para toda $t \in T, s \in S$ ([3, Obs. 1.4.10]). En términos de configuraciones, la igualdad anterior puede escribirse como

$$(\mu \star \nu)(x|_{ST}) = \mu(\nu((t^{-1} \cdot x)|_S)_{t \in T}), \quad \forall x \in A^G.$$

Ejemplo 5.1. Sean $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{-1, 0, 1\}$. Para toda $\mu : A^S \rightarrow A$ y $\nu : A^S \rightarrow A$, la función $\mu \star \nu : A^{S+S} \rightarrow A$, con $S + S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, se define por

$$(\mu \star \nu)(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2) := \mu(\nu(x_{-2}, x_{-1}, x_0), \nu(x_{-1}, x_0, x_1), \nu(x_0, x_1, x_2)),$$

para toda $(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2) \in A^{S+S}$.

Ejemplo 5.2. Sean R_{12} y R_{68} las Reglas 12 y 68, respectivamente, las cuales son autómatas celulares elementales sobre $A^{\mathbb{Z}}$. Los conjuntos memoria mínimos de R_{12} y R_{68} son, respectivamente, $S = \{-1, 0\}$, $T = \{0, 1\}$, y sus funciones locales, μ_{12} y μ_{68} , están definidas en la Figura 2, recordando que identificamos a 0 con un cuadro blanco y a 1 con un cuadro negro. Explicaremos cómo hacer la composición de estas reglas.

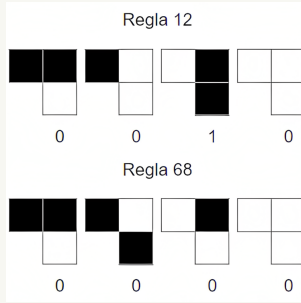


FIGURA 2. Reglas 12 y 68 de acuerdo a sus conjuntos memoria mínimos $S = \{-1, 0\}$ y $T = \{0, 1\}$, respectivamente.

Por el Teorema 5.1, un conjunto memoria de la composición $R_{68} \circ R_{12}$ es

$$S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\} = \{-1, 0, 1\}.$$

Así podemos aplicar la composición $R_{68} \circ R_{12}$ a una configuración arbitraria $x \in A^{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} (R_{68} \circ R_{12})(\dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots) &= R_{68}(R_{12}(\dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots)) \\ &= R_{68}(\dots \mu_{12}(x_{-2} x_{-1}) \mu_{12}(x_{-1} x_0) \mu_{12}(x_0 x_1) \dots) \\ &= \dots \mu_{68}(\mu_{12}(x_{-1} x_0) \mu_{12}(x_0 x_1)) \dots \end{aligned}$$

En la Figura 3 observamos cómo hacer la tabla de la función local de la composición $R_{68} \circ R_{12}$, donde cada fila representa aplicar el autómata celular a cada elemento del dominio. Por ejemplo, en el segundo elemento del dominio, 110, aplicamos R_{12} en los primeros dos cuadros, 11, obteniendo 0 y luego en los siguientes dos cuadros, 10, obteniendo 0. Finalmente, aplicamos R_{68} al resultado obtenido anteriormente, 00, obteniendo 0. Este procedimiento lo hacemos en cada uno de los ocho elementos del dominio, obteniendo finalmente la función local de la composición.

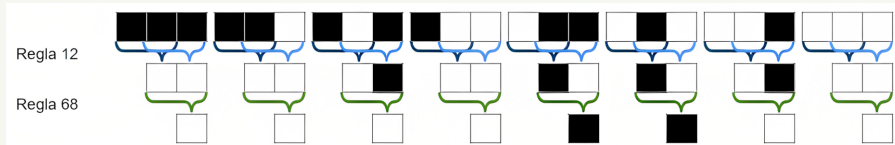


FIGURA 3. Composición de la regla 12 y 68.

Ejercicio 5.1. Las funciones locales $\mu_{80} : A^{\{-1,1\}} \rightarrow A$ y $\mu_{12} : A^{\{-1,0\}} \rightarrow A$ de las Reglas 80 y 12 están dadas por las siguientes tablas:

$z \in A^{\{-1,1\}}$	11	10	01	00
$\mu_{80}(z)$	0	1	0	0

$z \in A^{\{-1,0\}}$	11	10	01	00
$\mu_{12}(z)$	0	0	1	0

Encuentra la función local de la composición de estos dos autómatas celulares.

Ahora presentaremos el algoritmo para hacer la composición de autómatas celulares unidimensionales (sobre $A^{\mathbb{Z}}$) usando sus funciones locales. La función $\text{comp}(\mu_1, S_1, \mu_2, S_2)$ hace la composición $\mu_1 \star \mu_2 : A^{S_1+S_2} \rightarrow A$ de dos funciones locales $\mu_1 : A^{S_1} \rightarrow A$ y $\mu_2 : A^{S_2} \rightarrow A$, donde $S_1 \subseteq \mathbb{Z}$ y $S_2 \subseteq \mathbb{Z}$ son subconjuntos finitos. Computacionalmente, podemos pensar en una función local como un par (μ_1, S_1) , el cual representa a la tabla que enlista las imágenes de todos los elementos de A^{S_1} bajo μ_1 .

La función $\text{comp}(\mu_1, S_1, \mu_2, S_2)$ determina la tabla de la función local de la composición $\mu_1 \star \mu_2$. Primero crea el conjunto $S = S_1 + S_2$ y al dominio $\text{dom} = A^S$ de la composición, el cual es una lista de listas de tamaño $|S|$ con todas las posibles combinaciones de símbolos del alfabeto A , la cual va a estar ordenada de forma lexicográfica ascendente. La tabla final es un arreglo de tamaño $m := |A|^{|S|}$. Para cada $i \in [1, m]$ hacemos lo siguiente. La lista Y es $\text{dom}[i]$ indexado por S . Para cada elemento j en S_1 , vamos a crear una sublista L de Y con los elementos que corresponden al conjunto memoria S_2 con la traslación j . Es decir, los elementos en L son $Y[k+j]$, para cada $k \in S_2$. Luego, evaluamos la función local μ_2 en L y lo agregamos a la lista B . Al aplicar esto para cada elemento de S_1 podemos evaluar la función local μ_1 en B y así obtenemos el valor de la función local de la composición $\mu_1 \star \mu_2$ correspondiente al elemento en el dominio $\text{dom}[i]$: esto es la i -ésima entrada de la tabla de la composición. En el siguiente algoritmo mostramos el pseudocódigo que utilizamos.

Algoritmo 2: comp(). Composición $\mu_1 * \mu_2$ de dos funciones locales.

Input: μ_1, S_1, μ_2, S_2
Output: Tabla de la función local de $\mu_1 * \mu_2$

```

1 S := S1 + S2;
2 dom := AS;
3 m := |dom|;
4 tabla := arreglo de tamaño m;
5 for i ∈ [1, m] do
6   B := lista vacía;
7   Y := dom[i] indexada por S;
8   for j ∈ S1: do
9     L := lista vacía;
10    for k ∈ S2: do
11      | Agregar Y[k+j] a L;
12    end
13    Agregar μ2(L) a B;
14  end
15  tabla[i]=μ1(B)
16 end
17 mostrar tabla;
```

Un *diagrama de espacio-tiempo* en el contexto de autómatas celulares sobre $A^{\mathbb{Z}}$ es una gráfica que muestra cómo evoluciona una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ al aplicar de manera iterada un autómata celular $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$. El *tiempo* $k \geq 0$ se interpreta como la k -ésima iteración $\tau^k(x)$, donde

$$\tau^k = \underbrace{\tau \circ \tau \circ \dots \circ \tau}_{k \text{ veces}}.$$

Así, la k -ésima fila del diagrama espacio-tiempo contiene a la sucesión bi-infinita $\tau^k(x) \in A^{\mathbb{Z}}$.

Ejemplo 5.3. Consideremos la configuración inicial

$$x = \dots 00000000000000000000000001 \dots$$

y al a -autómata celular elemental $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ dado por la Regla 110, cuya función local $\mu : A^{\{-1,0,1\}} \rightarrow A$ la podemos ver en la Figura 4.

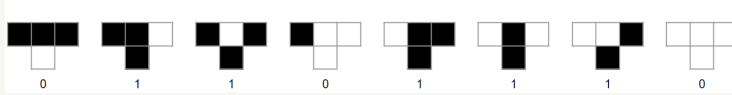


FIGURA 4. Función local de la Regla 110.

Al aplicar τ a la configuración x obtenemos

$$\tau(x) = \dots 00000000000000000000000011\dots$$

Luego, aplicamos τ a la nueva configuración

$$\tau^2(x) = \dots 000000000000000000000000111\dots$$

En la figura 5 se observa el diagrama de espacio-tiempo de la Regla 110, después de varias iteraciones. En el diagrama podemos observar una evolución compleja (no periódica) de la configuración inicial.

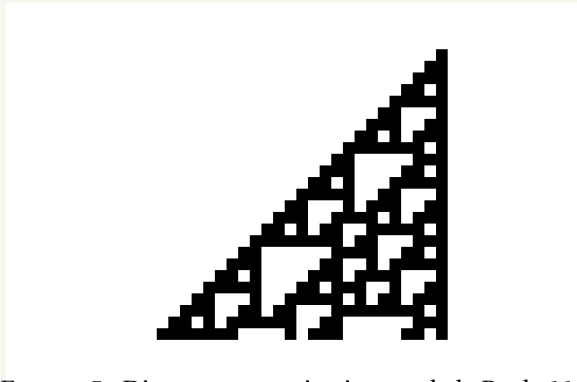


FIGURA 5. Diagrama espacio-tiempo de la Regla 110.

Con base el comportamiento del diagrama espacio-tiempo de una configuración aleatoria, Stephen Wolfram [11] clasificó a los autómatas celulares elementales en cuatro clases con orden creciente de complejidad: uniformes, periódicos, caóticos y complejos. La Regla 110 se encuentra en la clase de autómatas celulares complejos, y, sorprendentemente, se demostró que es capaz de simular a una Máquina de Turing Universal [5].

5.1. Autómatas celulares definidos por un patrón. En esta sección estudiaremos más a fondo a los autómatas celulares generados por un único patrón (de acuerdo a la Definición 4.2).

Definición 5.1 (autómata celular definido por un patrón). Sea $S \subseteq G$ un subconjunto finito tal que $e \in S$. Para un patrón $p : S \rightarrow A$, definimos $\mu_p^a : A^S \rightarrow A$ por

$$\mu_p^a(z) := \begin{cases} a & \text{si } z = p, \\ z(e) & \text{si } z \neq p. \end{cases}$$

para toda $z \in A^S$, donde $a \in A \setminus \{p(e)\}$. Sea $\tau_p^a : A^G \rightarrow A^G$ el autómata celular definido por la función local μ_p^a .

Resulta que los autómatas celulares definidos por un patrón son comúnmente *idempotentes*.

Definición 5.2 (idempotente). Un autómata celular $\tau : A^G \rightarrow A^G$ es *idempotente* si $\tau^2 = \tau$.

Computacionalmente, una forma de detectar si un autómata celular τ_p^a es idempotente es calcular la composición τ^2 y luego identificar si τ^2 es igual a τ , reduciendo la tabla de τ^2 por medio del algoritmo del conjunto memoria mínimo. Sin embargo, este procedimiento es computacionalmente costoso, pues involucra calcular toda la tabla de la composición y luego calcular el conjunto memoria mínimo. A continuación veremos cómo podemos obtener un algoritmo más simple y eficaz.

Lema 5.2. *Un autómata celular $\tau : A^G \rightarrow A^G$ es idempotente si y solo si*

$$\text{Fix}(\tau) = \text{im}(\tau).$$

Demostración. En general, siempre se cumple que $\text{Fix}(\tau) \subseteq \text{im}(\tau)$, pues si $x \in \text{Fix}(\tau)$, entonces $x = \tau(x) \in \text{im}(\tau)$.

Supongamos que τ es idempotente, y sea $y \in \text{im}(\tau)$. Luego, existe $x \in A^G$ tal que $\tau(x) = y$. Aplicando de ambos lados τ y usando idempotencia, obtenemos que

$$y = \tau(x) = \tau^2(x) = \tau(y).$$

Por lo tanto, $y \in \text{Fix}(\tau)$, y $\text{Fix}(\tau) = \text{im}(\tau)$.

Supongamos ahora que $\text{Fix}(\tau) = \text{im}(\tau)$, y sea $x \in A^G$ una configuración arbitraria. Entonces, $\tau(x) \in \text{im}(\tau) = \text{Fix}(\tau)$, implica que $\tau(\tau(x)) = \tau(x)$. Esto demuestra que $\tau^2 = \tau$, por lo que τ es idempotente. \square

Lema 5.3. Sea $S \subseteq G$ finito tal que $e \in S$ y sea $p \in A^S$ un patrón. Sea X_p el subshift con patrón prohibido p . Entonces,

$$X_p \subseteq \text{im}(\tau_p^a),$$

con igualdad si y solo si τ_p^a es idempotente.

Demostración. Este resultado se obtiene aplicando el lema anterior, y recordando que por el Lema 4.4, $\text{Fix}(\tau) = X_p$. \square

El lema anterior nos dice que un autómata celular definido por un patrón τ_p^a es idempotente si y solo si en ninguna configuración en $\text{im}(\tau_p^a)$ aparece el patrón p . Sin embargo, como lo establece el siguiente lema, no es necesario analizar todas las configuraciones de $\text{im}(\tau_p^a)$ para detectar si aparece o no el patrón p .

Lema 5.4. Sea $\tau : A^G \rightarrow A^G$ cualquier autómata celular con función local $\mu : A^S \rightarrow A$. Un patrón $p \in A^S$ aparece en alguna configuración de $\text{im}(\tau)$ si y solo si existe un patrón $q \in A^{S^2}$ tal que

$$p = \mu(q_s)_{s \in S},$$

donde $q_s \in A^S$ está definido por $q_s(s') := q(ss')$, $\forall s' \in S$.

Demostración. Decir que el patrón $p \in A^S$ aparece en una configuración $\tau(z) \in \text{im}(\tau)$ es equivalente a decir que existe $g \in G$ tal que

$$p = (g \cdot \tau(z))|_S = (\tau(g \cdot z))|_S,$$

donde la última igualdad se obtiene por G -equivarianza. Tomando $x := g \cdot z$, deducimos que p aparece en alguna configuración de $\text{im}(\tau)$ si y solo si existe $x \in A^G$ tal que

$$p = \tau(x)|_S \iff p(s) = \tau(x)(s), \forall s \in S.$$

En términos de la función local, lo anterior es equivalente a

$$p = \mu((s^{-1} \cdot x)|_S)_{s \in S}. \quad (4)$$

Ahora definimos $q \in A^{S^2}$ tal que $q|_{S^2} = x|_{S^2}$. Observemos que $q_s = (s^{-1} \cdot x)|_S$, debido a que para toda $s' \in S$,

$$(s^{-1} \cdot x)(s') = x(ss') = q(ss') = q_s(s').$$

El resultado queda establecido al sustituir $q_s = (s^{-1} \cdot x)|_S$ en (4). \square

Ejemplo 5.4. Sea $S = \{-1, 0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$. En este caso, podemos escribir a un patrón $p \in A^S$ como $p = p_{-1}p_0p_1$. Por los resultados anteriores, el autómata celular $\tau_p^a : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ es idempotente si y solo si p no aparece en $\tau_p^a(x)$, $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}$, lo cual es equivalente a que

$$p_{-1}p_0p_1 \neq \mu_p^a(x_{-2}x_{-1}x_0)\mu_p^a(x_{-1}x_0x_1)\mu_p^a(x_0x_1x_2),$$

para toda $(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2) \in A^{S+S}$.

El algoritmo simplificado para determinar si τ_p^a es idempotente consiste en lo siguiente. Para cada $q \in A^{2S}$ y para cada $s \in S$, aplicamos la función local μ_p^a a q_s . Si la cadena resultante $(\mu_p^a(q_s))_{s \in S}$ es igual al patrón p , esto quiere decir que el autómata celular τ_p^a no es idempotente. Si para toda $q \in A^{2S}$, $(\mu_p^a(q_s))_{s \in S}$ es diferente que el patrón p , entonces esto quiere decir que τ_p^a es idempotente.

Algoritmo 3: Idempotencia de τ_p^a .

Input: $p, S =$ patrón, conjunto memoria tal que $e \in S$

Output: Verdadero o falso : τ_p^a es idempotente

```

1  $S^2 = \{ss' : s, s' \in S\}$ ;
2  $A^{S^2} = \{q : S^2 \rightarrow A\}$ ;
3 for  $q \in A^{S^2}$  : do
4    $\ell =$  lista vacía;
5   for  $s \in S$  : do
6     | Agregar  $\mu_p^a(q_s)$  a  $\ell$ ;
7   end
8   if  $\ell = p$  then
9     | return  $\tau_p^a$  no es idempotente;
10  end
11 end
12 return  $\tau_p^a$  es idempotente;
```

Ejercicio 5.2. Lee el QR de la figura 6, selecciona las tres barras ubicadas en la izquierda, selecciona *archivo y guardar una copia en drive*.

- Prueba los patrones:
 - $p = 0100$ con $S = \{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{Z}$.
 - $p = 0001010$ con $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{Z}$.



FIGURA 6. Programa que decide la idempotencia de τ_p^a .

- Escribe si los autómatas celulares generados por estos patrones son idempotentes o no.

En el artículo [1], se obtienen algunos criterios generales que establecen cuándo un autómata celular $\tau_p^a : A^G \rightarrow A^G$ es idempotente; por ejemplo, se demostró que si $p \in A^S$ es *constante* (i.e. $p(s) = p(e), \forall s \in S$), o si p es *simétrico* (i.e. $S = S^{-1}$ y $p(s) = p(s^{-1}), \forall s \in S$), entonces $\tau_p^a : A^G \rightarrow A^G$ es idempotente.

6. DINÁMICA DE AUTÓMATAS CELULARES

Los sistemas dinámicos fueron introducidos en el siglo XVII y tienen su origen en la mecánica newtoniana. Existe un problema muy famoso de la mecánica newtoniana, conocido como el problema de los n cuerpos. Consiste en la interacción de n cuerpos celestes influenciados por sus respectivos campos gravitatorios. Cuando tenemos solo dos cuerpos celestes, se pueden predecir sus trayectorias con facilidad y éstas no son susceptibles a pequeños cambios. Sin embargo, cuando consideramos tres o más cuerpos celestes, la situación se vuelve mucho más complicada. Este y otros problemas similares son estudiados por los *sistemas dinámicos topológicos* (SDT) desde un punto de vista geométrico y topológico. La siguiente definición formaliza el concepto de SDT.

Definición 6.1 (sistema dinámico topológico). El par (X, T) es un *sistema dinámico topológico* (SDT) si X es un espacio métrico compacto, con métrica d , y $T : X \rightarrow X$ es una función continua.

En un sistema dinámico topológico (X, T) , para todo elemento $x \in X$, definimos su *órbita* como

$$O(x) := \{T^n(x) : n \geq 0\},$$

donde T^0 se entiende como la función identidad de X .

Ejemplo 6.1. Sea $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1\}$ un espacio métrico compacto. Para todo $x \in X$, existe un $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $x = (x_1, x_2) = (\cos(\theta), 1 - \sin(\theta))$. Definimos $T : X \rightarrow X$ como $T(\cos(\theta), 1 - \sin(\theta)) = (\cos(2\theta), 1 - \sin(2\theta))$. Explicado de manera más sencilla, la función T duplica el ángulo comprendido entre el radio con extremo en el origen y el radio con extremo en cualquier otro punto, como se muestra en la Figura 9. En consecuencia tenemos que $(0, 0)$ es un punto fijo del SDT.

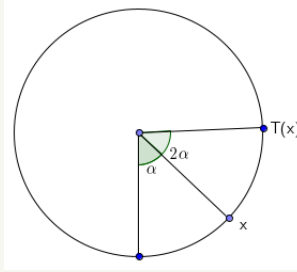


FIGURA 7. $\sphericalangle T(x) = 2\alpha = 2\sphericalangle x$

Observemos que la órbita de $x := (\cos(\theta), 1 - \sin(\theta)) \in X$ es $\{(\cos(2^n\theta), 1 - \sin(2^n\theta)) : n \geq 0\}$.

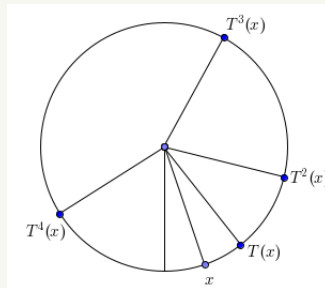


FIGURA 8. En esta figura solo tenemos los primeros 4 elementos de la órbita de x .

El orden es un concepto que se utiliza en física, biología y matemáticas. En matemáticas no existe una definición única para describirlo. Muchos consideran que algo está ordenado si puede ser previsto, organizado, o si no es caótico.

En general, las estructuras periódicas se consideran altamente ordenadas. Por ejemplo, los átomos en los cristales están ordenados de manera periódica. Otro ejemplo más visible de orden por periodicidad sería los azulejos de una ducha. Nosotros consideraremos que algo está ordenado en un SDT (X, T) si las órbitas de cualquier par de puntos cercanos en X se mantienen cercanas. A esto se le conoce como equicontinuidad o casi equicontinuidad. Aunque de cierta forma la equicontinuidad y la casi equicontinuidad están estrechamente relacionadas con lo periódico, para más información sobre periodicidad vean [9] y [10]. Antes de introducir la definición de equicontinuidad y casi equicontinuidad, veamos la siguiente definición.

Definición 6.2 (residual). Sea X un espacio métrico. Un subconjunto $Y \subseteq X$ se dice que es *residual* si existe una sucesión $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos y densos de X tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq Y$.

Recordemos que la *bola abierta* con radio $\epsilon > 0$ y centro en $x \in X$ está definida como

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Ejercicio 6.1 (Teorema de Baire). Consideremos X un espacio métrico compacto. Demuestre que todo conjunto residual es no vacío y denso.

Definición 6.3 (equicontinuidad). Sea (X, T) un SDT. Decimos que $x \in X$ es un *punto de equicontinuidad* si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{diám}(T^n(B_\delta(x))) = \sup\{d(T^n(x), T^n(y)) : y \in B_\delta(x)\} < \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Decimos que (X, T) es *equicontinuo* si todo elemento de X es un punto equicontinuo. Además, decimos que (X, T) es *casi equicontinuo* si el conjunto de puntos de equicontinuidad es un conjunto residual.

Denotemos al conjunto de puntos equicontinuos de (X, T) como Σ . Por Ejercicio 6.1, también podemos decir que (X, T) es casi equicontinuo si Σ es denso en X .

Ejercicio 6.2. Demuestra que todo SDT equicontinuo es casi equicontinuo.

Así como tenemos una definición para describir el orden, tenemos la siguiente definición para describir un sistema “caótico”.

Definición 6.4 (sensibilidad). Sea (X, T) un SDT. Decimos que (X, T) es *sensible* si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo conjunto abierto no vacío $U \subseteq X$ existen $x, y \in U$ y $n > 0$ tal que

$$d(T^n(x), T^n(y)) > \epsilon.$$

Un ejemplo muy importante de sistema dinámico topológico está dado por la acción shift. Con $A = \{0, 1\}$, sea $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ la función definida como

$$\sigma(x)(i) = x(i+1), \quad \forall x \in A^{\mathbb{Z}}.$$

Es común llamar a σ la *función shift*, pues puede ser definida mediante la acción shift como $\sigma(x) = (-1) \cdot x$, para toda $x \in A^{\mathbb{Z}}$. La métrica considerada en el SDT $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ es la misma definida en la Sección 3.1; explícitamente definimos a la métrica $d : A^{\mathbb{Z}} \times A^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ como

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 2^{-\min\{n \geq 0 : x|_{[-n, n]} \neq y|_{[-n, n]}\}} & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

para todo $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$.

Ejercicio 6.3. Demuestra que el SDT $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ es sensible.

El siguiente ejercicio es para demostrar que las Definiciones 6.3 y 6.4 son mutuamente excluyentes.

Ejercicio 6.4. Demuestra que si un SDT es casi equicontinuo, entonces no es sensible.

Aunque pareciera que existe un dicotomía en los SDTs, es decir, todo SDT es casi equicontinuo si y solo si no es sensible, esto no es cierto en general.

Ejemplo 6.2. Consideremos

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x)^2 + (z-1)^2 = 1, y = 0\}, \\ T(r \cos t, r \sin t, 0) &= (r \cos 2t, r \sin 2t, 0), \\ T(\cos t, 0, 1 - \sin t) &= (\cos 2t, 0, 1 - \sin 2t). \end{aligned}$$

Para visualizar mejor este SDT apoyémonos en la siguiente figura. La dinámica tanto en el círculo como en el disco es la misma que en el Ejemplo 6.1.

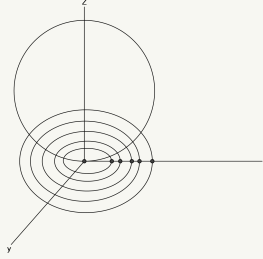


FIGURA 9. Esta es una imagen de [9].

Tenemos que (X, T) no tiene puntos de equicontinuidad pero tampoco es sensible.

Ejercicio 6.5. Da un bosquejo de porqué este SDT no tiene puntos equicontinuos pero tampoco sensible.

El SDT del ejemplo anterior carece de una propiedad con la cual sí podríamos asegurar la dicotomía antes mencionada. Antes de mencionar dicha propiedad definamos los siguientes conjuntos. Para cada $0 < \epsilon$, definamos el siguiente conjunto

$$\Sigma_\epsilon := \{x \in X : \exists \delta > 0, \forall y, z \in B_\delta(x), \forall n \geq 0, d(T^n(y), T^n(z)) < \epsilon\}.$$

Lema 6.1 ([9]). *Sea (X, T) un SDT. Para todo $0 < \epsilon$, el conjunto Σ_ϵ cumple las siguientes propiedades:*

1. $T^{-1}(\Sigma_\epsilon) \subseteq \Sigma_\epsilon$ o $T(X \setminus \Sigma_\epsilon) \subseteq X \setminus \Sigma_\epsilon$;
2. Σ_ϵ es abierto;
3. $\Sigma = \bigcap_{l > 0} \Sigma_{\frac{1}{l}}$.

Demostración. 1. Sea $x \in X \setminus \Sigma_\epsilon$. Esto quiere decir que para todo $\delta > 0$ existen $z, y \in B_\delta(x)$ tales que para algún $N > 0$ tenemos $d(T^N(x), T^N(y)) \geq \epsilon$. Queremos demostrar que $T(x) \in X \setminus \Sigma_\epsilon$. Sea $0 < \delta_0$, ya que T es continua tenemos que $T^{-1}(B_{\delta_0}(T(x)))$ es abierto. Por lo que existe un $0 < \delta_1$ tal que $B_{\delta_1}(x) \subseteq T^{-1}(B_{\delta_0}(T(x)))$. Entonces para todo $\delta \leq \delta_1$ existen $z, y \in B_\delta(x)$ tales que para algún $N > 0$ tenemos $d(T^N(x), T^N(y)) \geq \epsilon$ y $T(z), T(y) \in B_{\delta_0}(T(x))$. Por lo tanto, $T(x) \in X \setminus \Sigma_\epsilon$, es decir, $T(X \setminus \Sigma_\epsilon) \subseteq X \setminus \Sigma_\epsilon$.

2. Sea $x \in \Sigma_\epsilon$ y $0 < \delta$ tal que cumple la definición de Σ_ϵ para x . Definamos para todo $y \in B_\delta(x)$, $\delta_y = \min\{\frac{d(x,y)}{2}, \frac{\delta - d(x,y)}{2}\}$. No es difícil demostrar que $B_{\delta_y}(y) \subset B_\delta(x)$, lo que implica que Σ_ϵ es abierto.

3. Para mostrar la igualdad de los conjuntos, demostraremos las dos contenciones.
 \subseteq : Sea $x \in \Sigma$. Tenemos que para todo $0 < l$ existe un $0 < \delta$ tal que

$$\text{diam}(T^n(B_\delta(x))) \leq \frac{1}{l}.$$

Por lo tanto, satisface que $x \in \Sigma_{\frac{1}{l}}$ para todo $0 < l$. Por lo tanto $\Sigma \subseteq \bigcap_{0 < l} \Sigma_{\frac{1}{l}}$.
 \supseteq : $\Sigma \supseteq \bigcap_{0 < l} \Sigma_{\frac{1}{l}}$ (se deja como ejercicio). □

Definición 6.5 (transitividad). Sea (X, T) un SDT. Se dice que (X, T) es *transitivo* si para cada par de conjuntos abiertos no vacíos U y V existe $n > 0$ tal que $(T^{-n}U) \cap V \neq \emptyset$.

Respecto al Ejemplo 6.2 podemos ver que para los conjuntos abiertos no vacíos

$$U \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\} \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

$$V \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x)^2 + (z-1)^2 = 1, y = 0\} \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

tenemos que $T^n(U) \cap V = \emptyset$ o $T^{-n}(V) \cap U = \emptyset$, para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, (X, T) no es transitivo.

Ejercicio 6.6. Demuestra que el SDT $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ es transitivo.

Lema 6.2 ([9]). Si (X, T) es un SDT transitivo y $0 < \epsilon$, entonces Σ_ϵ es vacío o denso.

Demostración. Supongamos que Σ_ϵ no es ni vacío y ni denso. Por lo tanto $X \setminus \overline{\Sigma_\epsilon}$ es abierto y no vacío. Por transitividad existe $0 < N$ tal que

$$[X \setminus \overline{\Sigma_\epsilon}] \cap T^{-N}(\Sigma_\epsilon) \subseteq [X \setminus \overline{\Sigma_\epsilon}] \cap \Sigma_\epsilon \neq \emptyset.$$

Pero esto es una contradicción, por lo tanto tenemos que Σ_ϵ es vacío o denso. □

Una consecuencia inmediata del lema anterior es el hecho que para SDT transitivos solo basta encontrar un punto equicontinuo para decir que son casi equicontinuos.

Teorema 6.3 (Akin-Auslander-Berg '96, [9]). *SDT transitivos son sensibles si y solo si no son casi equicontinuos.*

Demostración. \Rightarrow : Sea (X, T) un SDT sensible. Por el Lema 6.2 tenemos que si existe un solo punto equicontinuo entonces Σ sería un conjunto residual, por tanto casi equicontinuo. Pero esto es una contradicción, por lo tanto (X, T) no es casi equicontinuo.

\Leftarrow : Sea (X, T) un SDT no casi equicontinuo. Entonces Σ es vacío. Por lo tanto existe un $0 < \epsilon$ tal que $\Sigma_\epsilon = \emptyset$. Es decir, para todo $x \in X$ y todo δ existen $z, y \in B_\delta(x)$ y $0 < N$ tales que $d(T^N(z), T^N(y)) \geq \epsilon$. Por tanto, T es sensible. \square

Como vimos, en general los sistemas dinámicos no cumplen la dicotomía de ser casi equicontinuos o sensibles. Sin embargo, por el teorema anterior, los SDT transitivos sí cumplen esta dicotomía; con esto, surge la pregunta ¿es esencial ser transitivo para cumplir la dicotomía? La respuesta es que no, como veremos a continuación con el conjunto de autómatas celulares sobre $A^{\mathbb{Z}}$.

Para facilitar un poco las demostraciones, usaremos una definición más sencilla de autómatas celulares.

Definición 6.6 (autómata celular sobre $A^{\mathbb{Z}}$). Se dice que la función $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ es un *autómata celular* si existe un par enteros $m \leq a$, llamados memoria y anticipación, respectivamente, y una función local $\mu : A^{a-m+1} \rightarrow A$ tal que para cualquier $x \in A^{\mathbb{Z}}$ y cualquier $i \in \mathbb{Z}$

$$\tau(x)_i = \mu(x_{[i+m, i+a]}).$$

Llamaremos a $r = \max\{-m, a\} \geq 0$ *radio* de τ y $d = a - m \geq 0$ su *diámetro*.

Ejemplo 6.3. Consideremos $A = \{0, 1\}$ y $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ definida como

$$\tau(x)(i) = \text{mód}_2(x(i) + x(i-1)x(i+1)).$$

El autómata celular de este ejemplo es un autómata celular elemental, con memoria $m = -1$ y anticipación $a = 1$.

La demostración del Teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon puede simplificarse en este caso usando la métrica de $A^{\mathbb{Z}}$, como veremos a continuación.

Teorema 6.4 (Curtis-Hedlund-Lyndon, [9]). *Una función $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ es un autómata celular si y solo si es continua y conmuta con el shift, es decir, $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.*

Demostración. \Rightarrow : Sea τ un autómata celular. Primero demostremos la continuidad. Si $x \in A^{\mathbb{Z}}$ y $0 \leq l$, entonces de acuerdo con la métrica, tenemos que

$$\tau^{-1}(B_{2^{-l}}(x)) = \{y \in A^{\mathbb{Z}} : \mu(y_{[i+m, i+a]}) = x(i) \forall i \in [-l, l]\}.$$

Entonces, $B_{2^{-[2l+(a-m+1)]}}(y) \subseteq \tau^{-1}(B_{2^{-l}}(x))$. Con esto, concluimos que $\tau^{-1}(B_{2^{-l}}(x))$ es abierto. Por tanto, τ es continua. La conmutatividad se deja como ejercicio.

⇐: Recordemos que como τ es una función continua y $A^{\mathbb{Z}}$ es un espacio compacto, entonces τ es uniformemente continua. Por lo tanto, existe un $r \geq 0$ tal que si $d(x, y) < 2^{-r}$ ($x|_{[-r, r]} = y|_{[-r, r]}$), entonces $\tau(x)(0) = \tau(y)(0)$. Definimos $\mu : A^{2r+1} \rightarrow A$ tal que para todo $x \in A^{\mathbb{Z}}$ cumple que $\mu(x|_{[-r, r]}) = \tau(x)(0)$. Debido a la conmutatividad de τ con la función shift σ , tenemos que

$$\tau(x)(i) = (\sigma^i \circ \tau)(x)(0) = (\tau \circ \sigma^i)(x)(0) = \mu(\sigma^i(x)|_{[-r, r]}) = \mu(x|_{[i-r, i+r]}).$$

Por lo tanto, μ es una función local con memoria $m = -r$ y anticipación $a = r$. \square

Ahora presentaremos una clase de autómatas celulares que siempre son sensibles.

Definición 6.7 (permutativo). Sea $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un autómata celular con función local $\mu : A^{d+1} \rightarrow A$.

1. Decimos que τ es *permutativo por la izquierda* si para todo $u \in A^d$ y todo $b \in A$ existe un único $a \in A$ tal que $\mu(au) = b$.
2. Decimos que τ es *permutativo por la derecha* si para todo $u \in A^d$ y todo $b \in A$ existe un único $a \in A$ tal que $\mu(ua) = b$.

Decimos que un autómata celular es *permutativo* si es permutativo por la derecha o izquierda.

Ejemplo 6.4. Sea $A = \{0, 1\}$. Consideremos $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ como $\tau(x)(i) = \text{mód}_2(x(i-1) + x(i+1))$. A partir de la siguiente figura es fácil ver que es permutativo:



Ejercicio 6.7. Demuestra que todo autómata celular permutativo es sensible.

Recordemos que antes mencionamos que el SDT $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ es transitivo; sin embargo esto no es cierto en general para un SDT $(A^{\mathbb{Z}}, \tau)$, donde $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ es un autómata celular. Kurka demostró que los autómatas celulares no necesitan la propiedad de transitividad para obtener la dicotomía de ser casi equicontinuos o sensibles.

Teorema 6.5 (Kůrka, [9]). *El autómata celular $\tau : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ es sensible si y solo si no es casi equicontinuo.*

Como mencionamos al principio de la sección, las definiciones de orden y caos varían, y las definiciones de equicontinuidad y sensibilidad no son la excepción. En

algunas definiciones alternas (no equivalentes) de equicontinuidad y sensibilidad no existe la dicotomía en autómatas celulares (véase [10]); esto nos deja con la tarea de clasificar estos autómatas celulares con definiciones menos estrictas de equicontinuidad y menos débiles de sensibilidad.

AGRADECIMIENTOS

El segundo y quinto autor fueron apoyados con una Beca Nacional para Estudios de Posgrado CONAHCYT. El cuarto autor fue apoyado por el programa de Estancias Posdoctorales por México, No. I1200/320/2022, de CONAHCYT.

REFERENCIAS

- [1] Castillo-Ramirez, A., Magaña-Chavez, M.G., Veliz-Quintero, E.: Idempotent cellular automata and their natural order, *Theoretical Computer Science* **1009** (2024) 114698. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2024.114698>
- [2] Castillo-Ramirez, A., Veliz-Quintero, E.: On the minimal memory set of cellular automata. In: Gadouleau, M., Castillo-Ramirez, A. (eds) *Cellular Automata and Discrete Complex Systems. AUTOMATA 2024. Lecture Notes in Computer Science*, vol 14782. Springer, Cham, 2024. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-65887-7_7
- [3] Ceccherini-Silberstein, T., Coornaert, M.: *Cellular Automata and Groups*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2010).
- [4] Ceccherini-Silberstein, T., Coornaert, M.: *Exercises in Cellular Automata and Groups*. Springer Monographs in Mathematics, Springer Cham, Switzerland, 2023.
- [5] Cook, M.: Universality in Elementary Cellular Automata. *Complex Systems* **15** (2004) 1–40.
- [6] Kari, J.: Theory of cellular automata: A Survey. *Theoret. Comput. Sci.* **334**, 3–33 (2005).
- [7] Morris, S. A.: *Topology without tears*, 2017. Disponible en <http://www.topologywithouttears.net/>.
- [8] Munkres, J. R.: *Topología*. Segunda Edición. Pearson Educación, 2002.
- [9] Kůrka, P.: *Topological and Symbolic Dynamics*. Société mathématique de France, 2003.
- [10] de los Santos Baños, L., García-Ramos, F.: *Local non-periodic order and diam-mean equicontinuity on cellular automata*. *Dynamical Systems*, 2022.
- [11] Stephen Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 2002.

CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, GUADALAJARA, JAL., MÉXICO

E-mail address: alonso.castillor@academicos.udg.mx

TEMAS SELECTOS DE SISTEMAS DE EDOS

ELBA LILIA DE LA CRUZ GARCÍA, LUIS MANUEL PIÑUELAS CASTRO, ALEXANDER YAKHNO, LILIYA YAKHNO

Resumen. En el presente capítulo se desarrollan los métodos de Euler (para el caso de un espectro no degenerado y degenerado) y de Variación de Parámetros, para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. También se resuelven algunos ejemplos de forma detallada para mostrar el uso práctico de los métodos mostrados. Finalmente, se incluyen ejercicios propuestos que permiten al lector poner en práctica los métodos expuestos.

Abstract. In this chapter, the Euler method (for the case of a non-degenerate and degenerate spectrum) and the Variation of Parameters method are developed to solve systems of differential equations. Some examples are also solved in detail to show the practical use of the shown methods. Finally, proposed exercises are included that allow the reader to put the methods presented into practice.

Índice

1. Introducción	72
2. Método de matrices (Método modificado de Euler)	73
2.1. Caso A. Espectro no degenerado	73
2.2. Caso B. Espectro degenerado.	77
3. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes variables	82
3.1. Método de variación de parámetros	83
Referencias	87

2000 *Mathematics Subject Classification.* 34-01, 34A30.

Palabras Claves. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Sistemas.

1. Introducción

Definición 1.1. Un sistema de ecuaciones diferenciales se llama *sistema normal*, si tiene la forma:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (1)$$

donde $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ son las funciones incógnitas de la variable t .

Definición 1.2. Integrar el sistema normal significa determinar las funciones $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ que satisfagan el sistema y dependen de n constantes arbitrarias C_1, C_2, \dots, C_n .

Además, para el sistema normal (1) es posible plantear el Problema de Valor Inicial (PVI) que contiene las siguientes condiciones iniciales:

$$y_1(t_0) = y_{10}, y_2(t_0) = y_{20}, \dots, y_n(t_0) = y_{n0}.$$

Definición 1.3. Un sistema de ecuaciones diferenciales *lineales homogéneas con coeficientes constantes*, es un sistema de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n, \end{cases} \quad (2)$$

donde a_{ij} son constantes, t es la variable independiente, $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ son las funciones incógnitas.

Con los coeficientes del sistema es posible construir la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

La ecuación característica del sistema (2) está dada por la ecuación:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Al resolver la ecuación anterior obtenemos los n valores propios: λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$. A cada valor propio λ_k le corresponde un vector propio p_k que es posible obtener al resolver la ecuación:

$$(A - \lambda_k I)p_k = 0$$

para cada valor de λ_k .

2. Método de matrices (Método modificado de Euler)

Al conjunto de valores propios de una matriz A se le conoce como *espectro*, dichos valores pueden ser: *simples* (reales distintos o complejos distintos), o *repetidos con multiplicidad m* (reales o complejos). Cuando los valores propios simples el espectro es conocido como *no degenerado*, cuando hay valores repetidos, se trata de un espectro *degenerado*.

2.1. Caso A. Espectro no degenerado. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales (2) cuya matriz de coeficientes (3) tiene valores propios simples. Cada valor λ_k tiene un correspondiente vector $p_k = (p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{nk})$. Entonces el sistema (2) tiene n soluciones, a continuación, se describe como obtenerlas.

La primera solución corresponde al valor λ_1 :

$$y_{11} = p_{11}e^{\lambda_1 t}, y_{21} = p_{21}e^{\lambda_1 t}, \dots, y_{n1} = p_{n1}e^{\lambda_1 t},$$

las coordenadas del vector propio p_1 son los coeficientes para cada función desconocida y el valor propio λ_1 es el coeficiente del argumento de la función exponencial.

La segunda solución corresponde al valor λ_2 :

$$y_{12} = p_{12}e^{\lambda_2 t}, y_{22} = p_{22}e^{\lambda_2 t}, \dots, y_{n2} = p_{n2}e^{\lambda_2 t},$$

análogamente, las coordenadas del vector propio p_2 son los coeficientes para cada una de las funciones desconocidas y el valor propio λ_2 es el coeficiente del argumento de la función exponencial.

La n -ésima solución corresponde al valor λ_n :

$$y_{1n} = p_{1n} e^{\lambda_n t}, \quad y_{2n} = p_{2n} e^{\lambda_n t}, \quad \dots, \quad y_{nn} = p_{nn} e^{\lambda_n t}.$$

Estas soluciones determinan el sistema fundamental de soluciones. La solución general del sistema (2) está dado por:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + \dots + C_n y_{1n}, \\ y_2 &= C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + \dots + C_n y_{2n}, \\ &\vdots \\ y_n &= C_1 y_{n1} + C_2 y_{n2} + \dots + C_n y_{nn}. \end{aligned}$$

Cuando los valores propios son complejos, es necesario usar la fórmula de Euler

$$e^{(a+bi)t} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt).$$

Ejemplo 2.1. Obtener la solución general del sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = x - z, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = x - y. \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ se

obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

entonces $-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, de donde tenemos los valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$, los cuales son todos simples, entonces se trata de un espectro no degenerado.

Para $\lambda_1 = 1$, obtengamos su correspondiente vector propio p_1 :

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{matriz reducida} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} p_{11} = p_{21}, \\ p_{31} = 0, \\ p_{21} \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Como hay valores propios complejos, entonces las coordenadas de los vectores propios pueden ser complejos también, por eso para la variable independiente se escribe $p_{21} \in \mathbb{C}$. La base del espacio propio puede ser elegida como $(1, 1, 0)$, por lo que para el valor $\lambda_1 = 1$ le corresponde la solución:

$$x_1 = p_{11} e^{\lambda_1 t} = e^t, \quad y_1 = p_{21} e^{\lambda_1 t} = e^t, \quad z_1 = p_{31} e^{\lambda_1 t} = 0.$$

Para $\lambda_2 = i$, se obtiene el vector correspondiente:

$$\begin{pmatrix} 1-i & 0 & -1 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix} \rightarrow \text{matriz reducida} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 1+i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} p_{12} = i p_{22}, \\ p_{32} = (1+i)p_{22}, \\ p_{22} \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Si $p_{22} = -i$, entonces el vector propio es $(1, -i, 1-i)$. Entonces a $\lambda_2 = i$ le corresponde la solución:

$$x_2 = p_{12} e^{\lambda_2 t} = e^{it}, \quad y_2 = p_{22} e^{\lambda_2 t} = -i e^{it}, \quad z_2 = p_{32} e^{\lambda_2 t} = (1-i) e^{it}.$$

Para $\lambda_3 = -i$, obtengamos su correspondiente vector propio:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & -1 & i \end{pmatrix} \rightarrow \text{matriz reducida} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1-i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} p_{13} = -i p_{23}, \\ p_{33} = (1-i)p_{23}, \\ p_{23} \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Si $p_{23} = i$, entonces el vector propio es $(1, i, 1+i)$. Entonces a $\lambda_3 = -i$ le corresponde la solución:

$$x_3 = p_{13} e^{\lambda_3 t} = e^{-it}, \quad y_3 = p_{23} e^{\lambda_3 t} = i e^{-it}, \quad z_3 = p_{33} e^{\lambda_3 t} = (1+i) e^{-it}.$$

Así, la solución general es:

$$\begin{aligned} x &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = C_1 e^t + C_2 e^{it} + C_3 e^{-it} = \\ &= C_1 e^t + C_2 [\cos t + i \sin t] + C_3 [\cos t - i \sin t] = C_1 e^t + (C_2 + C_3) \cos t + (C_2 - C_3) i \sin t, \\ y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 e^t - i C_2 e^{it} + i C_3 e^{-it} = \\ &= C_1 e^t - i C_2 [\cos t + i \sin t] + i C_3 [\cos t - i \sin t] = C_1 e^t - i(C_2 - C_3) \cos t + (C_2 + C_3) \sin t, \\ z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 = 0 + C_2(1-i)e^{it} + C_3(1+i)e^{-it} = \\ &= C_2(1-i)[\cos t + i \sin t] + C_3(1+i)[\cos t - i \sin t] = \\ &= (C_2 - i C_2 + C_3 + i C_3) \cos t + (i C_2 + C_2 - i C_3 + C_3) \sin t. \end{aligned}$$

Al cambiar $C_2 + C_3 = C_4$ y $(C_2 - C_3)i = C_5$, obtenemos la solución general:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_4 \cos t + C_5 \sin t, \\ y = C_1 e^t - C_5 \cos t + C_4 \sin t, \\ z = (C_4 - C_5) \cos t + (C_4 + C_5) \sin t. \end{cases}$$

Ejemplo 2.2. Obtener la solución general del sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases} \quad \text{De la ecuación}$$

característica $\det(A - \lambda I) = 0$ se obtiene $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$, de donde tenemos los valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - 2i$, $\lambda_3 = 1 + 2i$.

Para $\lambda_1 = 1$, obtengamos su correspondiente vector propio:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{matriz reducida} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ así tenemos } \begin{cases} p_{11} = 0, \\ p_{21} = -p_{31}, \\ p_{31} \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

El vector propio es $(0, 1, -1)$, por lo que para el valor $\lambda_1 = 1$ le corresponde la solución: $x_1 = 0$, $y_1 = e^t$, $z_1 = -e^t$.

Para $\lambda_2 = 1 - 2i$, obtengamos su correspondiente vector propio:

$$\begin{pmatrix} 2i & -1 & -1 \\ 1 & 2i & 0 \\ 3 & 0 & 2i \end{pmatrix} \rightarrow \text{matriz reducida} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3}i \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ por lo tanto } \begin{cases} p_{12} = -\frac{2}{3}i p_{32}, \\ p_{22} = \frac{1}{3} p_{32}, \\ p_{32} \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Si $p_{32} = 3$, el vector propio es $(-2i, 1, 3)$, por lo que para el valor $\lambda_2 = 1 - 2i$, le corresponde la solución: $x_2 = -2ie^{(1-2i)t}$, $y_2 = e^{(1-2i)t}$, $z_2 = 3e^{(1-2i)t}$. Análogamente, el vector propio $(2i, 1, 3)$ corresponde al valor $\lambda_3 = 1 + 2i$ y la solución es: $x_3 = 2ie^{(1+2i)t}$, $y_3 = e^{(1+2i)t}$, $z_3 = 3e^{(1+2i)t}$.

Así la solución queda como:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = e^t [(-2C_2 i + 2C_3 i) \cos 2t + (-2C_2 - 2C_3) \sin t],$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = e^t [C_1 + (C_2 + C_3) \cos 2t + (-C_2 i + C_3 i) \sin t],$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 = e^t [-C_1 + (3C_2 + 3C_3) \cos 2t + (-3C_2 i + 3C_3 i) \sin t].$$

Al introducir las constantes: $C_4 = -C_2 - C_3$ y $C_5 = -C_2 i + C_3 i$, obtenemos la solución general:

$$\begin{cases} x = e^t [2C_5 \cos 2t + 2C_4 \sin 2t], \\ y = e^t [C_1 - C_4 \cos 2t + C_5 \sin 2t], \\ z = e^t [-C_1 - 3C_4 \cos 2t + 3C_5 \sin 2t]. \end{cases}$$

Ejercicio 2.3. *Obtener la solución general de los siguientes sistemas:*

$$1) \begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

2.2. Caso B. Espectro degenerado. Es el caso, cuando los valores propios λ_s , $s = \overline{1, k}$, $k < n$ tienen los índices de multiplicidad m_s ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$). Entonces la solución general del sistema homogéneo tiene la forma

$$Y(t) = \sum_{s=1}^k \sum_{i=0}^{m_s-1} \left(\frac{t^i}{i!} B_s^i \right) V_s e^{\lambda_s t}, \quad (4)$$

donde $B_s = A - \lambda_s I$, V_s es un vector, que representa la solución general de la ecuación matricial $B_s^{m_s} V_s = 0$. Para $i = 0 \rightarrow B_s^0 = I$.

Notemos que la fórmula (4) es válida para el caso de los valores propios simples ($k = n$) con la modificación adecuada.

Ejemplo 2.4. *Desarrollar la fórmula (4) para el caso de un valor propio de multiplicidad 3 y escribir las fórmulas para sus componentes.*

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{s=1}^k \sum_{i=0}^{m_s-1} \left(\frac{t^i}{i!} B_s^i \right) V_s e^{\lambda_s t} = \sum_{i=0}^{3-1} \left(\frac{t^i}{i!} B_1^i \right) V_1 e^{\lambda_1 t} = \\ &= \frac{t^0}{0!} B_1^0 V_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{t^1}{1!} B_1^1 V_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{t^2}{2!} B_1^2 V_1 e^{\lambda_1 t} = \frac{1}{1} I V_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{t}{1} B_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{t^2}{2} B_1^2 V_1 e^{\lambda_1 t} = \\ &= \left[I + t B_1 + \frac{t^2}{2} B_1^2 \right] V_1 e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

donde $B_1 = A - \lambda_1 I$, V_1 es solución general de la ecuación $B_1^3 V_1 = 0$.

Ejemplo 2.5. *Desarrollar la fórmula (4) para el caso de dos valores propios distintos λ_1 de multiplicidad 2 y λ_2 de multiplicidad 3.*

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \sum_{s=1}^k \sum_{i=0}^{m_s-1} \left(\frac{t^i}{i!} B_s^i \right) V_s e^{\lambda_s t} = \sum_{i=0}^{2-1} \left(\frac{t^i}{i!} B_1^i \right) V_1 e^{\lambda_1 t} + \sum_{i=0}^{3-1} \left(\frac{t^i}{i!} B_2^i \right) V_2 e^{\lambda_2 t} = \\
&= \frac{t^0}{0!} B_1^0 V_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{t^1}{1!} B_1^1 V_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{t^0}{0!} B_2^0 V_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{t^1}{1!} B_2^1 V_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{t^2}{2!} B_2^2 V_2 e^{\lambda_2 t} = \\
&= I V_1 e^{\lambda_1 t} + t B_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + I V_2 e^{\lambda_2 t} + t B_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{t^2}{2} B_2^2 V_2 e^{\lambda_2 t} = \\
&= [I + t B_1] V_1 e^{\lambda_1 t} + \left[I + t B_2 + \frac{t^2}{2} B_2^2 \right] V_2 e^{\lambda_2 t},
\end{aligned}$$

donde $B_1 = A - \lambda_1 I$, V_1 es la solución general de la ecuación $B_1^2 V_1 = 0$, $B_2 = A - \lambda_2 I$, V_2 es la solución general de la ecuación $B_2^3 V_2 = 0$.

Ejemplo 2.6. Resolver el sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y + z, \\ \dot{z} = -2x - 2y - z. \end{cases}$$
 La matriz (3) del sistema es $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ La ecuación característica es } \det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$0 \rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda) + 0 + 4 - [0 - 2(1-\lambda) - 2(-1-\lambda)] = 0 \rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, sus raíces son $\lambda_{1,2,3} = 1$ o es posible decir que es una raíz $\lambda_1 = 1$ de multiplicidad 3. Como la raíz es múltiple, entonces hay que utilizar la fórmula para el espectro degenerado. Desarrollamos la fórmula (4)

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \sum_{s=1}^k \sum_{i=0}^{m_s-1} \left(\frac{t^i}{i!} B_s^i \right) V_s e^{\lambda_s t} = \sum_{i=0}^{3-1} \left(\frac{t^i}{i!} B_1^i \right) V_1 e^{\lambda_1 t} = \\
&= \frac{t^0}{0!} B_1^0 V_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{t^1}{1!} B_1^1 V_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{t^2}{2!} B_1^2 V_1 e^{\lambda_1 t} = \frac{1}{1} I V_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{t}{1} B_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{t^2}{2} B_1^2 V_1 e^{\lambda_1 t} = \\
&= \left[I + t B_1 + \frac{t^2}{2} B_1^2 \right] V_1 e^{\lambda_1 t}.
\end{aligned}$$

Calcularemos los componentes de esta fórmula

$$B_1 = A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1-1 & -2 & 0 \\ 1 & 3-1 & 1 \\ -2 & -2 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

V_1 es la solución general de la ecuación $B_1^3 V_1 = 0$.

$$\text{Calculando } B_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B_1^3 = B_1^2 B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces a la ecuación $B_1^3 V_1 = 0$ le corresponde el sistema $0p_1 + 0p_2 + 0p_3 = 0$ que tiene solución general $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$. Escribimos la solución general en la forma vectorial. Son tres variables independientes, entonces la unidad puede estar en tres coordenadas

$$\begin{aligned} p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 0 &\rightarrow (1, 0, 0), \\ p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 0 &\rightarrow (0, 1, 0), \\ p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1 &\rightarrow (0, 0, 1), \end{aligned}$$

así la solución general es $V_1 = C_1(1, 0, 0) + C_2(0, 1, 0) + C_3(0, 0, 1) = (C_1, C_2, C_3)$. Sustituimos los componentes a la fórmula para la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} Y(t) &= \left[I + tB_1 + \frac{t^2}{2} B_1^2 \right] V_1 e^{\lambda_1 t} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right] V_1 e^{\lambda_1 t} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-t^2 & -2t-2t^2 & -t^2 \\ t & 1+2t & t \\ -2t+t^2 & -2t+2t^2 & 1-2t+t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} e^t = \\ &= \begin{pmatrix} e^t [C_1(1-t^2) - C_2(2t+2t^2) - C_3 t^2] \\ e^t [C_1 t + C_2(1+2t) + C_3 t] \\ e^t [C_1(t^2-2t) + C_2(2t^2-2t) + C_3(t^2-2t+1)] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{cases} x = e^t [C_1(1-t^2) - C_2(2t+2t^2) - C_3t^2], \\ y = e^t [C_1t + C_2(1+2t) + C_3t], \\ z = e^t [C_1(t^2-2t) + C_2(2t^2-2t) + C_3(t^2-2t+1)]. \end{cases}$$

Ejemplo 2.7. Resolver el sistema $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z, \\ \dot{y} = -2x - z, \\ \dot{z} = 2x + y + 2z. \end{cases}$

La matriz (3) de este sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La ecuación característica es

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$$

es posible decir que $\lambda_1 = 1$ es una raíz de multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 2$ es raíz de multiplicidad 1. Desarrollamos la fórmula (4) para este conjunto de raíces

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{s=1}^k \sum_{i=0}^{m_s-1} \left(\frac{t^i}{i!} B_s^i \right) V_s e^{\lambda_s t} = \sum_{i=0}^{2-1} \left(\frac{t^i}{i!} B_1^i \right) V_1 e^{\lambda_1 t} + \sum_{i=0}^{1-1} \left(\frac{t^i}{i!} B_2^i \right) V_2 e^{\lambda_2 t} = \\ &= [I + t B_1] V_1 e^{\lambda_1 t} + V_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Calcularemos los componentes de esta fórmula

$$B_1 = A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

V_1 es la solución general de la ecuación $B_1^2 V_1 = 0$. Calculando

$$B_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para resolver la ecuación $B_1^2 V_1 = 0$ es necesario calcular la matriz reducida de B_1^2 , la cual es la matriz con los siguientes elementos $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A esta matriz le corresponde un

sistema de una sola ecuación $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, cuya solución general es $\begin{cases} p_1 = -p_2 - p_3, \\ p_2, p_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Escribimos la solución general en forma vectorial. Como son dos variables independientes, entonces la unidad puede estar en dos coordenadas; pero en este caso en lugar del valor 1, es mejor usar -1 para que sea positiva la primera coordenada de los vectores resultantes

$$\begin{aligned} p_2 = -1, p_3 = 0 &\rightarrow (1, -1, 0), \\ p_2 = 0, p_3 = -1 &\rightarrow (1, 0, -1), \end{aligned}$$

así la solución general es $V_1 = C_1(1, -1, 0) + C_2(1, 0, -1) = (C_1 + C_2, -C_1, -C_2)$.

V_2 es la solución general de la ecuación $B_2 V_2 = 0$, $B_2 = A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, su

matriz reducida es $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A esa matriz le corresponde el sistema de ecuaciones

$\begin{cases} -2p_1 - 2p_2 - p_3 = 0, \\ p_2 + p_3 = 0, \end{cases}$ que tiene la solución general $\begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}p_3, \\ p_2 = -p_3, \\ p_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$ También escribimos la

solución general en forma vectorial. Como hay una variable independiente, entonces la unidad puede estar solo en esta coordenada; pero en este caso en lugar de valor 1, es mejor usar 2 para no tener coordenadas fraccionarias en el vector resultante

$$p_3 = 2 \rightarrow (1, -2, 2).$$

Así la solución general es $V_2 = C_3(1, -2, 2) = (C_3, -2C_3, 2C_3)$. Sustituimos todos los componentes en la fórmula para la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$Y(t) = [I + tB_1] V_1 e^{\lambda_1 t} + V_2 e^{\lambda_2 t} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] V_1 e^{\lambda_1 t} + V_2 e^{\lambda_2 t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1+t & t & t \\ -2t & 1-t & -t \\ 2t & t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ -C_1 \\ -C_2 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} C_3 \\ -2C_3 \\ 2C_3 \end{pmatrix} e^{2t} = \\
&= \begin{pmatrix} (1+t)(C_1 + C_2) - C_1 t - C_2 t \\ -2t(C_1 + C_2) - C_1(1-t) + C_2 t \\ 2t(C_1 + C_2) - C_1 t - C_2(1-t) \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} C_3 \\ -2C_3 \\ 2C_3 \end{pmatrix} e^{2t} = \\
&= \begin{pmatrix} (C_1 + C_2)e^t + C_3 e^{2t} \\ (-C_1 t - C_2 t - C_1)e^t - 2C_3 e^{2t} \\ (C_1 t + C_2 t - C_2)e^t + 2C_3 e^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces la solución general del sistema es
$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2)e^t + C_3 e^{2t}, \\ y = (-C_1 t - C_2 t - C_1)e^t - 2C_3 e^{2t}, \\ z = (C_1 t + C_2 t - C_2)e^t + 2C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

Ejercicio 2.8. Resolver los sistemas:

$$1) \begin{cases} \dot{x} = 2x + 6y - 15z, \\ \dot{y} = x + y - 5z, \\ \dot{z} = x + 2y - 6z; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z, \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$$

3. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes variables

Definición 3.1. El sistema de n ecuaciones diferenciales que tienen la forma

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t), \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y_n + f_2(t), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t), \end{cases} \quad (5)$$

donde y_1, y_2, \dots, y_n son las funciones incógnitas de la variable independiente t , los coeficientes $a_{ij}(t)$ y las funciones $f_i(t)$ son continuas en un intervalo (a, b) se llama *sistema no homogéneo de ecuaciones lineales diferenciales de primer orden con coeficientes variables*.

Este sistema se puede escribir en la forma de una sola ecuación diferencial matricial

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t), \quad (6)$$

aquí la matriz A es cuadrada y los vectores Y , \dot{Y} y F tienen la forma

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Si el vector F es idénticamente igual al vector nulo, entonces el sistema se llama *homogéneo*

$$\dot{Y} = AY. \quad (7)$$

Es posible escribir las condiciones iniciales también en forma matricial:

$$Y(t_0) = Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \dots \\ y_{n0} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Los siguientes tres teoremas son la generalización de los teoremas correspondientes para una EDO lineal.

Teorema 1. La combinación lineal de las soluciones de un sistema homogéneo (7) es también una solución de éste.

Teorema 2. La suma de una solución particular del sistema no homogéneo (6) y la solución general del sistema homogéneo correspondiente (7) es la solución general de sistema no homogéneo (6).

Entonces para encontrar la solución general del sistema no homogéneo es suficiente aprender a encontrar una solución particular de éste, porque ya sabemos resolver los sistemas homogéneos.

Teorema 3. (sobre la existencia y unicidad de la solución) La solución de problema de Cauchy (6), (8) existe y es única en cualquier segmento $[t_0, t_1] \subset (a, b)$.

Notemos que en la Definición 3.1 supusimos la continuidad de los coeficientes $a_{ij}(t)$ y de las funciones $f_i(t)$ en (a, b) .

3.1. Método de variación de parámetros. Es el método de búsqueda de una solución particular del sistema no homogéneo. A continuación se explican los pasos del algoritmo de este método.

1. Encontrar la solución general del sistema homogéneo.
2. Suponer que las constantes C_1, C_2, \dots de la solución general son funciones desconocidas de la variable t . Sustituyendo la solución general del sistema homogéneo

al sistema no homogéneo, se obtiene un sistema de ecuaciones respecto a las funciones $C_1(t)$, $C_2(t)$, ...

3. Resolver el último sistema.
4. Sustituyendo las expresiones de $C_1(t)$, $C_2(t)$, ... a la solución general del sistema homogéneo se obtiene una solución particular del sistema no homogéneo. Otra vez prestamos atención que la misma fórmula da la solución general del sistema homogéneo y la solución particular del sistema no homogéneo, solo en la solución general C_1 , C_2 , ... son constantes y en la solución particular $C_1(t)$, $C_2(t)$, ... son funciones encontradas de la variable t .
5. Usando el Teorema 2, obtener la solución general del sistema no homogéneo.

Ejemplo 3.2. *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases} \quad (9)$$

Paso 1.

El sistema homogéneo correspondiente es $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x. \end{cases}$ La ecuación característica es $\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ -3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$, todos los valores son simples, entonces hay que usar el método del espectro no degenerado.

Para $\lambda_1 = 2$ el vector propio es $(2, 3)$ y la solución particular es $\begin{cases} x_1 = 2e^{2t}, \\ y_1 = 3e^{2t}. \end{cases}$ Para $\lambda_2 = 1$ el vector propio es $(1, 1)$ y solución particular es $\begin{cases} x_2 = e^t, \\ y_2 = e^t. \end{cases}$ Entonces la solución general del sistema homogéneo es

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^t, \\ y = 3C_1 e^{2t} + C_2 e^t. \end{cases} \quad (10)$$

Paso 2.

Buscamos la solución particular del sistema no homogéneo (9). Sustituimos la solución general (10) en la primera ecuación

$$2\dot{C}_1 e^{2t} + 4C_1 e^{2t} + \dot{C}_2 e^t + C_2 e^t = 2(3C_1 e^{2t} + C_2 e^t) - (2C_1 e^{2t} + C_2 e^t).$$

Simplificando obtenemos

$$2\dot{C}_1 e^{2t} + \dot{C}_2 e^t = 0.$$

Sustituimos la solución general (10) en la segunda ecuación

$$3\dot{C}_1 e^{2t} + 6C_1 e^{2t} + \dot{C}_2 e^t + C_2 e^t = 4(3C_1 e^{2t} + C_2 e^t) - 3(2C_1 e^{2t} + C_2 e^t) + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}.$$

Simplificando obtenemos

$$3\dot{C}_1 e^{2t} + \dot{C}_2 e^t = \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}.$$

Es decir, tenemos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2\dot{C}_1 e^{2t} + \dot{C}_2 e^t = 0, \\ 3\dot{C}_1 e^{2t} + \dot{C}_2 e^t = \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1} \end{cases}$ *para determinar los valores de* $C_1(t)$, $C_2(t)$.

Paso 3.

Despejando de la primera ecuación, obtenemos $\dot{C}_2 e^t = -2\dot{C}_1 e^{2t} \rightarrow \dot{C}_2 = -2\dot{C}_1 e^t$. *Sustituimos a la segunda ecuación*

$$3\dot{C}_1 e^{2t} + (-2\dot{C}_1 e^t) e^t = \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1} \rightarrow \dot{C}_1 = \frac{e^t}{e^{2t} + 1} \rightarrow C_1(t) = \int \frac{e^t dt}{e^{2t} + 1} = \arctan e^t.$$

Utilizando este resultado se obtiene

$$\dot{C}_2 = -2\dot{C}_1 e^t = -2 \left(\frac{e^t}{e^{2t} + 1} \right) e^t \rightarrow C_2(t) = -2 \int \frac{e^{2t} dt}{e^{2t} + 1} = -\ln(e^{2t} + 1).$$

Paso 4.

Sustituyendo $C_1(t)$ *y* $C_2(t)$ *a (10) obtenemos la solución particular del sistema no homogéneo* $\begin{cases} x = 2e^{2t} \arctan e^t - e^t \ln(e^{2t} + 1), \\ y = 3e^{2t} \arctan e^t - e^t \ln(e^{2t} + 1). \end{cases}$

Paso 5.

Usando el teorema 2, la solución general del sistema no homogéneo tiene la forma

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^t + 2e^{2t} \arctan e^t - e^t \ln(e^{2t} + 1), \\ y = 3C_1 e^{2t} + C_2 e^t + 3e^{2t} \arctan e^t - e^t \ln(e^{2t} + 1). \end{cases}$$

Ejemplo 3.3. *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \tan^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \tan t, \end{cases} \quad (11)$$

Paso 1.

El sistema homogéneo correspondiente es $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$ La ecuación característica es $\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$, debido a que todos los valores son simples, entonces hay que usar el método de espectro no degenerado.

Para $\lambda_1 = i$ el vector propio es $(1, i)$ y la solución particular es $\begin{cases} x_1 = e^{it}, \\ y_1 = ie^{it}. \end{cases}$ Para $\lambda_2 = -i$ el vector propio es $(1, -i)$ y la solución particular es $\begin{cases} x_2 = e^{-it}, \\ y_2 = -ie^{-it}. \end{cases}$

Así la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} x &= C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it} = C_1 [\cos t + i \sin t] + C_2 [\cos t - i \sin t] = \\ &= (C_1 + C_2) \cos t + i(C_1 - C_2) \sin t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 = i C_1 e^{it} - i C_2 e^{-it} = i C_1 [\cos t + i \sin t] - i C_2 [\cos t - i \sin t] = \\ &= i(C_1 - C_2) \cos t - (C_1 + C_2) \sin t. \end{aligned}$$

Al cambiar $C_1 + C_2 = C_3$ y $(C_1 - C_2)i = C_4$ obtenemos la solución general del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x = C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y = C_4 \cos t - C_3 \sin t. \end{cases} \quad (12)$$

Paso 2.

Buscamos la solución particular del sistema no homogéneo (11). Sustituimos la solución general (12) en la primera ecuación, considerando que C_3 y C_4 son funciones de la variable t :

$$\dot{C}_3 \cos t - C_3 \sin t + \dot{C}_4 \sin t + C_4 \cos t = C_4 \cos t - C_3 \sin t + \tan^2 t - 1.$$

Simplificando obtenemos:

$$\dot{C}_3 \cos t + \dot{C}_4 \sin t = \tan^2 t - 1.$$

Sustituimos la solución general (12) en la segunda ecuación, también considerando que C_3 y C_4 son funciones de la variable t :

$$\dot{C}_4 \cos t - C_4 \sin t - \dot{C}_3 \sin t - C_3 \cos t = -C_3 \cos t - C_4 \sin t + \tan t.$$

Simplificando obtenemos:

$$-\dot{C}_3 \sin t + \dot{C}_4 \cos t = \tan t.$$

Es decir, tenemos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \dot{C}_3 \cos t + \dot{C}_4 \sin t = \tan^2 t - 1, \\ -\dot{C}_3 \sin t + \dot{C}_4 \cos t = \tan t \end{cases}$ para determinar las funciones $C_3(t)$, $C_4(t)$.

Paso 3.

Despejando de la segunda ecuación, obtenemos $\dot{C}_4 \cos t = \tan t + \dot{C}_3 \sin t \rightarrow \dot{C}_4 = \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \dot{C}_3 \tan t$. Sustituimos este resultado en la primera ecuación

$$\begin{aligned} \dot{C}_3 \cos t + \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \dot{C}_3 \tan t \right) \sin t &= \tan^2 t - 1 \rightarrow \dot{C}_3 \cos t + \tan^2 t + \dot{C}_3 \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \\ &= \tan^2 t - 1 \rightarrow \dot{C}_3 = -\cos t \rightarrow C_3(t) = -\sin t. \end{aligned}$$

Utilizando este resultado se obtiene

$$\dot{C}_4 = \frac{\sin t}{\cos^2 t} - \cos t \tan t \rightarrow C_4(t) = \frac{1}{\cos t} + \cos t.$$

Paso 4.

Sustituyendo $C_3(t)$ y $C_4(t)$ en (12) obtenemos la solución particular del sistema no homogéneo $\begin{cases} x = -\sin t \cos t + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t \right) \sin t, \\ y = \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t \right) \cos t + \sin t \sin t, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \tan t, \\ y = 2. \end{cases}$

Paso 5.

Usando el Teorema 2, la solución general del sistema no homogéneo tiene la forma

$$\begin{cases} x = C_3 \cos t + C_4 \sin t + \tan t, \\ y = C_4 \cos t - C_3 \sin t + 2. \end{cases}$$

Ejercicio 3.4. Resolver los sistemas:

$$1) \begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

Referencias

- [1] Zill DG. (2018) *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera*, (9na. ed.), Cengage Learning.
- [2] Hernández A, Yakhno A, de la Cruz E, Yakhno L, Arriaga M, Suárez M, Mata O, Ramírez G, Márquez J, Fregoso E, Olmos M. (2015) *Matemática: sus Métodos y Fundamentos*, Umbral.
- [3] Piskunov N. (1977) *Cálculo Diferencial e Integral*, tomo II, (3ra. ed.), Mir.

Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara, Jalisco, México

E-mail address: alexander.yakhno@academicos.udg.mx

E-mail address: liliya.y@academicos.udg.mx

E-mail address: elba.delacruz@academicos.udg.mx

E-mail address: luis.pinuelas@alumno.udg.mx

HACES VECTORIALES Y SUS SECCIONES

JUAN MANUEL MÁRQUEZ BOBADILLA, O. MATA-GUTIÉRREZ,
EDUARDO REZA GURROLA, MARÍA DE LA PAZ SUÁREZ FERNÁNDEZ

ÍNDICE

1. Haces vectoriales sobre espacios topológicos	90
1.1. Definiciones y propiedades	90
1.2. Secciones de un haz	100
2. Superficies de Riemann	103
2.1. Funciones holomorfas y meromorfas.	104
2.2. Orden de una función meromorfa en un punto.	106
2.3. Funciones Holomorfas y Meromorfas en una superficie de Riemann Compacta.	107
3. Formas diferenciales	109
3.1. Ejemplo con uno-formas holomorfas y meromorfas	111
3.2. Dos-formas elementales en una variable compleja	114
4. Divisores	115
4.1. El divisor de una función meromorfa.	116
4.2. Ceros y polos de uno-formas meromorfas.	118
4.3. Divisores principales, grupo de Picard y divisor canónico.	120
5. Divisores y haces lineales	122
5.1. Funciones meromorfas dominadas por un divisor	123
5.2. Relación entre divisores y haces lineales.	126
Referencias	132

Estas notas corresponden a la escuela de verano impartida en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías de la Universidad de Guadalajara. Está dirigida para estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y áreas afines.

1. HACES VECTORIALES SOBRE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

En esta sección desarrollaremos los conceptos básicos sobre la teoría de haces vectoriales. Describiremos la noción de haz vectorial sobre un espacio topológico y sus secciones además presentaremos algunos ejemplos clásicos. En esta sección consideramos a X como un espacio topológico conexo y posteriormente se considerará a X como una superficie de Riemann. Se puede consultar más información en [Gri], [Gu], [Le], [Mi].

1.1. Definiciones y propiedades. Sean k un campo, y V un k -espacio vectorial topológico de dimensión n , esto es, un k -espacio vectorial de dimensión n que además cuenta con una estructura de espacio topológico. Algunos ejemplos de estos espacios vectoriales topológicos son \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n y $GL(n, \mathbb{R})$.

Sea X espacio topológico cualquiera, podemos considerar la función continua

$$p_X : X \times V \rightarrow X \quad (x, v) \rightarrow x.$$

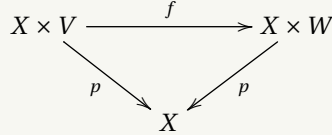
Definición 1.1. Un **haz producto** de espacios vectoriales V sobre X de rango n se define como la terna $(X \times V, p_X, X)$ donde $n = \dim V$. Al espacio $X \times V$ se le conoce como espacio total y al espacio X se le conoce como espacio base.

Observación 1.2. Si $x \in X$, entonces $V_x := p_X^{-1}(x) = \{x\} \times V \cong V$, es decir, V_x tiene estructura de espacio vectorial. A V_x lo llamaremos la **fibra del haz producto** en x . Ahora, $\forall U \subseteq X$ abierto se tiene $p_X^{-1}(U) = U \times V \cong U \times k^n$.

Ahora, recordemos que en espacios vectoriales tenemos la noción de función entre espacios vectoriales que mantienen la estructura, es decir, una transformación lineal. De igual manera, podemos definir una función de haces productos de la siguiente manera:

Definición 1.3. Sean V, W k -espacios vectoriales y sean $(X \times V, p_X, X)$ y $(X \times W, p_X, X)$ sus haces producto, un **homorfismos entre haces producto** es una función continua $f : X \times V \rightarrow X \times W$ tal que satisface las siguientes propiedades:

1. $p_X \circ f = p_X$ es decir, el siguiente diagrama conmuta:



2. Para cada $x \in X$ la restricción

$$f|_{V_x} : V_x \rightarrow W_x \quad (x, v) \rightarrow (x, f_x(v))$$

donde $f_x : V \rightarrow W$ es una transformación lineal.

Como se puede notar, en la primera parte garantiza la compatibilidad de la segunda parte al garantizar que los elementos vayan a sus fibras correspondientes y con ello mantener la estructura de espacio vectorial en las fibras. De esta manera un homomorfismo de haces producto se puede ver como una colección de transformaciones lineales, una por cada punto de X .

Definición 1.4. Un homomorfismo de haces producto $\phi : X \times V \rightarrow X \times W$ es un **isomorfismo** si y solo si existe un homomorfismo $\psi : X \times W \rightarrow X \times V$ tal que $\psi \circ \phi = id_{X \times V}$ y $\phi \circ \psi = id_{X \times W}$.

Estas nociones para haces productos vienen dadas a partir de propiedades del espacio vectorial. Más aún, en la teoría de espacios vectoriales tenemos algunos resultados que se pueden generalizar a haces producto:

Ejercicio 1.5. Sea X espacio topológico, demuestre que los espacios vectoriales $V \otimes W$, $V \oplus W$, V^* , $Hom(V, W)$, V/W y $\bigwedge^m V$ nos definen haces productos sobre X . Calcular sus respectivos rangos.

Ahora, observemos que podemos generalizar la noción de haz producto un poco más de la siguiente manera:

Definición 1.6. Un **haz vectorial** sobre X de rango n es una terna (E, p, X) donde E es un espacio topológico y $p : E \rightarrow X$ es una función continua sobreyectiva que cumple lo siguiente:

1. Para todo $x \in X$, $p^{-1}(x)$ tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n compatible con la estructura de E . La imagen inversa $p^{-1}(x)$ se denota por E_x y

¹Que la estructura del espacio vectorial E_x sea compatible con la topología de E significa que $p_1 \circ \varphi_i|_{U_i} = p|_{E|_{U_i}}$. Además, si restringimos los homeomorfismos en las fibras $\varphi_i|_x : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^n$ es una transformación lineal.

se llama la fibra de x .

$$p^{-1}(x) = \{e \in E \mid p(e) = x\}.$$

2. Existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ y homeomorfismos

$$\varphi_i : E|_{U_i} = p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n.$$

$$\forall i \in I.$$

Cuando no existe confusión, el haz vectorial (E, p, X) los denotaremos por $p : E \rightarrow X$ o simplemente por E y denotaremos el rango de E por $rk(E)$. Si $rk(E) = 1$ entonces E es llamado un haz lineal sobre X , muchas veces usaremos la notación para los haces lineales por L en lugar de E .

Intuitivamente, un haz vectorial sobre X es una terna (E, p, X) la cual determina una familia de espacios vectoriales (de la misma dimensión) parametrizados por X y además satisface una condición local.

Cuando E y X son espacios topológicos (variedades algebraicas, variedades complejas, etc) y $p : E \rightarrow X$ es una función continua (morfismo de variedades algebraicas, función holomorfa, etc) son conocidos como **haces vectoriales topológicos (algebraicos, holomorfos)**.

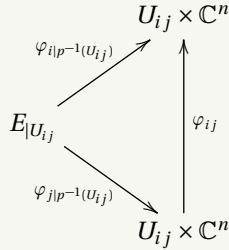
En el caso particular que un haz vectorial E sobre X sea isomorfo al haz producto $X \times k^n$, diremos que E es un **haz trivial** de rango n .

La definición de haz vectorial sobre el espacio topológico X viene acompañado de una cubierta $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ y una colección de homeomorfismos $\{\varphi_i\}_{i \in I}$. Estos datos se escriben como $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ y es conocido como una **trivialización** para E . También se puede verificar lo siguiente:

Considerando la intersección $U_{ij} := U_i \cap U_j$ y suponiendo que es no vacía, tenemos los homeomorfismos

$$\varphi_i : E|_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^n, \quad \varphi_j : E|_{U_j} \longrightarrow U_j \times \mathbb{C}^n$$

y el siguiente diagrama:



Tomando la composición como:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{ij} &:= \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : U_{ij} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}^n \\
 &(x, v) \mapsto (x, g_{ij}(x)v),
 \end{aligned}$$

donde las funciones $g_{ij} : U_{ij} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ son llamadas **funciones de transición**. Estas funciones dependen de la trivialización elegida y cumplen las siguientes condiciones:

1. $g_{ii} = id_{\mathbb{C}^n}, \forall i \in I.$
2. $g_{ik} = g_{ij} \cdot g_{jk}$ en $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k, \forall i, j, k \in I.$

Estas condiciones se conocen como **condiciones de cociclos** y en ocasiones a las funciones de transición $\{g_{ij}\}$ también se les llama simplemente cociclos.

Las funciones de transición son muy importantes cuando se trata de describir un haz vectorial. Tanto, que prácticamente la trivialización $\{U_i, \varphi_i\}$, junto con las funciones de transición $\{g_{ij}\}$, tiene codificadas toda la información necesaria para construir un haz vectorial. Esto lo vemos a continuación:

Sean X un espacio topológico, $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta de X y $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ homeomorfismos de tal manera que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \varphi_{ij} &:= \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : U_{ij} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}^n \\
 &(x, v) \mapsto (x, g_{ij}(x)v),
 \end{aligned}$$

que cumplen las propiedades de cociclos. Para construir a E hacemos lo siguiente

$$E := \frac{\bigsqcup_{i \in I} [U_i \times \mathbb{C}^n]}{\sim},$$

donde la relación de equivalencia está dada de la siguiente forma:

Sean $(x, v) \in U_i \times \mathbb{C}^n$ y $(y, w) \in U_j \times \mathbb{C}^n$ entonces

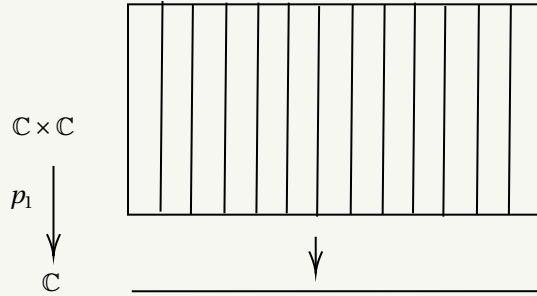
$$(x, v) \sim (y, w) \Leftrightarrow x = y \quad \text{y} \quad g_{ij}(x) \cdot v = w,$$

un elemento en E se ve como una clase de equivalencia $\langle x, v \rangle$. Así, defina $\pi : E \rightarrow X$ como $\pi(\langle x, v \rangle) = x$. Finalmente, la topología de E es la topología cociente derivada de la topología producto en $U_i \times \mathbb{C}^n$.

Veamos un ejemplo básico de un haz vectorial.

Ejemplo 1.7. (*Haz trivial*)

Consideremos el haz producto $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, p_1, \mathbb{C})$ donde $p_1 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la proyección al primer factor. De esta manera, obtenemos la figura siguiente:



Observe que, para todo $x \in \mathbb{C}$ se tiene

$$p_X^{-1}(x) = x \times \mathbb{C} \cong \mathbb{C},$$

es decir tiene estructura de espacio vectorial. Si tomamos la cubierta dada por $\{\mathbb{C}\}$ tenemos que

$$p_X^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

por lo tanto el homeomorfismo

$$\varphi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

está dado por

$$\varphi_{\mathbb{C}} = id_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}}.$$

Ahora, antes de pasar al siguiente ejemplo consideremos lo siguiente: Tomemos \mathbb{C}^2 como \mathbb{C} -espacio vectorial y la siguiente relación de equivalencia:

Sean $(x_0, x_1), (x'_0, x'_1) \in \mathbb{C}^2$, decimos

$$(x_0, x_1) \sim (x'_0, x'_1) \Leftrightarrow (x_0, x_1) = \lambda(x'_0, x'_1) \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Así, definimos el **espacio proyectivo** \mathbb{P}^1 como:

$$\mathbb{P}^1 := \frac{\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}}{\sim},$$

el cual es un espacio topológico dado por la cubierta $\{U_i\}_{i=0}^1$ con

$$U_i = \{[x_0 : x_1] \mid x_i \neq 0\}.$$

Observemos que si $[x_0 : x_1] \in U_0$ tenemos que $x_0 \neq 0$ y por lo tanto

$$[x_0 : x_1] = [1 : \frac{x_1}{x_0}],$$

y de manera análoga, si $[x_0 : x_1] \in U_1$ $x_1 \neq 0$ tenemos

$$[x_0 : x_1] = [\frac{x_1}{x_0} : 1],$$

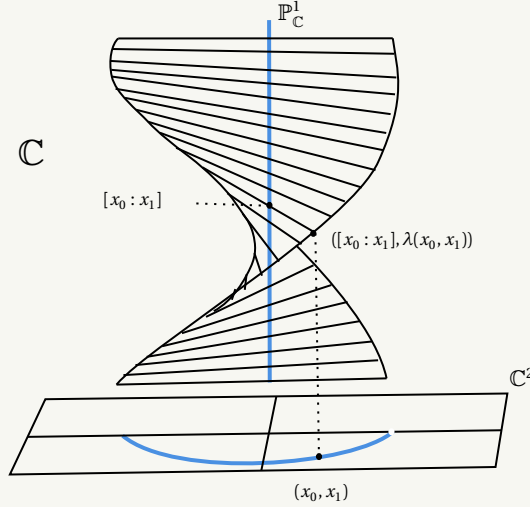
con esto podemos tomar representantes según nos convenga.

Ejemplo 1.8.

Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathcal{O}(-1) := \{([y], v) \mid [y] \in \mathbb{P}^1, v \in \mathbb{C}^2, v = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}^*\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2,$$

el cual es un espacio topológico con la topología subespacio.



Veamos que $(\mathcal{O}(-1), \pi, \mathbb{P}^1)$ es un haz vectorial, donde

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{O}(-1) &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ ([x_0 : x_1], (\lambda x_0, \lambda x_1)) &\mapsto [x_0 : x_1]. \end{aligned}$$

Sea $[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(-1)_{[x_0 : x_1]} &= \pi^{-1}([x_0 : x_1]), \\ &= \{([x_0 : x_1], (\lambda x_0, \lambda x_1)) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}, \\ &\cong \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Es decir $\pi^{-1}([x_0 : x_1])$ tiene estructura de espacio vectorial. El siguiente paso es probar que es localmente trivial, es decir, existe una cubierta $\{U_i\}_{i \in I}$ tal que

$$\mathcal{O}(-1)|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}.$$

Tomemos $\{U_i\}_{i=0}^1$ con

$$U_i = \{[x_0 : x_1] \mid x_i \neq 0\}$$

observe que

$$\mathcal{O}(-1)|_{U_i} = \{([x_0 : x_1], (\lambda x_0, \lambda x_1)) \mid \lambda \in \mathbb{C}, x_i \neq 0\}.$$

Así, definamos

$$\begin{aligned}\varphi_i : \mathcal{O}(-1)|_{U_i} &\longrightarrow U_i \times \mathbb{C} \\ ([x_0 : x_1], (\lambda x_0, \lambda x_1)) &\mapsto ([x_0 : x_1], \lambda x_i).\end{aligned}$$

Veamos estas asignaciones no dependen del representante. Sea (x'_0, x'_1) otro representante de la clase $[x_0 : x_1]$ es decir $(x_0, x_1) = \beta(x'_0, x'_1)$ para algún $\beta \in \mathbb{C}$. Así

$$\begin{aligned}\varphi_0([x_0 : x_1], (\lambda x_0, \lambda x_1)) &= ([x_0 : x_1], \lambda x_0) \\ &= ([\beta x'_0 : \beta x'_1], \lambda(\beta x'_0)) \\ &= \varphi_0([\beta x'_0 : \beta x'_1], (\lambda\beta x'_0, \lambda\beta x'_1)),\end{aligned}$$

y ya que $(x_0, x_1) \sim (x'_0, x'_1)$, entonces no depende del representante. De manera análoga hacemos lo propio para φ_1 .

Ahora veremos que para todo $[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ la estructura de la fibra $\mathcal{O}(-1)|_{[x_0 : x_1]}$ es compatible con la topología de $\mathcal{O}(-1)$, esto es, $p_1 \circ \varphi_i = p$. Sea $[x_0 : x_1] \in U_i$

$$\begin{aligned}(p_1 \circ \varphi_i)([x_0 : x_1]) &= p_1(\varphi_i([x_0 : x_1])) \\ &= p_1([x_0 : x_1], \lambda x_i) \\ &= [x_0 : x_1] \\ &= p([x_0 : x_1], (\lambda x_0, \lambda x_1)).\end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que la inversa se define como

$$\begin{aligned}\varphi_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{O}(-1)|_{U_i} \\ ([x_0 : x_1], \beta) &\mapsto \left([x_0 : x_1], \left(\frac{\beta x_0}{x_i}, \frac{\beta x_1}{x_i}\right)\right).\end{aligned}$$

Se verifica que

- $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_i = Id_{E|U_i}$.
- $\varphi_i \circ \varphi_i^{-1} = Id_{U_i \times \mathbb{C}}$.

Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{O}(-1)$ es un haz vectorial de rango 1 sobre \mathbb{P}^1 y es llamado el **haz tautológico** sobre \mathbb{P}^1 . Ahora veamos quienes son sus funciones de transición.

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & & U_{01} \times \mathbb{C} \\
 & \nearrow^{\varphi_0} & \uparrow \\
 \mathcal{O}(-1)|U_{01} & & \varphi_{01} = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1} \\
 & \searrow_{\varphi_1} & \uparrow \\
 & & U_{10} \times \mathbb{C}
 \end{array}$$

De esta manera

$$\begin{aligned}
 \varphi_{01}([x_0 : x_1], \lambda x_1) &= \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}([x_0 : x_1], \lambda x_1) \\
 &= ([x_0 : x_1], \frac{x_0}{x_1} \cdot \lambda x_1) \\
 &= ([x_0 : x_1], \lambda x_0).
 \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que la función de transición está dada como

$$\begin{aligned}
 g_{01} : U_{01} &\longrightarrow GL(1, \mathbb{C}) \\
 [x_0 : x_1] &\mapsto g_{01}([x_0 : x_1]) := \frac{x_0}{x_1}.
 \end{aligned}$$

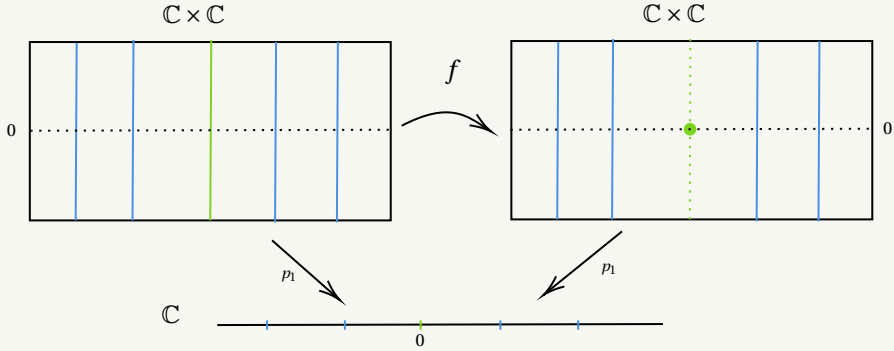
Definición 1.9. Un **homomorfismo entre haces vectoriales** $(E, p, X), (E', p', X)$ es una función continua $\phi : E \longrightarrow E'$ tal que:

1. $p' \circ \phi = p$.
2. $\phi_x : E_x \longrightarrow E'_x$ es un homomorfismo de espacios vectoriales $\forall x \in X$.

Ejemplo 1.10. Consideremos el haz trivial $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, p_1, \mathbb{C})$ y el homomorfismo de haces

$$f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad (x, v) \mapsto (x, x \cdot v).$$

De lo anterior tenemos el siguiente diagrama



Este ejemplo nos muestra que los homomorfismos entre haces vectoriales no siempre preservan la dimensión de la fibra, es por ello que pediremos que lo hagan, a estos homomorfismos se les conoce como homomorfismos de rango constante.

Definición 1.11. Un homomorfismo $\phi : E \longrightarrow E'$ es un **isomorfismo** si y solo si existe un homomorfismo $\psi : E' \longrightarrow E$ tal que $\psi \circ \phi = id_E$ y $\phi \circ \psi = id_{E'}$.

El siguiente resultado describe la relación que guarda un haz vectorial con sus funciones de transición.

Lema 1.12. El conjunto de clases de equivalencia de haces vectoriales bajo isomorfismo está en biyección con el conjunto de clases de equivalencia de funciones de transición bajo conjugación.

Este resultado nos dice lo siguiente. Suponga que tenemos dos haces vectoriales E y F con trivializaciones $\{U_i, \varphi_i\}$ y $\{V_j, \psi_j\}$ y funciones de transición $\{g_{ik}\}$ y $\{h_{jl}\}$ respectivamente. Entonces podemos tomar una trivialización común, por ejemplo, $\{U_i \cap V_j, \phi_i\}$ y $\{U_i \cap V_j, \psi_j\}$ y restringir las funciones de transición a estas intersecciones. Ahora, el lema nos dice que si E y F son isomorfos entonces existen matrices $A_{ij} \in GL_n(\mathbb{C})$ tales que $g_{ik} = A_{ik} h_{jl} A_{jl}^{-1}$.

Más aún, si suponemos que $E = F$ y tomamos como antes dos trivializaciones, $\{U_i, \varphi_i\}$ y $\{V_j, \psi_j\}$. Entonces concluiremos que las funciones de transición $\{g_{ik}\}$ y $\{h_{jl}\}$ son conjugadas. Es decir, no dependen (salvo conjugación) de la trivialización ni de

sus refinamientos.

Al igual que en espacios vectoriales se tienen operaciones para haces vectoriales, como se muestra a continuación:

Espacios vectoriales	Haces vectoriales	Func. Trans.
$V \oplus W$	$E \oplus E' := \bigsqcup_{x \in X} (E_x \oplus E'_x)$	$g_{ij} \oplus g'_{ij}$
$V \otimes W$	$E \otimes E' := \bigsqcup_{x \in X} (E_x \otimes E'_x)$	$g_{ij} \otimes g'_{ij}$
$V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{k})$	$E^* = \text{Hom}(E, X \times \mathbb{C})$	$(g_{ij}^\top)^{-1}$
V/W	$E/F := \bigsqcup_{x \in X} (E_x/F_x)$	

Ejercicio 1.13. *Demostrar que $E \oplus E'$, $E \otimes E'$, E^* y E/F son haces vectoriales con funciones de transición como se muestran en la tabla anterior.*

1.2. Secciones de un haz.

Definición 1.14. *Sea (E, p, X) un haz vectorial de rango n . Una **sección local** de E sobre un conjunto abierto $U \subset X$ es una función continua*

$$s : U \rightarrow E,$$

tal que $p(s(x)) = x$ para todo $x \in U$ y denotaremos al conjunto de estas secciones como:

$$\Gamma(U, E) = \{s : U \rightarrow E \mid s \text{ es una sección local de } E \text{ sobre } U\}.$$

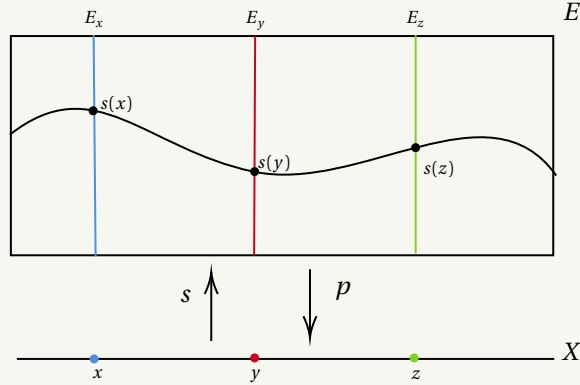
Observemos que $\pi \circ s(x) = x$ implica $s(x) \in E_x$ para todo $x \in U$. Así como se tienen secciones locales podemos considerar aquellas que se definan en todo X , es decir,

$$s : X \rightarrow E$$

las llamaremos **secciones globales** y se denotarán por

$$\Gamma(X, E) = \{s : X \rightarrow E \mid s \text{ es una sección global de } E\},$$

al conjunto de secciones globales del haz vectorial E . Una representación de las secciones la podemos ver en el siguiente figura:



Ahora, consideremos una sección global $s \in \Gamma(X, E)$, sabemos E tiene una cubierta que lo trivializa $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$, de esta manera, para obtener secciones locales a partir de s podemos considerar la restricción a cada uno de los elementos de esta cubierta, es decir

$$s|_{U_i} : U_i \rightarrow E|_{U_i}.$$

Esto es, obtenemos una colección $\{s_i = s|_{U_i}\}_{i \in I}$ de secciones locales de E . Mas aún, $\varphi_i(s_i) = (x, \tilde{s}_i)$ donde $\tilde{s}_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ son funciones continuas.

Por otro lado, supongamos que tenemos una colección $\{t_i : U_i \rightarrow E\}_{i \in I}$ de secciones locales del haz vectorial E . De esta manera podemos preguntarnos, ¿Bajo que condiciones nos definen una sección global $t : X \rightarrow E$? Veamos el siguiente resultado.

Lema 1.15. *Sea E haz vectorial sobre X con funciones de transición $\{g_{ij}\}$ con respecto a la trivialización $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$. Entonces una sección global s de E está dada por una colección de funciones continuas $\{\tilde{s}_i\}$ satisfaciendo la condición de compatibilidad*

$$\tilde{s}_i = g_{ij} \tilde{s}_j.$$

Esto nos dice lo siguiente: para definir una sección global nos gustaría que en las intersecciones las secciones locales coincidan, esto es, suponga $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces

el siguiente diagrama debe conmutar

$$\begin{array}{ccccc}
 & & p^{-1}(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{p_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C}^n \\
 & \nearrow^{t_i} & & & \uparrow \varphi_{ij} & & \uparrow g_{ij} \\
 U_i \cap U_j & & & & & & \\
 & \searrow_{t_j} & & & & & \\
 & & p^{-1}(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\varphi_j} & U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{p_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C}^n
 \end{array}$$

Es decir, tomando $\tilde{t}_i := p_{\mathbb{C}} \circ \varphi_i \circ t_i$ tenemos

$$\tilde{t}_i = g_{ij} \tilde{t}_j.$$

De esta manera, secciones locales definen secciones globales si existe una forma de hacer que coincidan en las intersecciones, en otras palabras, satisfacen una propiedad de pegado dado por las funciones de transición.

El siguiente resultado muestra que el conjunto de secciones locales cuenta con una estructura de espacio vectorial.

Lema 1.16. *El conjunto $\Gamma(U, E)$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial con la operaciones usuales de suma y producto escalar de funciones.*

El lema se sigue apartir de lo siguiente: Sean $s, t \in \Gamma(U, E)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $s(x), t(x) \in E_x$ y de esta manera definimos las operaciones

- $(s + t)(x) = s(x) + t(x).$
- $(\lambda s)(x) = \lambda \cdot s(x).$

Finalmente, para haces vectoriales topológicos tenemos el siguiente resultado: Supongamos que $L \rightarrow X$ es un haz topológico tal que admite una sección s que nunca se anula. Entonces podemos probar que L es isomorfo al haz trivial. Para ello basta observar que si $s : X \rightarrow L$ es tal sección, entonces define un morfismo de haces lineales:

$$g : X \times \mathbb{C} \rightarrow L$$

dado por $g(x, \lambda) = \lambda s(x)$ y como es no nula, entonces es un isomorfismo.

2. SUPERFICIES DE RIEMANN

En esta sección recuperaremos algunos conceptos básicos de Superficie de Riemann. La idea es considerar una superficie de Riemann, sus funciones holomorfas y meromorfas para después ver su relación con las secciones de haces lineales sobre X . Invitamos al lector interesado en profundizar a revisar [Gu] y [Mi].

Sea X un espacio topológico, Hausdorff y segundo contable. Una **carta** para X es un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ donde U es un abierto en X y V un abierto en \mathbb{C} . Si $\varphi_j : U_j \rightarrow V_j$, y $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, son dos cartas para X , diremos que son **cartas compatibles** si U_i, U_j son disjuntos o si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ y

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es un biholomorfismo.

Un **atlas para** X está formado por una cubierta $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ y una colección de cartas $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ compatibles entre si, esto es $\mathcal{A} = \{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$.

Si $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ son dos atlas para X , entonces decimos que son **atlas equivalentes** si cada carta de \mathcal{A}_1 es compatible con cada carta \mathcal{A}_2 . Esto determina una relación de equivalencia entre atlas. A una clase de equivalencia de atlas se le conoce como una estructura compleja para X .

Ejercicio 2.1. Demuestra que la equivalencia entre atlas, es una relación de equivalencia.

Definición 2.2. Una **superficie de Riemann** X es un espacio topológico, Hausdorff, dos numerable con una estructura compleja.

Definición 2.3. (Carta centrada.) Sea X una superficie de Riemann y $p \in X$ un punto. Una **carta centrada en** p es una carta $\varphi : U \rightarrow V$ tal que $\varphi(p) = 0$.

Ejemplo 2.4. Si $X = \mathbb{R}^2$ y U abierto de \mathbb{R}^2 que contiene a $(0, 0)$. Entonces la carta $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $\varphi(x, y) = x + yi$ está centrada en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

2.1. Funciones holomorfas y meromorfas. Si X es una superficie de Riemann, $p \in X$ un punto y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es una **función holomorfa (respectivamente meromorfa) en p** si para una carta $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ tal que $p \in U_i$ se cumple que la función

$$f \circ \varphi_i^{-1} : V_i \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

es una función holomorfa (respectivamente meromorfa) en $\varphi_i(p)$. Esta definición es independiente de la carta elegida. Como es usual, diremos que f es holomorfa (respectivamente meromorfa) en toda la superficie de Riemann X si y solo si es holomorfa (respectivamente meromorfa) en todo punto de X .

Al conjunto de funciones holomorfas en X se le denota como $\mathcal{O}(X)$. Mas aún, si $U \subseteq X$ es un abierto, el **conjunto de funciones holomorfas** en U se denotará como $\mathcal{O}(U)$.

Por otro lado, los conceptos de cero y polo conocidos en \mathbb{C} , se extienden a X de la siguiente manera:

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en $p \in U_i \subseteq X$. Diremos que f **tiene un cero (respectivamente un polo) en p** si

$$f \circ \varphi_i^{-1} : V_i \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

tiene un cero (respectivamente un polo) en $\varphi_i(p)$. Mas aún, el **orden de f en p** se define como el orden de $f \circ \varphi_i^{-1}$ en $\varphi_i(p)$. Nuevamente, las definiciones anteriores no dependen ni del atlas ni de la carta φ_i escogida.

Recordemos que una función $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con U abierto, es una función **diferenciable en el sentido complejo** en $z_0 \in U$. Si

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Cuando f es diferenciable en todo z_0 en U la función se dice **holomorfa**.

Observación 2.5. En ocasiones se dice que f es holomorfa es sinónimo de analítica o regular. Recordemos que una función es **analítica** si existe una expansión de la serie de Taylor alrededor de un punto z_0 .

Definición 2.6. Si X es una superficie de Riemann, $p \in X$ y $f : U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con U vecindad de p entonces:

- a) El punto p es una **singularidad removible** de f si y solo si existe una carta $\varphi : U \rightarrow V$ $p \in U$ tal que $f \circ \varphi^{-1}(p)$ tiene una singularidad removible en $\varphi(p)$.
- b) Se dice que f tiene un **polo** en p si y solo si existe una carta $\varphi : U \rightarrow V$ con $p \in U$, tal que $f \circ \varphi^{-1}$ tiene un polo en $\varphi(p)$.
- c) f tiene una **singularidad esencial** en p si y solo si existe una carta $\varphi : U \rightarrow V$ con $p \in U$, tal que $\varphi(p)$ es una singularidad esencial de la composición $f \circ \varphi^{-1}$.

Definición 2.7. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es **meromorfa** en un punto $p \in X$, si es holomorfa, tiene singularidad removible o tiene un polo en p . Además, se dice que f es meromorfa en un abierto $U \subseteq X$, si es meromorfa en todo punto de U .

Si $U \subset X$ es un subconjunto abierto y X es una superficie de Riemann entonces, $\mathcal{M}_X(U)$ o de manera simplificada $\mathcal{M}(U)$, denota el conjunto de las funciones meromorfas, esto es:

$$\mathcal{M}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ meromorfa}\}.$$

Cuando consideramos una superficie de Riemann X entonces los ceros y polos de las funciones forman un conjunto discreto, esto de acuerdo con el siguiente resultado.

Lema 2.8. Sea X una superficie de Riemann compacta y $f \in \mathcal{M}(X)$, entonces f tiene un número finito de ceros y polos.

Si f es una función holomorfa definida en una vecindad menos un punto digamos en p (vecindad agujerada). Y si $\varphi : U \rightarrow V$ una carta en X con U vecindad de p tal que $\varphi(x) = z$. Entonces $f \circ \varphi^{-1}$ es una función holomorfa en una vecindad $z_0 = \varphi(p)$. Por lo que podemos hacer una expansión en serie de Laurent alrededor de z_0

$$f \circ (\varphi)^{-1}(z_0) = \sum_n c_n (z - z_0)^n.$$

Obteniendo la siguiente clasificación:

1. f tiene una **singularidad removible** si y solo si su expansión en serie de Laurent no tiene términos negativos.
2. f tiene un **polo** si y solo si su expansión en serie de Laurent tiene un número finito de términos negativos.
3. f tiene una **singularidad esencial** si tiene infinitos términos negativos en su expansión en serie de Laurent.

2.2. Orden de una función meromorfa en un punto. Sea X una superficie de Riemann, $p \in X$ y $U \subseteq X$ un abierto que contiene a p . Tomemos un atlas para X , digamos $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$, tal que $p \in U_1$, con $\varphi_1(p) = 0$. Como vimos en la Sección 2.1, una función $f : U \subseteq X \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa (respectivamente, meromorfa) en $p \in U$ si $f \circ \varphi_1^{-1}$ es holomorfa en cero (respectivamente, meromorfa.) Mas aún, f tiene un cero (respectivamente, polo) si y solo si $f \circ \varphi_1^{-1}$ tiene un cero (respectivamente, polo) en 0 y tendremos que

$$\text{ord}_p f := \text{ord}_0(f \circ \varphi_1^{-1}),$$

y estas definiciones no dependen de las cartas elegidas. Parte del trabajo que se realiza en el estudio de las superficies de Riemann es determinar el conjunto $\mathcal{O}(U)$ de funciones holomorfas y el conjunto $\mathcal{M}(U)$ de funciones meromorfas en un abierto $U \subseteq X$.

Suponga que $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, entonces $f \in \mathcal{M}(X)$ si $f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}$ meromorfa en $\varphi_i(U_i)$. La función $f \in \mathcal{M}(X)$ determina una colección $\{\tilde{f}_i\}_{i \in I}$ con $\tilde{f}_i := f \circ \varphi_i^{-1}$, de funciones meromorfas en U_i tales que:

- 1) $\{\tilde{f}_i = f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}\}_{i \in I}$, son funciones de variable compleja.
- 2) Si las φ_{ji} son los cambios de coordenada. Entonces las funciones $\{\tilde{f}_i\}_{i \in I}$, satisfacen $\tilde{f}_i(z) = \tilde{f}_j \circ \varphi_{ji}(z)$, $\forall z \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$.

Es decir, una función holomorfa (meromorfa), $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ en X determina una colección de funciones de variable compleja (con dominios distintos) tales que se “pegan” bajo ciertas condiciones (cambios de coordenadas).²

De lo anterior podemos notar que para construir funciones holomorfas (meromorfas) para una superficie de Riemann X , no basta considerar un conjunto arbitrario de funciones complejas.

Ejercicio 2.9. Cuando tomamos como superficie de Riemann $X = \mathbb{C}$. Notemos que en este caso $\varphi_{ij} = \text{id}_{\mathbb{C}}$. Así, ya que las funciones cambio de coordenadas son la identidad, entonces el “pegado” de las funciones es simplemente $f_i = f_j$ en $U_i \cap U_j$. Sin embargo en el caso general depende de la naturaleza de φ_{ij} .

²Este es el principio de una teoría más avanzada conocida como teoría de gavillas (sheaves). Invitamos al lector interesado a leer [Gu] y [Mi] o en un contexto mas general [Te].

2.3. Funciones Holomorfas y Meromorfas en una superficie de Riemann Compacta. En esta sección, presentamos algunos de los resultados conocidos de la Teoría de superficies de Riemann sobre la naturaleza de las funciones holomorfas y meromorfas. Para ello, consideramos en todo momento que X es una superficie de Riemann compacta. Estamos interesados en resolver la siguiente pregunta: ¿Cómo son las funciones holomorfas y meromorfas de una superficie de Riemann X ? Existen algunos resultados que describen a las funciones holomorfas y meromorfas, los cuales se presentan a continuación.

Teorema 2.10. *Si X una superficie de Riemann compacta, entonces toda función holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es constante.*

Este teorema es una consecuencia de uno más general, el cual afirma que las funciones holomorfas no constantes entre dos superficies de Riemann son funciones abiertas.³ La demostración a este resultado puede ser encontrada en [Gu],[Gri],[Mi].

El siguiente teorema ilustra la naturaleza de las funciones meromorfas en las superficies $\hat{\mathbb{C}}$ y \mathbb{P}^1 .

Teorema 2.11. *Las siguientes afirmaciones se satisfacen.*

1. $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$, funciones racionales.
2. $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in \mathbb{C}[z, w] \text{ homogéneos, del mismo grado} \right\}$.

Dada una función $f \in \mathcal{M}(X)$, quisiéramos saber cómo determinar sus ceros y polos y calcular sus multiplicidades. Para ello, tenemos lo siguiente.

Teorema 2.12. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Si $f \in \mathcal{M}(X)$, entonces el número de ceros y el número de polos de f coincide (contando multiplicidades).*

Con los resultados presentados arriba, calculamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.13. *Tomemos una función $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ definida como*

$$f(z) = \frac{(z-3)^2}{z(z+i)}.$$

³Si $f : X \rightarrow Y$ es holomorfa, X es compacta y Y conexa, entonces $f(X) \subseteq Y$ es un abierto y compacto. Así por la conexidad de Y tenemos que $f(X) = Y$. Lo cual es falso si Y no es compacta.

Entonces, por el Teorema 2.11, la función $f(z)$ es una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$. Además tiene en 3 un cero de multiplicidad dos, en 0 tiene un polo de multiplicidad uno y en $-i$ tiene un polo de multiplicidad uno.

Ejemplo 2.14. Consideremos una función $g(z) \in \mathbb{C}(z)$ definida de la siguiente manera

$$g(z) = \frac{(z-3)}{z^5}.$$

En este caso la función $g(z)$ es una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$. Además, tiene en 3 un cero de multiplicidad uno, en 0 tiene un polo de multiplicidad cinco y en ∞ un cero de multiplicidad cuatro.

Ejemplo 2.15. Sea $f(z) \in \mathcal{M}(X)$ tal que

$$f(z) = \frac{z^2 + 4z + 4}{1} = \frac{(z+2)^2}{1}.$$

- a) Tiene cero (orden 2) en -2 .
- b) Tiene polo (orden 2) en ∞ .

Notemos que

$$f(1/z) = \frac{1}{z^2} + \frac{4}{z} + z = \frac{1 + 4z + z^2}{z^2}.$$

Así, $f(1/z)$ tiene un polo de orden 2 en 0 y $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en ∞ .

Por otro lado, recordemos que $\widehat{\mathbb{C}}$ tenemos dos cartas

$$\varphi_0: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}_w, \varphi_0(z) = z, \varphi_0(\infty) = 0.$$

$$\varphi_1: \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}_z, \varphi_1(z) = \frac{1}{z} = w.$$

Una función $f \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$ es una función $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que las siguientes funciones “pegan” bien

- $f_0 = f \circ \varphi_0^{-1}: \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}$,
- $f_1 = f \circ \varphi_1^{-1}: \mathbb{C}_w \rightarrow \mathbb{C}$.

Sea $f \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$, definida como

$$f = \frac{(z-1)^2(z+1)}{z}.$$

Los ceros y polos de f se calculan con la función f_0 (excepto el ∞). Por otro lado, para ver si ∞ es un cero o polo usamos la función f_1 evaluada en $w = 0$ y la igualdad $f_1(w) = f(1/w)$. Entonces

1. El punto 1 es un cero de orden dos, el punto -1 es un cero de orden uno y finalmente el punto 0 es un polo de orden uno.
2. Afirmamos que el ∞ es un polo de orden dos de f . Para calcularlo, note que

$$f_1(w) = f(1/w) = \frac{w(1-w)^2(1+w)}{w^3} = \frac{(1-w)^2(1+w)}{w^2}.$$

Ahora, se puede ver que $w = 0$ es un polo de orden dos para f_1 .

3. FORMAS DIFERENCIALES

Una de los más importantes desarrollos en la geometría algebraica fue la introducción por parte de H. Poincaré y E. Cartan de las **formas diferenciales**.

Desde el punto de vista más elemental en las nociones del álgebra lineal el **producto exterior** $F \wedge G$ de dos funciones lineales $G, F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la **función bilineal**

$$F \wedge G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que mapea

$$(v, w) \mapsto F \wedge G(v, w) = F(v)G(w) - G(v)F(w).$$

Esta operación tiene las siguientes propiedades

- $F \wedge F = 0$.
- $F \wedge G = -G \wedge F$.

La noción básica de lo que es una **uno-forma** tiene que ver con la derivada de los campos escalares en \mathbb{R}^n , ya que la derivada de una función escalar $F = F(x_1, \dots, x_n)$ es otra función dF que evaluada en una posición, digamos p , determina una función lineal (**covector**)

$$dF(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que mapea

$$v \mapsto dF(p)v,$$

y es la multiplicación

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n}(p) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \right] = v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) + \dots + v_n \frac{\partial F}{\partial x_n}(p).$$

Esto nos proporciona información de cómo varía F en la dirección v .

Observe que si x_i es la función proyección (**proyector**) en el i -ésimo eje entonces

$$dx_i = [0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0].$$

Aquí arriba podemos ver como tenemos una asignación

$$\begin{aligned} p &\mapsto \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n}(p) \end{array} \right], \\ &\frac{\partial F}{\partial x_1}(p)[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)[0 \quad \dots \quad 0 \quad 1], \\ &\frac{\partial F}{\partial x_1}(p)dx_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)dx_n, \\ &\mapsto \sum_s \frac{\partial F}{\partial x_s}(p)dx_s. \end{aligned}$$

Esto último ilustra como a cada abierto U de \mathbb{R}^n se asigna en el conjunto del $C^\infty(U)$ -módulo sobre los “diferenciales” $\{dx_1, \dots, dx_n\}$.

Ahora con el producto exterior de dos uno-formas $\theta = \sum_s \theta_s dx_s$ y $\phi = \sum_s \phi_s dx_s$ se construye una **dos-forma** mediante

$$\theta \wedge \phi = \sum_{s,t} \theta_s \phi_t dx_s \wedge dx_t.$$

En otras palabras una dos-forma es una combinación lineal de bilineales $dx_i \wedge dx_j$ con C^∞ -coeficientes. El conjunto de estos objetos es un C^∞ -módulo.

Pero la derivada d (que recibe el nombre de **derivada exterior**) se puede extender para construir dos-formas mediante

$$\begin{aligned} d(Pdx + Qdy) &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy, \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy, \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Con respecto a considerar variable compleja los covectores (funcionales lineales, proyectores) dx, dy son usados para obtener $dz = dx + i dy$ y $d\bar{z} = dx - i dy$ tanto como al bivector $dz \wedge d\bar{z}$.

Con las expresiones generales

$$\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z}$$

y

$$h(z, \bar{z}) dz \wedge d\bar{z}$$

se establecen uno- y dos-formas en \mathbb{C} .

Teniendo uno- y dos-formas en \mathbb{C} es posible inducir localmente uno- y dos-formas en una Superficie de Riemann con una carta $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ mediante el **pullback** $\phi^*(f dz + g d\bar{z})$.

3.1. Ejemplo con uno-formas holomorfas y meromorfas. Desde el punto de vista complejo de [Mi] una **uno-forma** en una Superficie de Riemann, es asignar a cada carta $\phi : V \rightarrow U$ una expresión como

$$f(z)dz,$$

aquí, se toma a z como la variable en U_1 y donde f es un escalar $U_1 \rightarrow \mathbb{C}$, que cuando se define en otra carta que tienen intersección $\phi_2 : V_2 \rightarrow U_2$ la composición $T_{12} = \phi_2^{-1} \phi_1$ es holomorfa y para la uno-forma en la nueva variable es

$$f \circ T_{12}(w) T'_{12}(w) dw.$$

Además satisface la siguiente propiedad.

Dadas tres cartas $\phi_i : V_i \rightarrow U_i$ con intersección y un escalar $U_1 \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ definimos $T_{ij} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i : U_i \rightarrow U_j$ para tener

$$U_3 \xrightarrow{T_{23}} U_2 \xrightarrow{T_{12}} U_1 \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

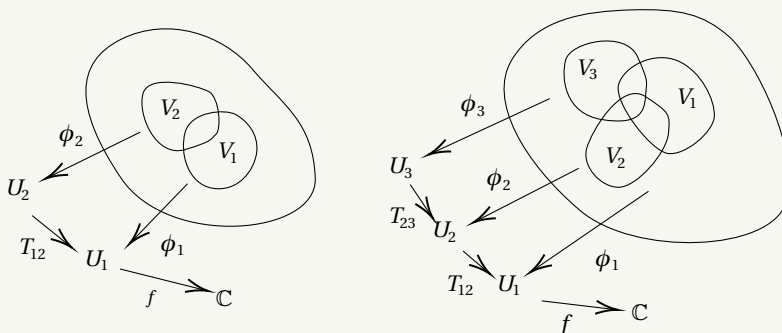
tanto como a

$$U_2 \xrightarrow{T_{12}} U_1 \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

$$U_2 \xrightarrow{f \circ T_{12}} \mathbb{C},$$

pero también

$$U_3 \xrightarrow{T_{13}} U_1 \xrightarrow{f} \mathbb{C}.$$



Entonces si $f(z)dz$ uno-forma en U_1 se transforma a $g(w)dw$ otra uno-forma en U_2 es porque

$$g(w) = f \circ T_{12}(w) T'_{12}(w).$$

Pero si también $g(w)dw$ para la uno-forma en U_2 que se transforma a $h(u)du$ otra uno-forma en U_3 es porque

$$h(u) = g \circ T_{23}(u) T'_{23}(u).$$

Usemos que $T_{23}(u) = w$ y tenemos

$$h(u) = g(w) T'_{23}(u) T_{23}(u) T'_{12}(w).$$

O bien

$$\begin{aligned}
 h(u) &= g \circ T_{23}(u) \cdot T'_{23}(u), \\
 &= g(w) \cdot T'_{23}(u), \\
 &= f \circ T_{12}(w) \cdot T'_{12}(w) \cdot T'_{23}(u), \\
 &= f \circ T_{12} \circ T_{23}(u) \cdot T'_{12}(T_{23}(u)) \cdot T'_{23}(u), \\
 h(u) &= f \circ T_{13}(u) \cdot T'_{13}(u)
 \end{aligned}$$

Esto último indica que $f(z)dz$ con variable z se transforma en $h(u)du$ con variable u en $U_1 \cap U_2 \cap U_3$.

Este mecanismo permite extender hasta una única uno-forma en la misma superficie X .

Ejemplo 3.1. Para la esfera de Riemann tenemos dos cartas, entonces $T_{12}(w) = \frac{1}{w} = z$ y así

$$dw = -\frac{1}{z^2} dz \quad \text{o bien} \quad dz = -\frac{1}{w^2} dw.$$

Por lo tanto para una uno-forma $\theta = f(z)dz$, con f una función racional y se puede escribir como

$$\theta = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw,$$

de donde el residuo de θ en el infinito es definido como el residuo de $-w^{-2} f\left(\frac{1}{w}\right)$ en $w = 0$.

Para la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ tenemos dos cartas $f_1: \mathbb{C} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ como $f_1(w) = w$ y $\phi: \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\phi(z) = \frac{1}{z}$ entonces nuestro cambio de coordenadas es $T(w) = \frac{1}{w}$ por lo que la

uno-forma dz se transforma en $-\frac{1}{w^2}dw$. O si se prefiere

$$f(z)dz \frown -w^{-2}f(1/w)dw.$$

1. Para la uno-forma Kdz tenemos

$$Kdz \frown -Kw^{-2}dw.$$

2 Si nuestra uno-forma es zdz su transformación dará

$$zdz \frown -w^{-3}dw$$

3. Pero para $\frac{dz}{z}$ será

$$\frac{dz}{z} \frown -\frac{dw}{w}.$$

Para mas detalles y mas ejemplos, invitamos al lector a revisar el libro [Fa, Fo, Gu, Mi].

3.2. Dos-formas elementales en una variable compleja. Como cementario final con el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ \bar{z} &= x - iy \end{aligned}$$

se obtiene como base cotangente

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy, \\ d\bar{z} &= dx - idy \end{aligned}$$

y de esto

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{2}dz + \frac{1}{2}d\bar{z}, \\ dy &= \frac{1}{2i}dz - \frac{1}{2i}d\bar{z}, \end{aligned}$$

para entregarnos

$$dx \wedge dy = \frac{i}{2}dz \wedge \bar{z},$$

relación que abre el panorama hasta las alturas de la base vectorial de las dos formas en un variedades de dimensión dos. Ella es usada para que una integral doble compleja $\iint_{\Omega} f(z, \bar{z}) dz \wedge d\bar{z}$ se tenga una manera de transferirnos al cálculo vectorial real

$$\iint_{\Omega} f(z, \bar{z}) dz \wedge d\bar{z} = -2i \iint_{\Omega} f(x + iy, x - iy) dx \wedge dy.$$

4. DIVISORES

Los divisores son una herramienta importante en el estudio de las funciones meromorfas en una superficie de Riemann. Como vimos en el Lema 2.8, si X es una superficie de Riemann compacta y $f \in \mathcal{M}(X)$, entonces sus ceros y polos forman un conjunto discreto y finito en X . Con estas hipótesis, estudiaremos las funciones meromorfas en X agrupando la información de sus ceros y polos para posteriormente estudiar las funciones en “paquetes”. Por esta razón, de ahora en adelante consideremos a X como una superficie de Riemann compacta.

Definición 4.1. Sea X una superficie de Riemann y $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ una función. El **soporte** de D es el conjunto de puntos en X tal que la función D no se anula. Es decir,

$$\text{sup}(D) := \{p \in X \mid D(p) \neq 0\}.$$

Un **divisor** de X es una función $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ cuyo soporte es un subconjunto discreto de X . El conjunto de divisores en X se denota como $\text{Div}(X)$.

Dado que X es compacta, una función $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ es un divisor si y solo si tiene soporte finito. Es decir, D es una función cero casi en todas partes excepto en una cantidad finita de puntos en X . En consecuencia, si $D \in \text{Div}(X)$ podemos denotarlo como una suma formal finita

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p.$$

Observación 4.2. El conjunto $Div(X)$ es un grupo abeliano con la operación suma dada de la siguiente manera: Si $D_1, D_2 \in Div(X)$, entonces definimos

$$D_1 + D_2 = \sum_{p \in X} (D_1 + D_2)(p) \cdot p,$$

donde $(D_1 + D_2)(p) := D_1(p) + D_2(p)$.

Definición 4.3. El **grado de un divisor** $D \in Div(X)$ se denota como $deg(D)$ y es igual a la suma de los valores de $D(p)$, para todo $p \in X$. Es decir,

$$deg(D) := \sum_{p \in X} D(p).$$

A partir de este concepto, podemos definir de manera natural a la función **grado** $deg : Div(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, la cual es un homomorfismo de grupos. Así, el núcleo de la función deg es un subgrupo denotado por $Div_0(X)$ y consiste de los divisores de grado cero.

4.1. El divisor de una función meromorfa. Dado que los divisores son un concepto creado para estudiar funciones meromorfas, es de esperarse exista una cierta relación. Específicamente, dada una función $f \in \mathcal{M}(X)$ y considerando que sus ceros y polos forman un conjunto discreto y finito en X , tenemos naturalmente el siguiente concepto.

Definición 4.4. Si $f \in \mathcal{M}(X)$ es una función meromorfa, entonces su **divisor asociado** es

$$(f) := \sum_{p \in X} ord_p f \cdot p.$$

Toda función meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ determina un divisor y el cual podemos descomponer en dos. Consideramos primero aquellos puntos $p \in X$ tales que $ord_p f > 0$, es decir los ceros de f .

Así tenemos el divisor de cero de f , denotado por $div_0(f)$, y dado por

$$div_0(f) = \sum_{p \in X, ord_p(f) > 0} ord_p(f) \cdot p.$$

Por otro lado, consideramos aquellos puntos $p \in X$ tales que $ord_p f < 0$, es decir los polos de la función. Con ello obtenemos el divisor de polos de f , denotado por $div_\infty(f)$ y dado por

$$div_\infty(f) = \sum_{p \in X, ord_p(f) < 0} (-ord_p(f)) \cdot p.$$

Se sigue que para cualquier función meromorfa f , su divisor asociado se puede escribir como

$$(f) = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f).$$

Ahora, ya que toda función meromorfa tiene un divisor asociado, una pregunta que surge es ¿Todo divisor $D \in D(X)$ es el divisor asociado a una función meromorfa? La respuesta claramente es no, para ello basta considerar un divisor tal que su grado no sea cero. Esto nos lleva a definir aquellos divisores que si están asociados a una función meromorfa.

El conjunto de divisores en una superficie de Riemann X se denota como $\text{Div}(X)$. Los divisores definidos por funciones meromorfas son llamados **Divisores principales** y son denotados como $\text{PDiv}(X)$.

Ahora, considerando una función $f \in \mathcal{M}(X)$ sabemos en casos precisos cómo determinar sus ceros y polos y calcular sus multiplicidades. A continuación presentamos algunos ejemplos de divisores asociados a funciones meromorfas:

Ejemplo 4.5. Tomemos una función $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ definida en el Ejemplo 2.14, esto es

$$f(z) = \frac{(z-3)^2}{z(z+i)}.$$

Como vimos, la función es una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ con un cero en 3 de multiplicidad dos, un polo en 0 de multiplicidad uno. En conclusión, la función meromorfa $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene asociado el siguiente divisor

$$(f) = 2 \cdot \mathbf{3} - 1 \cdot \mathbf{0} - 1 \cdot (-\mathbf{i}).$$

Ejemplo 4.6. Tomemos una función $g(z) \in \mathbb{C}(z)$ definida de la siguiente manera.

$$g(z) = \frac{(z-i)}{z^5}.$$

En este caso la función $g(z)$ es una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$, tiene un cero en el punto i de multiplicidad uno y un polo en el punto 0 de multiplicidad cinco. Además en ∞ tiene un cero de multiplicidad cuatro. En este caso el divisor de la función $g(z)$ es

$$(g) = 1 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \infty - 5 \cdot \mathbf{0}.$$

4.2. Ceros y polos de uno-formas meromorfas. Al igual que cuando consideramos funciones meromorfas, podemos calcular ceros y polos de uno-formas meromorfas y determinar sus multiplicidades.

Tal y como vimos en la Sección 3, las uno-formas meromorfas en X , las denotamos por $\mathcal{M}^1(X)$ y cada $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$, la podemos expresar localmente como $f(z)d(z)$, donde $f(z) : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$. Específicamente tenemos lo siguiente:

Si X es una superficie de Riemann. Una 1-forma holomorfa (meromorfa) en X es una colección de 1-formas $\{\omega_i\}_{i \in I}$, una por cada carta $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, tal que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces ω_i transforma en ω_j bajo $T = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : V_j \rightarrow V_i$. Para definir las uno-formas, no es necesario hacerlo en cada carta existente, basta hacerlo para cada carta de un atlas.

Ahora, para determinar si la uno-forma ω cuenta con un cero o un polo en $p \in X$ hacemos lo siguiente: Dada la uno-forma $\omega = \{\omega_i\}_{i \in I}$, para cada $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ tendremos $\omega_i = f_i(z)dz$. Suponga $p \in U_i$ y $\varphi_i(p) = 0$, es decir, la carta está centrada y entonces

$$\text{ord}_p(\omega) := \text{ord}_{\varphi(p)} f_i.$$

El orden así definido no dependerá de la carta elegida (ver, [Mi]) y con esta información tenemos que si $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$, entonces podemos definir su divisor asociado como

$$(\omega) := \sum_{x \in X} \text{ord}_p(\omega) \cdot p.$$

En la siguiente tabla tomaremos el Ejemplo 3.1 de la Sección 3, donde describimos algunas uno-formas meromorfas, y calcularemos sus divisores asociados.

1. Tomemos la uno forma dada por $(\omega) := \{kdz, \frac{-k}{w^2}dw\}$ en $\hat{\mathbb{C}}$. En la primer carta vemos que kdz no hay ceros ni polos. Por otro lado, en la segunda carta tenemos $\frac{-k}{w^2}dw$. Ahora, para ver si ∞ es cero o polo debemos evaluar en $w = 0$ y claramente es un polo (de orden dos). Por lo tanto, ∞ es un polo de orden dos para ω . En conclusión tenemos

$$(w) = -2 \cdot \infty.$$

2. Ahora tomaremos la uno-forma en $\widehat{\mathbb{C}}$ definida como $\omega := \{z dz, -\frac{1}{w^3} dw\}$ tenemos que para la primera carta $z dz$ tiene un cero de orden uno. Para ver que sucede en el punto ∞ tomamos $-\frac{1}{w^3} dw$ y al igual que antes evaluando en $w = 0$ tenemos que es un polo de orden 3. por lo tanto el divisor asociado a esta uno-forma es

$$(\omega) = 1 \cdot 0 - 3 \cdot \infty$$

3. Finalmente, para la uno-forma $(\omega) = \{\frac{1}{z} dz, -\frac{1}{w} dw\}$ y siguiendo el mismo procedimiento que hicimos en los casos anteriores tenemos

$$(\omega) = -1 \cdot 0 - 1 \cdot \infty.$$

Observación 4.7. *Observa que en todos los ejemplos anteriores se cumple que el grado del divisor asociado a las uno-formas es -2 , esto no es casualidad y lo explicaremos mas adelante, después de ver un poco mas de teoría sobre divisores.*

Finalizamos esta sección describiendo algunas propiedades generales de los divisores. Además, los divisores $Div(X)$ forman un grupo bajo la suma y $PDiv(X)$ es un subgrupo.

Los divisores principales satisfacen las siguientes propiedades:

- a) $div(fg) = div(f) + div(g)$.
- b) $div(f/g) = div(f) - div(g)$.
- c) $div(1/f) = -div(f)$.

Similarmenete, si ω es una 1-forma meromorfa

$$div(\omega) = \sum ord_p(\omega) \circ p.$$

Los divisores obtenidos así son llamados **divisores canónicos**.

4.3. Divisores principales, grupo de Picard y divisor canónico. Recordemos que los divisores sobre una superficie de Riemann X forman un grupo bajo la suma, donde el divisor cero es el elemento neutro. Mas aún, si $D = \sum D(p_i) \cdot p_i$ entonces su inverso aditivo es $-D = \sum -D(p_i) \cdot p_i$. El grupo de divisores de la superficie de Riemann se denota como $Div(X)$. Por otro lado, considerando que $PDiv(X)$ es un subgrupo (normal, pues $Div(X)$ es abeliano), tenemos que el cociente

$$Pic(X) := \frac{Div(X)}{PDiv(X)},$$

es un grupo y se conoce como el grupo de Picard de la superficie X . La relación de equivalencia módulo $PDiv(X)$ se conoce como equivalencia lineal. Explícitamente tenemos que $D_1, D_2 \in Div(X)$ son linealmente equivalentes ($D_1 \sim D_2$) si $D_1 - D_2 \in PDiv(X)$. Ahora quisiéramos identificar aquellos divisores que provienen de funciones meromorfas, el siguiente es un resultado en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Proposición 4.8. *Sea $D \in Div(\widehat{\mathbb{C}})$. Entonces, $deg(D) = 0$ si y solo si $D \in PDiv(\widehat{\mathbb{C}})$.*

Demostración. (\Rightarrow) Suponga que $deg(D) = 0$, entonces queremos encontrar una función $(f) \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $div(f) = D$.

Por el Teorema 2.11(1), f es un cociente de polinomios en z . Es decir, $f(z) = p(z)/q(z)$

con $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$. Así, note que podemos escribir a D como

$$D = \sum_{x_i \in X} m_i \cdot x_i + m_\infty \cdot \infty$$

donde $m_\infty := -\sum m_i$, esto porque $\deg(D) = 0$. Entonces

$$f(z) = \prod (z - x_i)^{m_i}$$

es una función que cumple $\text{div}(f) = D$.

(\Leftarrow) Sea $(f) \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$, tal que $\text{div}(f) = D$. Por el Teorema 2.11, $\deg(D) = \deg(\text{div}(f)) = 0$.
□.

De este resultado tenemos que la relación entre los divisores y las funciones meromorfas es muy simple de describir en $\widehat{\mathbb{C}}$. Como consecuencia de lo anterior tenemos el siguiente resultado

Lema 4.9. Sean $D_1, D_2 \in \text{Div}(\widehat{\mathbb{C}})$. Entonces, $D_1 \sim D_2$ si y solo si $\deg(D_1) = \deg(D_2)$.

Demostración. El resultado se sigue de la definición de equivalencia lineal y del hecho $\deg(\text{div}(f)) = 0$, para toda $f \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$. □.

De lo anterior obtenemos que el grupo de Picard de $\widehat{\mathbb{C}}$ es

$$\text{Pic}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}.$$

Cuando consideramos la recta proyectiva, podemos hacer un estudio similar y conocer el grupo de Picard correspondiente.

Ejercicio 4.10. Demuestra que $\text{Pic}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}$.

Dada la equivalencia lineal definida en los divisores, podemos observar que las 1-formas definidas en X también determinan un divisor. Es interesante observar que si ω_1, ω_2 son dos uno-formas definidas en X , entonces los divisores asociados son linealmente equivalentes.

Teorema 4.11. Sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^1(X)$, con $\omega_1 \neq 0$. Entonces, existe una función $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\omega_2 = f \omega_1$.

Demostración. Para probarlo, es necesario construir una función $f \in \mathcal{M}(X)$.

Sea $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ un atlas y $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^1(X)$ dos uno-forma. Consideremos $\omega_1 = \{g_{1,i}(z)dz\}_{i \in I}$ y $\omega_2 = \{g_{2,i}(z)dz\}_{i \in I}$ sus representaciones locales tales que

$$g_{2,i}, g_{1,i} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Entonces definimos $h_i : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{C}$, como $h_i := g_{2,i}/g_{1,i}$. De esta manera, h_i es meromorfa en $\varphi_i(U_i)$, $\forall i \in I$. Ahora definimos $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ como $f_i := h_i \circ \varphi_i$, para cada $i \in I$. Demostraremos que

$$f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}}$$

Para ello note que

$$h_j = \frac{g_{2j}}{g_{1j}} = \frac{(g_{2i} \circ T_{ij})T'_{ij}}{(g_{1i} \circ T_{ij})T'_{ij}} = h_i \circ T_{ij} = h_i \circ (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}),$$

de tal manera que en $U_i \cap U_j$ se cumple

$$f_j = h_j \circ \varphi_j = h_i \circ (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \varphi_j = h_i \circ \varphi_i = f_i.$$

Entonces, las funciones $\{f_i\}_{i \in I}$ definen una función meromorfa f la cual por construcción satisface $\omega_2 = f\omega_1$.

□.

De acuerdo con el Teorema 4.11, los divisores asociados a uno-forma determinan una clase de equivalencia de divisor en $Pic(X)$ la cual se conoce como la **clase del divisor canónico** y usualmente se denota por K_X o simplemente K .

Para el caso en que la superficie de Riemann sea $\widehat{\mathbb{C}}$, sabemos que $Pic(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}$. Además, del Ejemplo 3.1, es claro que $deg(K_{\widehat{\mathbb{C}}}) = -2$.

5. DIVISORES Y HACES LINEALES

La idea de esta sección es usar la teoría de divisores y la teoría de haces vectoriales para estudiar las funciones holomorfas y meromorfas de una superficie de Riemann. Primero definiremos los espacios vectoriales $L(D)$ conformado por funciones meromorfas dominadas por un divisor D . Probaremos que son de dimensión finita. Finalmente enunciamos el teorema de Riemann-Roch en el caso de divisores.

Posteriormente, veremos la relación que existe entre haces lineales y divisores y cómo el espacio de secciones de un haz lineal está relacionado con los espacios $L(D)$. Así enunciaremos el Teorema de Riemann-Roch para haces lineales. Finalizaremos realizando algunos cálculos de secciones para haces lineales particulares.

5.1. Funciones meromorfas dominadas por un divisor. Dado un divisor $D \in Div(X)$, consideramos el siguiente conjunto de funciones meromorfas en X .

$$L(D) := \{f \in \mathcal{M}(X) \mid (f) \geq -D\} \cup \{0\}.$$

el cual es llamado **conjunto de funciones meromorfas dominadas por D** .

En particular, si $D = \sum D(p) \cdot p \in Div(X)$, entonces la desigualdad $(f) \geq -D$ significa que, dado que para cada $p \in X$ se cumple $ord_{p(f)} \geq -D(p)$. Así, si $D(p) > 0$ entonces f tiene en p un polo de orden a lo más $D(p)$. Por otro lado si $D(p) < 0$ entonces f tiene en p un cero de orden al menos $-D(p)$. En otras palabras, el conjunto $L(D)$ está formado por todas las funciones meromorfas en X cuyos polos están acotados por D .

Ejercicio 5.1. *Partiendo de la definición, compruebe que $L(D)$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial.*

Observe que, en el caso particular que $D = \mathbf{0}$ es el divisor cero, tenemos

$$L(\mathbf{0}) := \{f \in \mathcal{M}(X) \mid (f) \geq \mathbf{0}\}.$$

Por definición, este conjunto se compone de todas la funciones “meromorfas en X ” tales que aceptan a lo mas ceros y no tienen polos. Es decir, $L(\mathbf{0})$ corresponde al conjunto de funciones holomorfas definidas en X . Así, por el Teorema 2.10, $L(\mathbf{0}) = \mathbb{C}$ y $\dim_{\mathbb{C}} L(\mathbf{0}) = 1$.

Otro caso interesante para considerar es cuando D es un divisor tal que $deg(D) < 0$. Bajo esta situación tenemos que $L(D) = \{0\}$. Esto se debe a que si f es una función meromorfa definida en X , entonces $deg(f) = 0$. Así que no existe una función meromorfa que satisfaga $(f) \geq -D$.

Finalmente, se sigue que si $D, D' \in Div(X)$ tales que $D \leq D'$ entonces $L(D') \leq L(D)$. Al respecto tenemos el siguiente resultado.

Lema 5.2. *Sea X una superficie de Riemann y D un divisor. Además, si $p \in X$ se cumple que $L(D - p) = L(D)$ o $\dim_{\mathbb{C}} L(D) = \dim_{\mathbb{C}} L(D - p) + 1$.*

Demostración. Si elegimos el punto p y una coordenada $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ centrada en p , y denotamos por $n = -D(p)$. Entonces alrededor de p , cada función $f \in L(D)$ tiene una serie de Laurent de la forma

$$c_n z^n + \dots$$

Definamos una función $\varphi_{Lau} : L(D) \rightarrow \mathbb{C}$ como $\varphi_{Lau}(f) := c_n$, la cual asocia a cada función meromorfa, su coeficiente líder de la serie de Laurent. Esta función es una transformación lineal y $\ker(\varphi_{Lau}) = L(D - p)$. Mas aún, si $\varphi_{Lau} = \mathbf{0}$, entonces $L(D) = L(D - p)$. Por otro lado, si $\ker(\varphi_{Lau}) \neq \mathbf{0}$, entonces la función es sobreyectiva y tenemos la sucesión

$$\mathbf{0} \rightarrow L(D - p) \rightarrow L(D) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{0}$$

siendo así que $\dim_{\mathbb{C}} L(D) = \dim_{\mathbb{C}} L(D - p) + 1$.

□

Una consecuencia de este resultado es el siguiente:

Teorema 5.3. *Si X es una superficie de Riemann compacta y $D \in Div(X)$, entonces $L(D)$ es de dimensión compleja finita. Mas aún, si $D = \mathbf{P} - \mathbf{N}$ es su expresión como suma de divisor positivos y negativos (de ceros y polos), entonces $\dim_{\mathbb{C}} L(D) \leq 1 + \deg(\mathbf{P})$.*

Demostración. Cuando $D = 0$, el resultado se sigue trivialmente. Cuando $D \geq \mathbf{P}$ con $\deg(\mathbf{P}) = 0$, entonces $L(D) \subseteq L(\mathbf{P})$ y $\dim_{\mathbb{C}} L(D) \leq \dim_{\mathbb{C}} L(\mathbf{P})$. Sin embargo, $\dim_{\mathbb{C}} L(\mathbf{P}) = 1$ pues $L(\mathbf{P})$ se compone de funciones holomorfas. En consecuencia, $\dim_{\mathbb{C}} L(\mathbf{P}) \leq 1 + \deg(\mathbf{P})$. Así que la demostración al Teorema, se hace por inducción sobre el grado de \mathbf{P} .

Como ya demostramos el resultado para el caso cero, entonces suponga cierto para el caso $\deg(\mathbf{P}) = n - 1 \geq 0$ y verifiquemos cuando $\deg(\mathbf{P}) = n$. Suponga que $D = \mathbf{P} - \mathbf{N} \in Div(X)$ tal que $\deg(\mathbf{P}) = n$ y $n > 0$. Ahora, si $p \in \text{supp}(\mathbf{P})$, entonces $\mathbf{P}(p) \geq 1$. Tomando el divisor $D - p$, es claro que su descomposición en positivo y negativo queda como $D - p = (\mathbf{P} - p) - \mathbf{N}$. Y como $\deg(\mathbf{P} - p) = n - 1$ entonces por hipótesis de inducción tenemos que $\dim_{\mathbb{C}} L(D - p) \leq 1 + (n - 1)$. Por otro lado, tenemos

$$\dim_{\mathbb{C}} L(D) \leq \dim_{\mathbb{C}} L(D - p) + 1 \leq 1 + \deg(\mathbf{P}).$$

□

Corolario 5.4. *Si D es un divisor en X tal que $D(p) \geq 0$, entonces*

$$\dim_{\mathbb{C}} L(D) \leq \deg D + 1.$$

Es posible determinar la dimensión de este espacio vectorial para algunos divisores particulares.

Ejercicio 5.5. *Determine la dimensión de $L(D)$ cuando $D = \mathbf{0}$ y $D = K_X$.*

Por otro lado si D, D' son dos divisores linealmente equivalentes, es decir $D - D' = (f)$ para alguna $f \in \mathcal{M}(X)$. Entonces, la función f determina una función

$$\phi_f : L(D) \rightarrow L(D')$$

definida como $\phi_f(g) := gf$. Esta función es una transformación lineal invertible y obtenemos lo siguiente.

Lema 5.6. *Si $D, D' \in \text{Div}(X)$ son dos divisores linealmente equivalentes, entonces $L(D)$ es isomorfo a $L(D')$.*

De ahora en adelante y por comodidad, denotaremos la dimensión del espacio $L(D)$ simplemente como $\ell(D)$. Existe un resultado que nos permite calcular explícitamente la dimensión $\ell(D)$ en términos del grado de D y el género de la superficie de Riemann. Este teorema es muy importante en el estudio de la Teoría de gavillas, Teoría de haces vectoriales y Teoría de divisores. En general es uno de los teoremas más importantes de la geometría algebraica.

Teorema 5.7 (Teorema de Riemann-Roch). *Considere X una superficie de Riemann compacta y D un divisor definido sobre X . Entonces se satisface la siguiente igualdad*

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

donde K_X es el divisor canónico y g denota el género de X .

Para una demostración de este Teorema invitamos al lector a ver [Gu], [Mi].

5.1.1. Algunos cálculos con el Teorema de Riemann-Roch. Como ya vimos anteriormente, si $D = \mathbf{0}$ es el divisor cero, entonces $\ell(\mathbf{0}) = 1$. Con esto en mente podemos calcular $\ell(K)$ utilizando el teorema de Riemann-Roch simplemente como

$$\ell(\mathbf{0}) - \ell(K) = \deg(\mathbf{0}) + 1 - g.$$

concluyendo que $\ell(K) = g$. Ahora con este nuevo resultado podemos ver que $\deg(K) = 2(g - 1)$.

Finalmente, cabe mencionar que los espacios $L(D)$ también pueden ser definidos de manera local como

$$L(D)(U) := \{f \in \mathcal{M}(U) \mid (f) \geq -D|_U\}.$$

Siendo $D|_U$ el divisor restringido al abierto U o la suma formal dada por D y restringida a los puntos que pertenecen a U . Estos espacios $L(D)(U)$ son utilizados para relacionar los divisores con gavillas localmente libres de rango uno (también conocidas como gavillas invertibles). Sin embargo, ese material no se desarrolla en estas notas y referimos al lector interesado a [Mi].

5.2. Relación entre divisores y haces lineales. Como vimos en la Sección 1, si L es un haz lineal sobre un espacio topológico (Superficie de Riemann) X , entonces existe una trivialización para L la cual se compone de una cubierta $\{U_i\}_{i \in I}$ y homeomorfismos $\{\varphi_i : L|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}\}_{i \in I}$. Partiendo de esta trivialización, se determinan las funciones de transición que denotamos por $\{g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*\}_{i, j \in I}$. Recordemos además que las funciones $\{g_{ij}\}_{i, j \in I}$ cumplen las condiciones de cociclos.

En principio, dichas funciones de transición $\{g_{ij}\}_{i, j \in I}$ dependen de la cubierta elegida. Sin embargo, si cambiamos de cubierta, podemos tomar refinamientos y considerar límites. Por lo tanto, a cada haz lineal le podemos asociar una clase de equivalencia de funciones de transición.

Además, si L, L' son dos haces lineales, entonces podemos considerar una trivialización común para ambos y bajo la misma trivialización tenemos que si L es isomorfo a L' , entonces las funciones de transición $\{g_{ij}\}_{i, j \in I}$ y $\{g'_{ij}\}_{i, j \in I}$ son conjugadas (ver Lema 1.12).

Finalmente se observó que si contamos con una colección de funciones que satisfacen la condición de cociclos para una cubierta del espacio topológico, entonces es

posible construir un haz vectorial. Por lo que la clase de equivalencia de haces lineales está en biyección con la clases de equivalencia de funciones de transición. Con esto en mente, de ahora en adelante consideramos el caso en que X es una superficie de Riemann y estudiaremos su haces vectoriales de rango uno (haces lineales).

La idea principal de esta sección es probar que todo divisor definido sobre la superficie de Riemann X tiene asociado un haz lineal. Mas aún, si D, D' son los divisores asociados a L, L' respectivamente, entonces L es isomorfo a L' si y solo si D es linealmente equivalente a D' . Para ello primero enunciaremos un resultado sin demostración.⁴

Teorema 5.8. *Si L es un haz lineal definido sobre una superficie de Riemann compacta X , entonces L tiene una sección meromorfa no cero.*

Con este resultado podemos probar ahora la equivalencia entre haces lineales y divisores.

Teorema 5.9. *Dada una superficie de Riemann compacta X , existe una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia de isomorfismo de haces lineales sobre X y el conjunto de clases de equivalencia lineal de divisores definidos en X .*

Demostración. Sea $D = \sum n_i p_i$ un divisor definido sobre la superficie X . Entonces, para cada $p_i \in \text{Supp } D$ definimos una vecindad abierta y conexa $U_i \subseteq X$ de p_i y una función meromorfa $g_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\text{ord}_{p_i}(g_i) = n_i$ y $\text{ord}_q(g_i) = 0$ para todo $q \in U_i$ tal que $q \neq p_i$. Además agregamos el abierto $U_* := X \setminus \text{Supp } D$ y la función constante $g_* : U_* \rightarrow \mathbb{C}^*$, definida como $g_*(q) = 1$ para toda $q \in U_*$.

De esta manera, tenemos una cubierta $\mathcal{U} = \{U_i\} \cup \{U_*\}$ para X y una colección de funciones meromorfas $\{g_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^*\}_{i \in I}$. Mas aún, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces en ella tenemos definida la siguiente función meromorfa

$$g_{ij} = \frac{g_i}{g_j}.$$

Por otro lado tenemos $U_i \cap U_* \neq \emptyset$ para toda $i \in I$ por lo que tenemos

$$g_{i*} = \frac{g_i}{g_*} = g_i.$$

⁴Para la demostración es necesario profundizar un poco mas en temas como cohomología, característica de Euler y sucesiones exactas de haces lineales. Una demostración se puede encontrar en [Gu, Mi].

y

$$g_{*i} = \frac{g_*}{g_i} = \frac{1}{g_i}.$$

Las funciones $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$, $g_{i*} : U_i \cap U_* \rightarrow \mathbb{C}^*$ y $g_{*i} : U_* \cap U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ satisfacen las condiciones de cociclos. Por lo tanto, tomando $J := I \cup \{*\}$, el divisor D determina una clase de equivalencia de cociclos $[g_{ij}] := [\mathcal{U}, \{g_{ij}\}_{i,j \in J}]$ y esto a su vez define un haz lineal, el cual denotamos como L_D .

Ahora supongamos que $D' = \sum m_i p_i$ es otro divisor. Siguiendo el procedimiento anterior y un refinamiento para la trivialización si es necesario, podemos suponer que D' determina, bajo la misma cubierta, los cociclos $[h_{ij}] := [\mathcal{U}, \{h_{ij}\}_{i,j \in I}]$.

Además, supongamos que D y D' son linealmente equivalentes; es decir, existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $D - D' = (f)$. Así, si para cada abierto U_i denotamos $f_i := f|_{U_i}$, entonces se cumple que

$$\frac{g_i}{h_i} = f_i, \quad \forall i \in I,$$

equivalentemente $g_i = h_i \cdot f_i, \quad \forall i \in I$.

Por otro lado, si consideramos la intersección $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces en ella se cumple

$$g_{ij} = \frac{g_i}{g_j} = \frac{h_i \cdot f_i}{h_j \cdot f_j} = f_i \cdot h_{ij} \cdot (f_j)^{-1},$$

esto implica que $[g_{ij}] = [h_{ij}]$ y por lo tanto L_D es isomorfo a $L_{D'}$.

Ahora, por el Teorema 5.8, si L es un haz lineal entonces tiene una sección meromorfa s . Dicha sección determina un divisor (s) definido sobre X de la siguiente manera:

Como L es un haz lineal, entonces cuenta con una trivialización

$$\{U_i, \varphi_i, g_{ij}\}_{i \in I}.$$

Defina $s_i := s|_{U_i}$, $\forall i \in I$ las restricciones, de esta manera las secciones locales s_i definen (después de pasar por la trivialización) una función meromorfa. Es decir

$\varphi_i(s_i)(x) = (x, f_i)$ como funciones meromorfas

$$f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}.$$

las cuales satisfacen las siguientes igualdades

$$f_j := g_{ji} \cdot f_i. \tag{1}$$

Entonces para cada punto $p \in U_i \subseteq X$, definimos el orden de la sección $Ord_p(s) := Ord_p(f_i)$. Este orden no dependerá del abierto U_i por (1). Similarmente, no dependerá de la trivialización elegida, dado que la diferencia sería una conjugación (o producto escalar no cero). En consecuencia, toda sección s de un haz lineal L , definirá un divisor dado por

$$(s) := \sum_{p \in X} Ord_p(s) \cdot p.$$

Así, cada haz lineal determina un divisor y a continuación verificaremos que el divisor obtenido es único salvo equivalencia lineal. Para ello suponga que s, t son dos secciones meromorfas globales de L y sean $(s), (t)$ sus divisores respectivos. Vamos a probar que el divisor (s) es linealmente equivalente a (t) .

Tomemos nuevamente una trivialización de L $\{U_i, \varphi_i, g_{ij}\}_{i \in I}$. Supongamos además que la sección s determina funciones holomorfas $\{f_i\}_{i \in I}$ como antes y que la sección t determina funciones holomorfas $\{h_i\}_{i \in I}$. Entonces como en la ecuación (1) tendremos

$$g_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{h_i}{h_j},$$

en las intersecciones $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Por lo que podemos definir para cada $i \in I$ la función meromorfa

$$\alpha_i = \frac{f_i}{h_i}$$

y notemos que en la intersección $U_i \cap U_j$ se cumple

$$\alpha_j|_{U_{ij}} = \frac{f_j}{h_j} = \frac{g_{ji} \cdot f_i}{g_{ji} \cdot h_i} = \alpha_i|_{U_{ij}}$$

es decir que las funciones meromorfa $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ definen una función meromorfa $\alpha : X \rightarrow \mathbb{C}$. Ahora, dado que la definición de orden de un cero o polo de una función es una definición local, entonces podemos concluir que $(s) - (t) = (f)$ es decir, el divisor asociado a (s) es linealmente equivalente al divisor (t) . \square

Con la equivalencia que acabamos de probar, si $D \in \text{Div}(X)$ entonces su haz lineal asociado lo denotamos por L_D . Sabemos además que $\text{Pic}(X)$ es un grupo bajo la suma. Con esto tenemos que el conjunto de clases de isomorfismo de haces lineales sobre X también tiene una estructura de grupo bajo el producto tensorial, por lo que tenemos la siguiente tabla de equivalencias

Divisores	Haces lineales
$[\mathbf{0}]$	$[L_{\mathbf{0}}] = [\mathcal{O}]$
$[-D]$	$[L_{-D}] = [(L_D)^*]$
$[D_1] + [D_2]$	$[L_{D_1}] \otimes [L_{D_2}]$

Por lo tanto, el grupo de Picard de X también se considera como el grupo de clases de equivalencia de isomorfismo de haces lineales sobre X con la operación dada por el producto tensorial. De esta manera sabemos que $\mathbf{0} = D - D$ y en consecuencia $L_D \otimes (L_D)^* \cong \mathcal{O}$. Por lo que, dado un haz lineal L , su dual L^* es su inverso bajo producto tensorial.

Teniendo en cuenta también esta relación, definimos el **grado de un haz lineal** L_D como el grado de su divisor asociado, i.e., $\text{deg}(L_D) := \text{deg}(D)$.

Observación 5.10. *Entre los divisores tenemos la clase de equivalencia de divisores dados por uno-formas meromorfas ω , las cual llamamos clase del divisor canónico. Esta clase tiene asociado una clase de equivalencia de haces lineales $[L_{(\omega)}]$. A cualquier representante de la clase $[L_{(\omega)}]$ se le conoce como haz canónico y es denotado por K_X .*

Con la relación que existe entre divisores y haces vectoriales lineales, tenemos que el Teorema de Riemann-Roch para divisores, se puede reescribir en términos de haces lineales. Para ello, es necesario considerar la secciones de haces lineales $\Gamma(X, L_D)$. Usualmente el espacio de secciones holomorfas de un haz lineal se denota como $H^0(X, L_D)$. Esto debido a su relación con los grupos de cohomología de haces vectoriales. Para profundizar mas sobre estos temas, se recomienda [Gu] y [Mi].

Al igual que $\ell(D)$ denota la dimensión de $L(D)$ escribiremos como $h^0(X, L_D)$ a la dimensión del espacio vectorial $H^0(X, L_D) = \Gamma(X, L_D)$. De esta manera, el Teorema de Riemann-Roch tiene la siguiente forma.

Teorema 5.11 (Riemann-Roch). *Sea L un haz lineal sobre una superficie de Riemann X , entonces se cumple que*

$$h^0(X, L) - h^0(X, K \otimes L^*) = \text{deg } L + 1 - g.$$

Por los argumentos anteriormente descritos para el caso de divisores, podemos concluir que $h^0(X, \mathcal{O}) = 1$, $\deg K = 2g - 2$, y $h^0(X, K) = g$.

De esta manera, el Teorema de Riemann-Roch establece una relación entre el espacio de secciones de haces lineales con su grado y el género de la superficie de Riemann. Invitamos al lector interesado a revisar [Fa], [Fo],[Gri], [Gu], [Mi] para profundizar en estos temas.

REFERENCIAS

- [Fa] Farkas, H. M. & Kra, I. *Riemann surfaces*. Springer, New York, NY, 1992.
- [Fo] Forster, Otto. *Lectures on Riemann surfaces*. Graduated texts in mathematics. Springer, New York, NY, 1981.
- [Gri] Griffiths, P. A. *Introduction to Algebraic Curves*. Translations of Mathematical Monographs, 76. American mathematical society, (1989)
- [Gu] Gunning R.C, *Lectures on vector bundles over Riemann Surfaces*. Princeton University Press 1967.
- [Le] J. Le Potier, *Lectures on vector bundles*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 54, Cambridge University Press, 1997.
- [Mi] Miranda R. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Series: Graduate Studies in Mathematics, Vol 5. American Mathematical Society 1995.
- [Se] Seshadri, C. S., *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*. Asterisque, Soc. Math. France, 1982.
- [Te] Tennyson, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*. Asterisque, Soc. Math. France, 1982.

J. M. Márquez Bobadilla.

Departamento de Matemáticas
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Universidad de Guadalajara
Avenida Revolución 1500
Guadalajara, Jalisco, México.
email: juan.mbobadilla@academicos.udg.mx

O. Mata-Gutiérrez.

Departamento de Matemáticas
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Universidad de Guadalajara
Avenida Revolución 1500
Guadalajara, Jalisco, México.
email: osbaldo.mata@academicos.udg.mx

E. Reza-Gurrola.

Doctorado en Ciencias en Matemáticas
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Universidad de Guadalajara
Avenida Revolución 1500

Guadalajara, Jalisco, México.
email: eduardo.reza2901@alumnos.udg.mx

M.P. Suárez-Fernández.

Departamento de Matemáticas
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Universidad de Guadalajara
Avenida Revolución 1500
Guadalajara, Jalisco, México.
email: delapaz.suarez@academicos.udg.mx

OPTIMIZACIÓN CLÁSICA VS OPTIMIZACIÓN NO CLÁSICA

MIGUEL ÁNGEL ALATORRE ZAMORA, FERNANDO IGNACIO BECERRA LÓPEZ,
EMILIA FREGOSO BECERRA, EDGAR ALEJANDRO GUERRERO ARROYO,
JUAN ANTONIO LICEA SALAZAR, MAURICIO NAVA FLORES, ABEL PALAFOX GONZÁLEZ

RESUMEN. En este capítulo se revisarán primero conceptos básicos de teoría de optimización. Esta teoría sustenta una familia de métodos de optimización, a los que nos referimos como clásicos, que toman información del gradiente de la función a optimizar. Hablaremos del esquema general de éstos y mencionaremos tres métodos en particular. Por otro lado, existen problemas de optimización que no pueden ser abordados por los métodos de optimización convencionales. Por ejemplo debido a falta de diferenciabilidad o alta dimensión. En estos casos, se recurre a métodos de optimización no clásicos. Describiremos la motivación detrás de estos métodos y revisaremos dos de ellos en aplicaciones de estudio. Se discuten algunos pros y contras de los métodos no clásicos con respecto a los métodos clásicos.

ABSTRACT. In this chapter, key concepts about optimization theory are reviewed initially. Optimization theory provides the basis for a family of gradient-based optimization methods, referred to as classical optimization methods. The general scheme of the classical methods is presented, and three methods are particularly reviewed. On the other hand, in certain cases, traditional optimization methods are not applicable. This is due to a lack of differentiability or high dimensionality, for instance. In these cases, the usage of non-classical methods is recommended. The motivation behind non-classical methods is commented on, and two particular methods are reviewed in the context of case studies. Some pros and cons of non-classical methods are mentioned in contrast with classical methods.

2010 Mathematics Subject Classification. 49-00, 65K10, 68T20.

Palabras Claves. Optimización matemática, Metaheurísticas, Métodos de optimización.

1. INTRODUCCIÓN

En general, *optimizar* significa identificar las condiciones que hacen que una tarea se realice de la mejor manera posible. El significado del término *mejor* puede variar según el contexto o la interpretación de las cantidades que se estén observando. Por ejemplo, un velocista quiere minimizar el tiempo en el que llega a la meta, mientras que a un inversionista le interesa maximizar sus ganancias. La optimización tiene aplicaciones en economía, finanzas, mecánica, aprendizaje máquina y ciencia de datos, sólo por mencionar algunos [15, 20].

Parte de la labor que se hace en el área de Modelación Matemática, es considerar un fenómeno de interés (como el caso del velocista o el del inversionista), identificar los elementos que más influyen en la preguntas que se quieren resolver (minimizar tiempo, maximizar ganancias), traducirlos en variables, y establecer las relaciones y dependencias entre ellas en términos de expresiones matemáticas. Es decir, crear un *modelo* que explique el fenómeno de estudio.

De manera general, podemos pensar en los modelos como funciones, a menudo llamadas *funciones objetivo*, y los elementos de estudio como variables. Las relaciones entre las variables, se establecen en la definición de la función f . Entonces, encontrar el mejor valor significará buscar un valor para x que de el mejor resultado al ser evaluado en la función f , es decir, el valor de x que produzca el valor más grande (o pequeño) posible de $f(x)$.

En el área de Optimización Matemática, se ha desarrollado teoría en la cual se tienen condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una variable, digamos x^* , para ser considerado como el mejor resultado para f [20]. En aplicaciones prácticas, se utilizan métodos numéricos para encontrarlo.

En este capítulo consideramos dos tipos de métodos numéricos para para resolver problemas de optimización de acuerdo a la forma en que son diseñados:

1. Métodos clásicos: dependen del uso de las derivadas de la función objetivo. Existe una amplia variedad de problemas que se pueden abordar con métodos clásicos, como los problemas con restricciones dadas por ecuaciones diferenciales [11].
2. Métodos no clásicos: con frecuencia motivados por el problema de encontrar un óptimo global, un problema que particularmente es retador para los métodos clásicos. Ejemplos notables son el método de recocido simulado y optimización por enjambre de partículas, entre otros [3, 12].

Lo métodos clásicos aún son bastante utilizados y hasta antes de los 80's, cuando se comenzaron a popularizar métodos alternativos, eran prácticamente los únicos métodos disponibles. Sin embargo, la teoría que los fundamenta tienen limitaciones en asegurar condiciones para mínimos globales, o lidiar con múltiples mínimos locales de manera simultánea. Incluso, deben enfrentar problemas numéricos ocasionados por utilizar aproximaciones numéricas al gradiente de la función objetivo en algunos casos. Si bien esto representa problemas importantes, en la práctica se han ideado estrategias para compensarlos. El punto medular a partir del cual se volvió evidente la necesidad de explorar otros métodos, tiene que ver con el desarrollo científico y tecnológico.

El desarrollo tecnológico actual, trae consigo que el tipo de aplicaciones sean más complejas, de mayor dimensión, y que requieran reducir los tiempos en los que se generan respuestas. En muchas de estas aplicaciones, pueden existir múltiples soluciones a un problema. Esto se traduce en múltiples mínimos (o máximos) en la función objetivo. Por su diseño, los métodos de optimización clásicos son capaces de encontrar una sola solución al problema de optimización. Lo cual trae consigo la pregunta ¿cuál de todas las soluciones posibles es la mejor y cómo la podemos encontrar?

En estas notas revisaremos de forma general la teoría detrás de los métodos de optimización clásicos de la categoría de búsqueda por líneas. Mencionaremos tres métodos de optimización a manera de ejemplo, a fin de ilustrar su aplicación, las principales ventajas que ofrecen y las limitantes que se suelen presentar.

Por otro lado, mencionaremos algunos conceptos que pretenden guiar a los fundamentos teóricos de los métodos a los que nos referiremos como no clásicos y se mencionarán dos de ellos con la intención de contrastar el desempeño que pueden proporcionar también en el contexto de múltiples mínimos locales. Se mencionarán como caso de estudio, dos aplicaciones donde los métodos no clásicos pueden ser utilizadas con buenos resultados.

El enfoque clásico, tanto desde la formulación teórica como algoritmos tradicionales se revisan en la sección 2. Algunas nociones sobre aleatoriedad, así como de conceptos que motivan la formulación de los métodos de optimización no clásicos se revisan al inicio de la sección 3. Los métodos de optimización no clásicos se revisarán en las secciones 3.4 y 3.3. Las conclusiones y comentarios finales se presentan en la sección 4.

2. MÉTODOS CLÁSICOS

En esta sección consideramos el problema de encontrar un mínimo local de una función sin restricciones. Para esto, consideraremos problemas de la forma

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^N} f(x). \quad (1)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función a minimizar o función objetivo. Recuerde que la función f tiene un mínimo local en x^* si

$$\nabla f(x^*) = 0, \quad \nabla^2 f(x^*) > 0, \quad (2)$$

donde ∇ es el vector gradiente y ∇^2 es la matriz de segundas derivadas parciales o matriz Hessiana (mas detalles pueden consultarse como condiciones de optimalidad en [20]). El problema (1) puede no tener solución o ésta puede no ser única, como se aprecia en la figura 1. En esta figura se observa que hay al menos 4 puntos donde la derivada de la función es igual a cero y además la función en esos puntos es localmente convexa. La función objetivo toma valor más pequeño en uno de estos puntos, por lo que lo consideramos el mínimo global mientras que los tres restantes son mínimos locales.

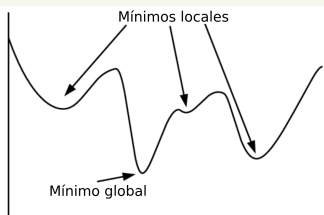


FIGURA 1. El punto x^* que resuelve el problema (1) no necesariamente es único.

En general, es difícil y/o imposible encontrar de manera analítica todos los puntos x^* dónde se satisfacen las condiciones de la ecuación (2). Para esto necesitaríamos conocer a la función objetivo en su totalidad. Es por esto que se utilizan los métodos numéricos para obtener aproximaciones a dichos puntos.

2.1. Esquema general de Métodos de búsqueda por líneas. Comenzamos la discusión sobre los métodos clásicos describiendo *métodos de búsqueda por líneas*. Estos

métodos consisten en elegir una dirección p^k en primer instancia, y luego buscar una nueva aproximación x^{k+1} a lo largo de la recta definida por la dirección p^k como

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k,$$

donde α_k es un escalar positivo llamado tamaño de paso y k indica la iteración actual del método. El éxito de un método de búsqueda por líneas dependerá de que tan efectivas sean la elección de la dirección de búsqueda p^k y el tamaño de paso α^k . La forma general de un método de búsqueda por líneas es como en el algoritmo 1.

Entrada: $f, \nabla f, x^0$

1 $k = 0$;

2 **mientras** *no se satisface el criterio de paro* **hacer**

3 | Construir p^k a partir de $x^k, f(x^k)$ y $\nabla f(x^k)$;

4 | Construir $\alpha^k > 0$ a partir de $x^k, f(x^k), \nabla f(x^k)$ y p^k ;

5 | $x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k$;

6 | $k = k + 1$;

7 **fin**

8 **devolver** $x^* = x^k$;

ALGORITMO 1: Esquema general de los métodos de búsqueda por líneas.

Es importante notar que el algoritmo 1 necesita que se proporcione un punto inicial x^0 . La elección de este punto inicial es relevante porque los métodos de búsqueda por líneas identificarán un mínimo local cercano a este punto inicial. Por otro lado, se observa que el proceso iterativo se realiza hasta convergencia, o bien hasta que se satisfaga el criterio de paro. Recordando la ecuación (2) una condición importante es $\nabla f(x^*) = 0$. Entonces, un criterio de paro aceptable será hasta que se tenga que $|\nabla f(x^k)| \leq \varepsilon$ para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño en el contexto de la aplicación.

2.1.1. Direcciones de búsqueda. Mencionamos anteriormente que los métodos de búsqueda por líneas eligen en primera instancia una dirección de descenso y luego ajustan el tamaño de paso. A continuación comentaremos algunas consideraciones para la elección o cálculo de la dirección de descenso.

Recordemos que la derivada de una función f en un punto x , se define como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Notemos que, siempre y cuando la función sea derivable, se tienen tres casos

- $f'(x) > 0$. Derivada positiva significa que la función es creciente pues $f(x+h) > f(x)$ para h suficientemente pequeña. Entonces si tomamos un punto x y le sumamos valores positivos, digamos $x+h$, nos estamos moviendo hacia los valores donde la función crece. Por el contrario, si sumamos valores negativos, nos iríamos entonces hacia donde la función decrece. Podemos tomar entonces $x + (-f'(x))$ y tenemos descenso.
- $f'(x) < 0$. Derivada negativa significa que la función es decreciente. En este caso, $f(x+h) < f(x)$, por lo cual es recomendable entonces movernos tomando x más valores positivos, para tener descenso. Así pues, eligiendo $x + (-f'(x))$, tenemos descenso pues $-f'(x) > 0$.
- $f'(x) = 0$. En este caso, se satisface el criterio de la ecuación (2), lo cual significa que nos encontramos en un punto crítico y por tanto no tenemos una dirección hacia donde podamos descender. Ya sea porque estamos en un mínimo, máximo o punto silla.

A partir de lo anterior, notamos que la dirección contraria a la derivada, es decir $x + (-f'(x))$ nos garantiza que nos moveremos teniendo descenso en la función. Este criterio se generaliza al caso multidimensional, tomando ahora $p = -\nabla f(x)$ como el vector de dirección de descenso.

2.1.2. Tamaño de paso. El tamaño de paso α^k es determinante en el desempeño del método. Tamaños de paso muy pequeños hacen que el método sea numéricamente más estable, sobre todo en zonas donde el gradiente es de gran magnitud, pero generan un avance muy lento en las iteraciones del método en zonas con gradientes pequeños. Por otro lado, tamaños de paso grandes propician un avance rápido del método, pero conducen a inestabilidad por cambios abruptos y pueden hacer que el método sea divergente.

El mejor tamaño de paso α^k puede ser determinado resolviendo el siguiente problema de optimización unidimensional

$$\alpha^k = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha p^k). \quad (3)$$

Resolviendo (3) de manera exacta, se obtiene el mayor beneficio de la dirección p_k , sin embargo, esto podría ser igual de costoso que resolver el problema de optimización original.

En términos generales, para que el método numérico avance en las iteraciones, debe bastar con elegir un tamaño de paso que nos asegure *descenso*. Nos referimos como descenso a que, dados los puntos x^k y x^{k+1} , sean tales que $f(x^{k+1}) < f(x^k)$.

Para elegir α^k dependiendo de la forma local de la función, se puede utilizar la *Condición de Armijo* o condición de suficiente descenso. Esto es: fijando x^k y p^k , elegir un α tal que satisfaga

$$f(x^k + \alpha p^k) < f(x^k) + c_1 \alpha \nabla f(x^k)^T p^k, \quad (4)$$

para alguna constante $c_1 \in (0, 1)$. En términos simples, esta consiste en pedir que $f(x^k + \alpha p^k)$ esté por debajo de la línea recta $f(x^k) + c_1 \alpha \nabla f(x^k)^T p^k$. La constante c_1 nos permite controlar qué tan estricto estableceremos la condición de suficiente descenso. En la práctica c_1 se elige con valores pequeños, digamos $c_1 = 10^{-4}$. El método Backtracking¹ es uno de tantos métodos para encontrar un α^k que satisfaga la ecuación (4) en pocas iteraciones. Este método se muestra en el algoritmo 2.

Entrada: $\bar{\alpha} > 0$, $\rho \in (0, 1)$, $c \in (0, 1)$

1 **mientras** $f(x^k + \alpha p^k) > f(x^k) + c \alpha \nabla f(x^k)^T p^k$ **hacer**

2 | $\alpha = \rho \alpha$

3 **fin**

4 **devolver** $\alpha^k = \alpha$;

ALGORITMO 2: Método Backtracking para encontrar un valor de tamaño de paso α^k que garantice suficiente descenso.

Notemos que el método de Backtracking agrega dos parámetros libres: ρ y c , además de un valor inicial $\bar{\alpha}$. En la práctica se recomiendan valores de $\rho \approx 0.5$, $c = c_1$ y $\bar{\alpha} = 1$. Es importante que el método de Backtracking realice sólo pocas iteraciones para no afectar el costo computacional del método de búsqueda por líneas. En ese sentido, el valor α^k resultante no tiene que ser muy preciso.

A continuación, revisaremos tres métodos de optimización clásicos y ampliamente utilizados.

2.2. Método de descenso por gradiente. Este método también aparece en la literatura como *descenso de paso fijo*, o *descenso más pronunciado*. Consiste en elegir como dirección de búsqueda a $p^k = -\nabla f(x^k)$. Esta elección es natural, pues sabemos que la función f decrece en dirección opuesta al gradiente por lo que comentamos en la sección 2.1.1. Para el tamaño de paso, se toma α^k constante en todas las iteraciones. En la práctica se recomienda tomar $\alpha^k \in [0.5, 1)$.

¹No confundir con el método Backtraking para hacer búsqueda en profundidad en grafos.

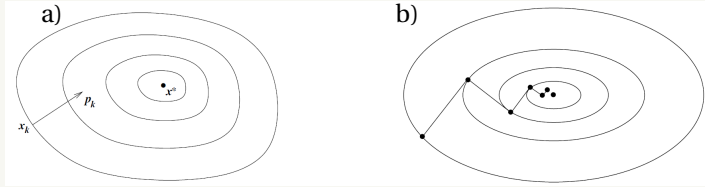


FIGURA 2. Panel a) la dirección de búsqueda $-\nabla f$ es ortogonal a las curvas de nivel de f . Panel b) algunas iteraciones del método.

En la figura 2 se ilustra el desempeño del método. El negativo del vector gradiente en el panel 2.a) es perpendicular a las curvas de nivel de la función objetivo. Este proporciona la dirección de mayor descenso local. En cada iteración se sigue la dirección de mayor descenso posible (panel 2.b)).

Una de las ventajas principales de este método es su simplicidad, pues se implementa siguiendo el algoritmo 1 sin agregar el método de Backtracking (algoritmo 2). En funciones sencillas, donde los cambios en el gradiente no son abruptos y que no se requiere mucha precisión, este método funciona bien.

No obstante, su principal desventaja, está justamente en la elección del tamaño de paso constante. Una mejora inmediata es generar tamaños de paso adaptativos a lo largo de las iteraciones. Se sacrifica simpleza del método a cambio de mejorar el desempeño.

2.3. Método de Newton para optimización. El método de Newton en Cálculo se utiliza para encontrar lugares donde una función toma el valor de 0. En el caso de optimización, debido a los criterios de optimalidad de la ecuación (2), nos interesa encontrar los lugares donde el gradiente toma el valor de cero. Entonces, en optimización, se utiliza el método de Newton del Cálculo, pero aplicado al gradiente de la función objetivo.

Partimos de que la matriz Hessiana se puede aproximar como

$$\nabla f(x^k + p) - \nabla f(x^k) = \nabla^2 f(x^k)p + O(\|p\|^2),$$

para $p \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequeño. Despejando $\nabla f(x_k + p)$ e igualando a cero tenemos

$$-\nabla f(x^k) = \nabla^2 f(x^k)p.$$

El término $O(\|p\|^2)$ se omite. De aquí se despeja p y nos da como resultado

$$p^{k,N} = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k), \quad (5)$$

donde $(\nabla^2 f(x^k))^{-1}$ es la inversa de la matriz Hessiano de f .

Notemos que en la ecuación (5) aparece $-\nabla f(x^k)$, que como mencionamos anteriormente es dirección de descenso. Si hacemos $\alpha^k = (\nabla^2 f(x^k))^{-1}$, podemos pensar entonces la dirección de Newton como un método de descenso por gradiente en el que el tamaño de paso es adaptable y se calcula considerando la convexidad local de la función objetivo. Para este método, el método de Backtraking ya no es necesario.

La dirección de Newton es confiable cuando la diferencia entre la función f y su aproximación cuadrática no es muy grande. Métodos que usan la dirección de Newton tienen convergencia local rápida, típicamente cuadrática. El principal inconveniente del método de Newton es que requiere calcular el Hessiano $\nabla^2 f$ y además invertirlo en cada iteración.

2.4. Método de Gauss-Newton. En problemas de mínimos cuadrados, la función objetivo f tiene la forma

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m r_j^2, \quad (6)$$

donde cada r_j es una función suave de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} . Los r_j son conocidos como residuales, y $r(x) = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_m(x))^T$ es el vector residual o simplemente residual. La función objetivo se puede expresar como $f(x) = \frac{1}{2} \|r(x)\|_2^2$ y el Jacobiano de $f(x)$ es la matriz de $m \times n$ dada por

$$J(x) = (\nabla r_1(x)^T, \nabla r_2(x)^T, \dots, \nabla r_m(x)^T)^T.$$

De esta manera, el gradiente y el Hessiano de f se pueden expresar en términos de $r(x)$ y $J(x)$ como

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= J^T(x)r(x), \\ \nabla^2 f(x) &= J^T(x)J(x)r(x) + \sum_{j=1}^m r_j(x)\nabla^2 r_j(x). \end{aligned}$$

Ahora, para resolver el problema de mínimos cuadrados correspondiente a la función objetivo de la ecuación (6), se puede explotar la estructura del Gradiente y Hessiano de la misma. La idea principal detrás del método de Gauss-Newton es que en lugar de calcular la dirección de búsqueda resolviendo las ecuaciones

$\nabla^2 f(x^k)p^{kN} = -\nabla f(x^k)$, se resuelve $J(x^k)^T J(x^k)p^{kGN} = -J(x^k)^T r^k$. Es decir, se usa la aproximación

$$\nabla^2 f(x^k) \approx J(x^k)^T J(x^k),$$

lo cual reduce el costo asociado a calcular los Hessianos $\nabla^2 r_j^k$. Con esta aproximación se tiene que si $J(x^k)$ tiene rango completo, y $\nabla f(x^k) \neq 0$, entonces p^{kGN} es una dirección de descenso adecuada.

3. MÉTODOS NO CLÁSICOS

Cuando nos encontramos con un problema de optimización que presenta características que nos dificultan o imposibilitan utilizar métodos clásicos, por ejemplo cuando el gradiente de la función a optimizar no está definido, es posible utilizar técnicas no deterministas para su solución.

En este caso, “no determinista” se refiere a que no podemos conocer con certeza el siguiente paso de un proceso. A este tipo de proceso se les llama *estocásticos* y usualmente el no determinismo viene guiado por el uso de variables aleatorias y sus correspondientes distribuciones de probabilidad.

También es común utilizar *heurísticas* para mejorar el proceso. Una heurística es una decisión basada en la experiencia o en el conocimiento a priori del problema. En este sentido, las heurísticas permiten incorporar información basada en la experiencia en el proceso de optimización. Esto es principalmente útil cuando no es fácil codificar el conocimiento a priori sobre las soluciones, en forma de expresiones matemáticas.

En esta sección, comentaremos algunas nociones relacionadas con procesos aleatorios y revisemos las implicaciones que tiene el uso de variables aleatorias y/o heurísticas para resolver un problema de optimización.

3.1. Aleatoriedad. El concepto de aleatoriedad ha sido muy estudiado a lo largo de la historia. Usualmente suele relacionarse con la idea de obtener resultados impredecibles o desconocidos en un proceso cualquiera. Esto resulta complejo de implementar en una computadora ya que su diseño es determinista.

Para generar aleatoriedad en la computadora se recurre a la *pseudoaleatoriedad*. Este concepto se refiere a generar un número mediante un proceso determinista, tal que es difícil predecirlo. Para esto, se toma un valor inicial (llamado semilla) y se genera uno nuevo a partir de un proceso que consiste en operaciones a nivel de bits. De esta forma, si se usa la misma semilla siempre se obtiene el mismo resultado del proceso. En la práctica, el número obtenido es usado como semilla para generar el siguiente

número y esto genera una cadena de números pseudoaleatorios. Para mayores detalles sobre generadores de números aleatorios y detalles de implementación, ver [16, 17, 18].

Ahora, dado que los números en la computadora se guardan en una cantidad finita de bits, solo se puede tener una cantidad finita de valores distintos. Esto provoca que, en algún punto, se regrese al valor inicial de la cadena y, por ende, los siguientes valores se repetirán también. Es decir, un proceso de este tipo, solo puede generar una cantidad finita de valores pseudoaleatorios (tamaño del ciclo). De cualquier forma, si la cadena es suficientemente larga los números que se generan satisfacen pruebas de aleatoriedad estándar.

El que los números generados muestren un comportamiento como el que se espera de una variable aleatoria es esencial. Por ejemplo, supongamos que solo vamos a generar números en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y queremos que emulen una variable aleatoria con distribución uniforme. Es decir, cada uno de los valores tiene la misma probabilidad de ser elegida, o en otras palabras, si tomamos elementos del conjunto utilizando un procedimiento pseudoaleatorio, la frecuencia de ocurrencia de cada número debe ser la misma (mas o menos la misma). En este caso, no sería problema que surjan dos valores repetidos consecutivos en la secuencia (al final, es aleatorio), pero si se observa que surgen demasiados repetidos, se puede sospechar que no se está respetando la uniformidad. Lo que se espera, es que al infinito surja esta distribución. Es decir, que al ir generando cada vez más valores se empiece a ver que hay aproximadamente 20% de ocurrencia de cada uno. Por cierto, es importante notar que valores repetidos no significa necesariamente repetir la semilla anterior, ya que los valores generados en realidad pertenecen a un conjunto más amplio y luego son redondeados o truncados (a nivel de bits) de acuerdo al procedimiento utilizado.

La distribución uniforme suele ser la base de la generación de otras distribuciones de probabilidad. Uno de los algoritmos más usado para generar números pseudoaleatorios distribuidos uniformemente, es el algoritmo Mersenne twister (llamado así porque se basa en los números primos de Mersenne) [18]. A partir de esto, se pueden generar números con otras distribuciones, como la distribución normal con el método de Box-Müller [9], o bien, utilizando el método de la Transformada Inversa que se estudia en los cursos de Probabilidad y Estadística.

En la práctica, resulta esencial elegir de forma correcta la distribución que se utilizará en los procesos estocásticos como se verá más adelante, pues dependiendo de la distribución que se utilice, es la información que puede ser recuperada del proceso.

3.2. Metaheurísticas. Consideramos que el problema de optimización que nos interesa consiste en encontrar el mínimo o máximo global de una función objetivo que puede depender de múltiples variables

$$\phi(m) = f(m_1, m_2, \dots, m_M).$$

Muchos problemas de optimización son difíciles de resolver a través de métodos clásicos debido a que la función objetivo, $\phi(m)$, podría presentar ciertas características como alta dimensionalidad, multimodalidad, interacción entre parámetros y/o no diferenciabilidad.

En estos casos, los algoritmos de aproximación alternativos, que se pueden agrupar en *heurísticas* y *metaheurísticas*, son un buen recurso [4]. Una descripción de ambas es la siguiente

- Heurísticas: Técnicas basadas en la experiencia para formular estrategias para la resolución de problemas. Son capaces de proporcionar soluciones satisfactorias en tiempo de cómputo razonable, aunque no garantizan la obtención de la solución óptima [22]. Las heurísticas suelen estar diseñadas específicamente para resolver un problema en particular y por ello son problema-dependientes.
- Metaheurísticas: Término acuñado por [8], empleando las raíces etimológicas meta (nivel superior) y heuriskein (descubrir). Son marcos algorítmicos de alto nivel, independientes del problema por resolver, que proporcionan guías o estrategias para el desarrollo de algoritmos de optimización heurísticos.

De acuerdo a [25], las metaheurísticas comparten las siguientes características:

1. Son parcialmente estocásticas.
2. Son métodos que no requieren de ningún tipo de información de $\phi(m)$.
3. Están inspiradas en analogías con procesos naturales².

Las metaheurísticas evalúan posibles soluciones y aplican diferentes operaciones sobre ellas para encontrar nuevas y potencialmente mejores soluciones. De acuerdo a [7], por la forma en que las soluciones son manipuladas, las metaheurísticas se pueden clasificar en los cuatro grupos que se ilustran en la figura 3. En este trabajo sólo se abordarán dos de las más comúnmente empleadas: *Recocido simulado (SA)* y *optimización por enjambre de partículas (PSO)*, por sus respectivas siglas en inglés.

En la tabla 1 se muestra un análisis comparativo general entre los métodos de optimización clásicos y los métodos basados en metaheurísticas. Se indican en negritas el que consideramos ofrece mayor beneficio en cada aspecto.

²Por esto, a menudo se denominan metáforas [7]

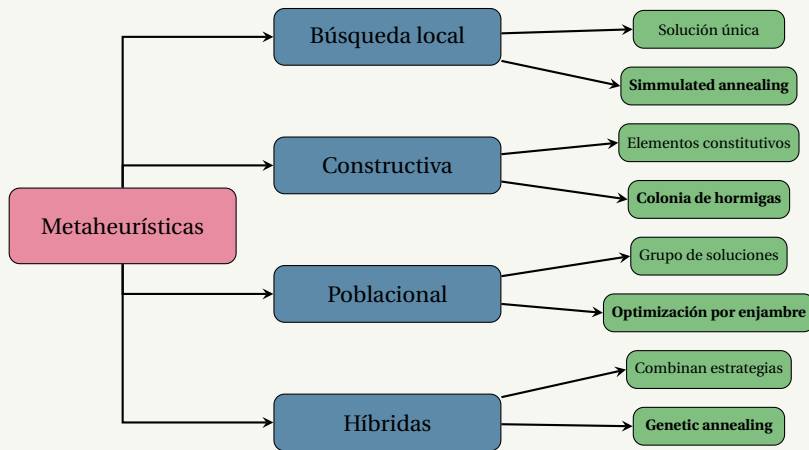


FIGURA 3. Las metaheurísticas se clasifican en 4 grupos generales. Ejemplos de cada uno aparecen en negrita.

La mayoría de las metaheurísticas más conocidas se originaron en la década de los 80's, aunque hay algunas que se crearon antes (ej. Algoritmos genéticos; 70's), sin embargo es una área de investigación y desarrollo importante, cuyas aplicaciones y popularidad se han incrementado desde entonces.

En [13] describen un análisis exhaustivo de publicaciones relacionadas con las metaheurísticas en el período comprendido entre 1983 a 2016. Este análisis se resume en la figura 4. En el panel 4.b) Se aprecia un crecimiento importante que inicia en 2005 y alcanza su máximo en 2015. En cuanto a la intensidad de publicación, panel 4.a), se reportaron un total de 1222 publicaciones en diferentes áreas desde Problemas numéricos y minería de datos; pasando por Medicina, Biología y Agricultura; hasta aplicaciones militares y música, por mencionar algunos. En ese mismo estudio, se reporta el PSO como el método heurístico con mayor número de publicaciones.

En la tabla 2 se listan los temas que identificamos se encuentran activos como áreas de investigación. Se colocan en dos columnas atendiendo al diseño y aspectos teóricos de los métodos, o bien, atendiendo a su desempeño computacional.

3.3. Particle Swarm Optimization. En esta sección hablaremos del método PSO. Esta metaheurística está inspirada en el comportamiento social de individuos que

Criterio	Optimización clásica	Metaheurísticas
Sustento teórico	Bien establecido	En desarrollo
Eficiencia al buscar en el espacio de soluciones	Restringido a búsqueda local	Puede explorar con más amplitud el espacio
Flexibilidad a cambios o adecuaciones	Por lo general se sigue el mismo esquema y los ajustes deben incluirse como expresiones matemáticas	Altamente flexible pues los ajustes se pueden incluir de forma más natural
Robustez al combinarse con otros métodos	Se debe asegurar que la teoría existente sigue siendo válida	Es simple, incluso las categorías de metaheurísticas ya lo considera
Costo computacional	Existen métodos eficientes para aproximar derivadas y resolver sistemas lineales	Por lo general es alto
Uso de cómputo en paralelo	Restringido a una sola iteración	Altamente paralelizable
Dependencia en hiperparámetros	Poca, pues los hiperparámetros se pueden ajustar a partir de la teoría	Muy alta. La elección de estos es determinante en el éxito del método

TABLA 1. Comparación cualitativa entre métodos de optimización clásicos y métodos heurísticos

viven en grupos y cooperan entre ellos para la búsqueda de recursos, como las queleas de pico rojo y las sardinas. El PSO emula un proceso de aprendizaje basado en la experiencia individual y de grupo.

Los conceptos básicos del PSO se toman de la *Inteligencia de Enjambre (SI)* por sus siglas en inglés, que es una metáfora computacional para resolver problemas de forma distribuida, basada en el comportamiento colectivo de sistemas descentralizados y auto-organizados, inspirada en ejemplos biológicos dados por especies sociales en la naturaleza [21].

En la SI, el comportamiento colectivo emerge de interacciones simples entre individuos y el ambiente, así como entre ellos, a pesar de no existir normalmente una estructura de control centralizada guiando su comportamiento individual. Las tareas

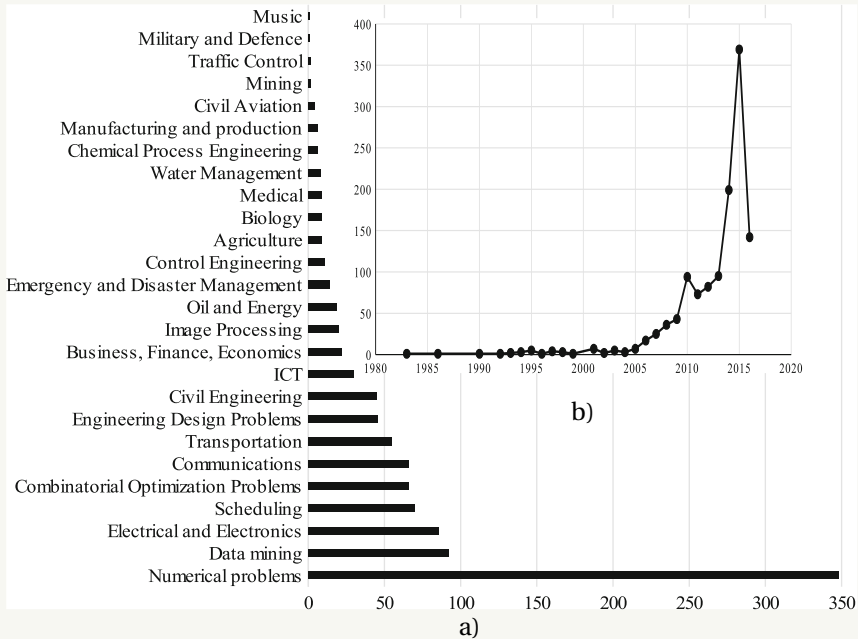


FIGURA 4. Dominios de aplicación de las metaheurísticas y número de publicaciones de 1986 a 2016. Modificada de [13].

son realizadas por un gran número de entidades independientes (individuos), cada una con reglas relativamente simples y capacidades limitadas. Entre las principales aplicaciones de los principios de la SI se encuentran el desarrollo de algoritmos de optimización, robótica y animación por computadora.

El PSO recurre a la metáfora de un grupo de individuos buscando un sitio óptimo (de resguardo, alimentación, etc.), considerando la analogía: $\phi(x)$ es la función de ambiente (objetivo) y $x \in \mathbb{R}^M$ es la posición M -dimensional de una partícula o individuo. El enjambre se compone por un conjunto de individuos $\{x_i\}_{i=1}^n$ indexados por i , cada uno con un par de propiedades asociadas que rigen su movimiento en dicha búsqueda: posición y velocidad.

Formulación/Diseño	Desempeño
Desarrollo de fundamentos teóricos	Análisis de convergencia y factores que alteran el balance entre exploración y explotación
Relaciones entre los parámetros controladores de los métodos (hiperparámetros)	Desempeño en funciones de prueba (benchmark test functions) y su relación con problemas reales
Exploración inteligente y representaciones sustitutas	Rendimiento y análisis estadístico de resultados
Combinación entre métodos clásicos y metaheurísticas (métodos híbridos o meméticos)	Escalabilidad a altas dimensiones (numero de variables > 1000)

TABLA 2. Aspectos que se investigan en la actualidad para mejorar los métodos basados en metaheurísticas

Durante la búsqueda, cada individuo se desplaza hacia una nueva ubicación en el espacio de búsqueda considerando tres componentes: *inercial*, *cognitivo* y *social*.

3.3.1. *PSO canónico*. En el algoritmo PSO canónico [24], cada individuo i , en el instante (iteración) k , con posición x_i^k y velocidad v_i^k , tiene memoria de su mejor ubicación ocupada al momento l_i^k y conoce la mejor ubicación ocupada por todos los individuos del enjambre g^k . La actualización de la posición y velocidad de cada individuo se dará entonces de acuerdo al siguiente esquema:

$$\begin{aligned} v_i^{k+1} &= \omega v_i^k + \alpha r_1 (l_i^k - x_i^k) + \beta r_2 (g^k - x_i^k), \\ x_i^{k+1} &= x_i^k + v_i^{k+1}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\omega, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, son conocidos como factores de inercia, aceleración local y global, respectivamente, mientras que r_1 y r_2 son variables aleatorias uniformes, $r_1, r_2 \sim U[0, 1]$.

El desplazamiento de cada partícula se puede ver como una suma vectorial pesada entre las componentes inercial $\overrightarrow{C_{in}}$, cognitiva $\overrightarrow{C_{cg}}$, y social $\overrightarrow{C_{sc}}$, en el que los puntos óptimos actúan como atractores. Para fines ilustrativos, ver figura 5. Se observa que

los componentes \vec{C}_{in} , cognitiva \vec{C}_{cg} y \vec{C}_{sc} son proyecciones a lo largo de los vectores v_i^k , l_i^k y g^k respectivamente.

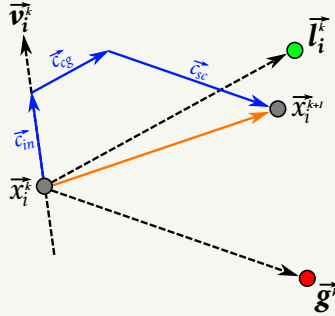


FIGURA 5. Movimiento de cada partícula del enjambre. La velocidad actualizada depende de la velocidad actual y de los atractores local y global (verde y rojo respectivamente).

El algoritmo del PSO, basado en el algoritmo canónico que aparece en [23], se muestra en el algoritmo 3. Los parámetros ω , α y β , a los cuales nos referimos como hiperparámetros, influyen directamente en el balance entre *exploración* y *explotación*, por lo tanto, su elección no es trivial. Algunos valores que aparecen en la literatura son

$$\begin{aligned} \omega = 0.72984; \alpha = \beta = 1.496172, & \quad \text{según [2],} \\ \omega = 0.72984; \alpha = 2.04355; \beta = 0.94879, & \quad \text{según [1],} \\ \omega = 0.6; \alpha = \beta = 1.7, & \quad \text{según [26].} \end{aligned}$$

La adecuada elección de los hiperparámetros es tema de investigación actual. En el ejemplo de la sección 3.3.2 se tomarán con base en los resultados de algunos estudios de convergencia, basados en análisis de sistemas dinámicos y análisis estocásticos, presentados en [2, 26]. Este estudio se describe a continuación.

Los parámetros ω , α y β se pueden reducir a ω y ϕ , con $\phi = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Por otro lado, existe un punto atractor $p = \frac{\alpha l + \beta g}{\alpha + \beta}$, alrededor del cual, el enjambre tiende a moverse durante la exploración.

Las partículas del enjambre convergen, siempre que los parámetros elegidos estén dentro de una región en el plano (ω, ϕ) denominada *región de convergencia*, definida por el triángulo

$$|\omega| < 1, 0 < \phi < 2(\omega + 1).$$

Entrada: Función objetivo: $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$

- 1 Inicializar posiciones: x_1^0, \dots, x_n^0 y velocidades: v_1^0, \dots, v_n^0 del enjambre;
- 2 Inicializar óptimos locales: $l_1^0, \dots, l_n^0 = x_1^0, \dots, x_n^0$;
- 3 Inicializar óptimo global: $g^0 = \operatorname{argmin}_{(l_1^0, \dots, l_n^0)} \phi$;
- 4 $k = 0$;
- 5 **mientras** no se satisface el criterio de paro **hacer**
- 6 **para todo** $i = 1$ **hasta** n **hacer**
- 7 $v_i^{k+1} = \omega v_i^k + \alpha r_1 (l_i^k - x_i^k) + \beta r_2 (g^k - x_i^k)$;
- 8 $x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1}$; **si** $\phi(x_i^{k+1}) \leq \phi(l_i^k)$ **entonces**
- 9 $l_i^{k+1} = x_i^{k+1}$;
- 10 **fin**
- 11 **si** $\phi(x_i^{k+1}) \leq \phi(g^k)$ **entonces**
- 12 $g^{k+1} = x_i^{k+1}$;
- 13 **fin**
- 14 **fin**
- 15 $k = k + 1$;
- 16 **fin**
- 17 **devolver** Óptimo global: g^k

ALGORITMO 3: Algoritmo PSO canónico

Esta región a su vez, está compuesta por 5 zonas según [5]. Ver figura 6.

La zona 1, que causa trayectorias con oscilaciones armónicas alrededor del atractor p , está delimitada por la frontera parabólica

$$(\phi - \omega - 1)^2 = 4\omega, \text{ donde } 0 \leq \omega < 1.$$

La zona 3, que genera trayectorias zigzagueantes asimétricas alrededor de p , es la superficie triangular dada por:

$$-1 < \omega < 0 \text{ y } 0 < \phi < 2(\omega + 1),$$

y las zonas 2 y 4 son aquellas excluidas de las zonas 1 y 3. La zona 2 produce trayectorias zigzagueantes simétricas, mientras que la zona 4, produce trayectorias no oscilantes. Por otro lado, la zona 5 que corresponde a la región delimitada por la línea punteada

en la figura 6, se infiere como una segunda región de estabilidad, definida por

$$|\omega| < 1, 0 < \phi < \frac{12(1-\omega^2)}{7-5\omega}.$$

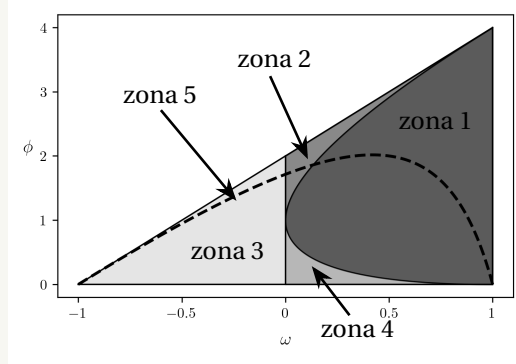


FIGURA 6. Zonas de la región de convergencia del PSO. Modificada de [5].

Por lo tanto, para lograr resultados satisfactorios, de acuerdo a experimentos numéricos reportados en la literatura [6], se debe procurar que ω y ϕ se encuentren en la cerca de la frontera de la zona 5. En [14] se analiza esto con más detalle utilizando las funciones benchmark Rosenbrock y Griewank.

3.3.2. PSO en la inversión de datos geofísicos. La exploración geofísica es la aplicación de las técnicas y métodos geofísicos (mediciones de algún campo físico terrestre y su interpretación) en la caracterización del subsuelo. Los objetivos de la exploración geofísica suelen estar asociados a la explotación económica de recursos naturales y a la solución de problemas de ingeniería (impacto social y económico).

Una herramienta muy importante en la exploración geofísica, es la *inversión de datos geofísicos*, que de acuerdo a [19], se define como el conjunto de métodos matemáticos utilizados para analizar datos, con el objeto de extraer información útil acerca del mundo físico, a partir de ellos.

La inversión de datos geofísicos implica la optimización de una función objetivo multidimensional

$$\phi(m) = \|d - G(m)\|^2 + \alpha \varphi_s(m), \quad (8)$$

donde $m = (m_1, m_2, \dots, m_M)$ representan parámetros que definen algún modelo geofísico G , $\|d - G(m)\|^2$ representa el error de ajuste entre ese modelo y los datos observados d , y $\alpha\varphi_s(m)$ es un término de regularización, como Tikhonov o variación total, que se utiliza para reducir problemas de no unicidad y estabilidad numérica.

Optimizar la ecuación (8), significa encontrar los valores de parámetros m del modelo G , que mejor se aproximan a los datos d . A esto nos referimos con invertir datos geofísicos. El problema de optimización a resolver es

$$\underset{m}{\operatorname{arg\,min}} \phi(m).$$

Cabe señalar que al utilizar el PSO, no hay restricciones en cuanto a la norma particular en que se modela el error de ajuste ni del esquema de regularización utilizado, basta con tener una métrica para comparar $\phi(m)$ para distintos valores de m .

Como ejemplo de aplicación, se pueden considerar tres objetos (denominados cuerpos en el área de Geofísica) que están sepultados en un dominio homogéneo (es decir, con propiedades físicas constantes) acotado. En específico se trata de dos cilindros y una esfera. Debido a que los tres cuerpos tienen densidad distinta a la del medio (densidad del medio: $\rho = 2,200.0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$), se genera una perturbación local en la aceleración gravitacional conocida como *anomalía gravimétrica*. En la 7.a) se muestra la anomalía gravimétrica correspondiente en la línea de color negro.

Los tres cuerpos están sepultados totalmente bajo el perfil de observaciones y sus ejes/centro no exceden los 80 m de profundidad. Los picos positivos de la curva en negro de la figura 7.a) corresponden a los sitios donde se ubican dos de los cuerpos, mientras que el primer pico, que es negativo, corresponde a un cilindro hueco.

Las anomalías gravimétricas ocasionadas tanto por una esfera como por un cilindro, tienen expresiones analíticas

- Esfera

$$\Delta g_z = \frac{4\pi\gamma \Delta\rho z_c R^3}{3[(x - x_c)^2 + z_c^2]^{\frac{3}{2}}},$$

- Cilindro

$$\Delta g_z = \frac{2\pi\gamma \Delta\rho z_c R^2}{(x - x_c)^2 + z_c^2},$$

donde:

Δg_z :Anomalía gravimétrica de la esfera/cilindro.

γ :Constante de gravitación universal.

$\Delta\rho$:Contraste de densidad de la esfera/cilindro con respecto al medio.

R :Radio de la esfera/cilindro.

z_c :Profundidad del centro/eje de la esfera/cilindro.

x_c :Coordenada del centro/eje de la esfera/cilindro.

x :Coordenadas de puntos de observación sobre el perfil de adquisición.

Para resolver este problema, hay que considerar que la anomalía observada en cada punto, es la suma de las anomalías causadas por cada uno de los cuerpos fuente. Esto nos da la anomalía total Δg_z como

$$\Delta g_z = \sum_{j=1}^3 \Delta g_{z_j} (\Delta\rho_j, R_j, z_{c_j}, x_{c_j})$$

donde j indica el número de fuente y m es un vector que contiene los parámetros por calcular

$$m = [\Delta\rho_1, R_1, z_{c_1}, x_{c_1}, \Delta\rho_2, R_2, z_{c_2}, x_{c_2}, \Delta\rho_3, R_3, z_{c_3}, x_{c_3}].$$

Ahora, la forma de la función objetivo está dada por el error cuadrático medio entre los datos observados y calculados

$$\phi(m) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [d_i - \Delta g_z(m)(x_i)]^2},$$

donde d_i es la anomalía observada en el punto x_i , $i = 1, \dots, N$.

Al aplicar el método PSO con un enjambre de 20 partículas, con los parámetros: $\omega = 0.72984$, $\alpha = 2.04355$ y $\beta = 0.94879$, que corresponden con el punto (0.72984, 1.49617) en el plano (ω, ϕ) , que se encuentra en la zona 1 y sobre la frontera de la zona 5 (ver figura 6), se obtiene el modelo con los parámetros mostrados en la tabla 3.

El error mínimo alcanzado (error RMS) para el modelo invertido, correspondiente al óptimo global estimado por el enjambre en la iteración 250 es de $1.371 \times 10^{-2} \text{ mGal}$. En la figura 7.a) se muestra un gráfico con la anomalía observada, anomalía del modelo óptimo para la iteración inicial, anomalía del modelo óptimo para la iteración 250 (anomalía invertida) y residuales o diferencias entre anomalía observada e invertida.

Finalmente, en la figura 7.b) se muestra la curva de convergencia observada durante las iteraciones del método.

Cuerpo	Parámetros calculados			
	$\Delta\rho$ [kg/m^3]	R [m]	z_c [m]	x_c [m]
Cilindro 1	-2,200.0	10.06	11.702	180.159
Cilindro 2	678.679	20.884	24.220	374.60
Esfera	829.238	53.60	60.738	750.596

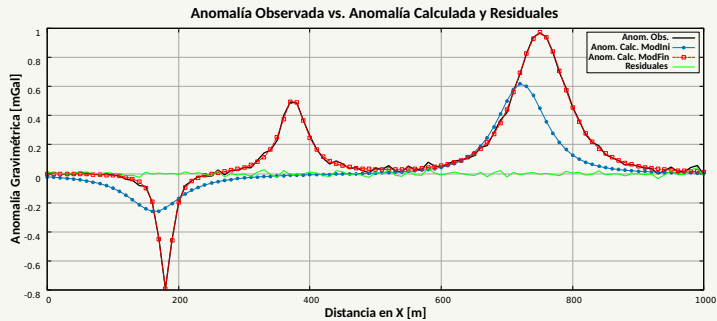
TABLA 3. Resultados del método PSO para el caso de estudio de inversión de datos gravimétricos.

3.4. Simulated Annealing. Ahora ilustraremos el uso de procesos estocásticos mediante un algoritmo clásico que utiliza el concepto de aleatoriedad para obtener soluciones a problemas de optimización combinatoria. Además, para mostrar los efectos de los parámetros y del algoritmo en sí mismo, se aplicará en un problema clásico llamado el *problema del agente viajero (TSP)* por sus siglas en inglés.

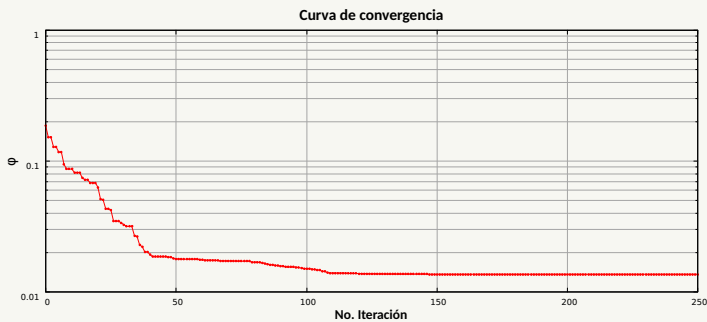
3.4.1. Problema del agente viajero. El problema del agente viajero TSP, se centra en encontrar la ruta más corta que permite visitar todas las ciudades de una lista exactamente una vez, regresando al punto de inicio. Es un problema complejo en el campo de la optimización combinatoria, con aplicaciones cruciales en investigación operativa y ciencias de la computación.

La optimización combinatoria tiene que ver con problemas donde los elementos que aparecen son discretos. Estos problemas tienen una cantidad finita (generalmente muy grande) de soluciones. Se presentan en situaciones donde los elementos están dados y la solución corresponde a encontrar combinaciones o maneras de colocar estos elementos para tener el mejor resultado posible. Como un rompecabezas por ejemplo. Es importante hacer notar que, aunque el TSP es originalmente un problema que trata sobre ciudades y distancias, puede relacionarse con otros problemas análogos, de grafos, matrices, etc.

Dada una lista de n ciudades y suponiendo que todas están comunicadas entre sí, habría $n!$ rutas posibles. Para valores de n grandes, resulta inviable revisarlas todas. El algoritmo más eficiente en la actualidad para resolver de forma óptima el problema es el algoritmo Held–Karp [10], que encuentra el óptimo global con un tiempo de ejecución del orden de $O(n^2 2^n)$ que, aunque es menor a $n!$, sigue siendo imposible de implementar para valores altos de n . Tan solo para $n = 100$, $n!$ es del orden de 1×10^{158} mientras que el algoritmo de Held–Karp es del orden de 1×10^{33} .



a) Anomalia gravimétrica observada (negro), anomalía invertida (rojo) y residuales (verde)



b) Convergencia del método PSO

FIGURA 7. Resultados del PSO para una anomalía gravimétrica debida a dos cilindros y una esfera sepultados a menos de 80 m de la superficie.

Debido a lo anterior, se utilizan metaheurísticas para buscar subóptimos. Es decir, soluciones que no necesariamente son el óptimo global, pero que sí se pueden tener en un tiempo razonable. Las estrategias de las metaheurísticas están diseñadas para hacer una búsqueda de subóptimos basada en algún criterio de experiencia o basado en probabilidades. Es decir, en lugar de revisar todas las posibles soluciones, selecciona solo algunas que se espera sean buenas soluciones. Uno de ellos es el algoritmo del que hablaremos a continuación.

3.4.2. *Algoritmo de templado simulado.* El algoritmo de templado simulado o *Simulated Annealing (SA)* es un algoritmo de optimización combinatoria que tiene sus bases en termodinámica.

La dureza de algunos materiales como el acero o vidrio templado, radica en el acomodo de los átomos que los componen. Estructuras moleculares ordenadas dan más dureza que estructuras desordenadas. En la fabricación de acero o vidrio, el material se calienta hasta fundirse. Al estar fundido, los átomos que lo componen pueden moverse con mucha libertad para buscar una buena posición. Posteriormente, el material se enfría para que las moléculas se queden fijas. Como resultado, el material templado es más duro y tiene mejores propiedades físicas que el material original.

El SA simula el proceso de templado. En primer instancia, permite que las variables de la función objetivo tomen distintos valores, o bien que el sistema pueda alcanzar distintas configuraciones. Posteriormente, utiliza un parámetro adicional para “controlar la temperatura”. Es decir, vuelve más restrictivo el cambio entre estados.

Para su funcionamiento el SA no requiere que la función optimizar tenga alguna propiedad en particular (continuidad, diferenciación, etc). La clave es revisar vecinos del punto actual, es decir, el cambio de las variables a un estado similar al estado actual, y utilizar una distribución de probabilidad para determinar si el sistema debe cambiar al estado vecino o no. Ésta técnica es un proceso sin memoria, por lo que no se obliga a mantener un registro de los estados por los que se ha pasado durante el proceso. A continuación se definen algunos conceptos básicos.

Consideremos ahora la función objetivo $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, donde Ω es un dominio dado. Es común que en el contexto de SA a esta función se le llame función de energía y que Ω sea un conjunto discreto. Sea $x^0 \in \Omega$ un punto inicial y $q : \Omega \rightarrow \Omega$ una función de transición, tal que

$$\tilde{x}^{k+1} = q(x^k),$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, K$. La función T construye el punto o estado candidato \tilde{x}^{k+1} , para el siguiente instante de tiempo $k + 1$, a partir del estado x^k en el instante k . Para fines de estabilidad numérica se recomienda que q realice un cambio aleatorio mínimo, en el punto x^k , basado en alguna distribución de probabilidad.

El punto candidato \tilde{x}^{k+1} se acepta o rechaza de acuerdo a qué tan probable es que ocurra. Para esto se define la probabilidad de aceptación

$$\alpha = P(X^{k+1} = \tilde{x}^{k+1} | X^k = x^k) = \min \left\{ 1, e^{-\frac{\phi(\tilde{x}^{k+1}) - \phi(x^k)}{T}} \right\}, \quad (9)$$

donde T es un parámetro que controla la temperatura y se define a priori. Entonces, el siguiente punto en el algoritmo se obtiene como:

$$x^{k+1} = \begin{cases} \tilde{x}^{k+1} & \text{con probabilidad } \alpha, \\ x^k & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (10)$$

El criterio definido por las ecuaciones (9)-(10) aparecen en la literatura como *criterio de aceptación de Metrópolis*. La distribución de probabilidad como aparece en la ecuación (9) se conoce como distribución de Boltzmann o de Gibbs.

Un análisis de la función de Boltzmann de la ecuación (9) nos muestra que, si $\phi(x^{k+1}) - \phi(x^k)$ es negativa, la función nos entregará un valor mayor que 1 por lo que la probabilidad de aceptación es 1 en la ecuación (10). Es decir, si el nuevo valor es menor que el anterior se acepta siempre. Por el contrario, si la diferencia es positiva, entonces α tendrá un valor entre 0 y 1, que representa la probabilidad de lo tomemos como el siguiente en la cadena de valores o no. Por ejemplo, mientras más grande sea el valor de la diferencia menor es la probabilidad de aceptación.

En resumen, ya que buscamos un mínimo global, si el nuevo valor reduce la función objetivo lo aceptamos, y si es mayor puede que se acepte o no. Esta característica particular del SA, permite que, a diferencia de los métodos clásicos, durante el proceso se permita no tener descenso en la función objetivo. Entonces, permite tener una exploración más amplia del espacio de soluciones a largo plazo y tener posibilidad de encontrar el mínimo global, en lugar de dirigirse solo al mínimo local más cercano.

Ahora centrémonos en el parámetro de temperatura T . Para fines de interpretación, la sección correspondiente al dominio positivo de la distribución de probabilidad de la ecuación (9), se puede pensar como la parte del dominio positivo de una distribución Gaussiana con desviación estándar T . Es decir, la interpretación del valor T puede ser en el mismo sentido: valores altos de temperatura permiten mayor variabilidad en los cambios entre estados, mientras que valores pequeños son más restrictivos. Esto se muestra en la figura 8, la curva azul se realizó con una temperatura de 30, la verde con 20 y la roja con un valor de temperatura de 10. Cuando la temperatura es alta, la cola de la distribución se vuelve pesada y se permite más variabilidad, se dice que estamos *explorando*. Por el contrario cuando la temperatura es baja, se restringe la variabilidad y estamos *definiendo*. De hecho, cuando la temperatura tiende a cero, el modelo termina comportándose de forma similar a un método clásico, aceptando sólo los valores que mejoran el resultado.

En la práctica se toma la temperatura como una función $\psi(k, T^0)$ que depende de las iteraciones k y de una temperatura inicial T^0 . La función ψ debe ser no negativa y

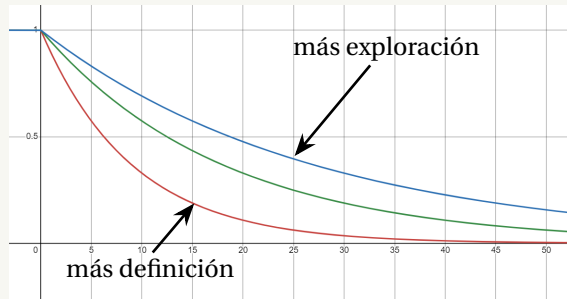


FIGURA 8. Función de Boltzmann para distintos valores de temperatura. La temperatura controla la exploración o definición de las soluciones.

decreciente. Además, se busca que tenga concavidad positiva para que la exploración se tome al inicio del proceso pero ceda eventualmente su lugar a la etapa de definición. Algunas función comunes de temperatura utilizadas son:

$$\psi_1(k, T^0) = \frac{T^0}{k+1},$$

$$\psi_2(k, T^0) = \frac{T^0}{\ln k + 1},$$

$$\psi_3(k, T^0) = c^k T^0, \text{ con } c \in (0, 1) \text{ constante.}$$

Notemos por ejemplo que ψ_2 baja la temperatura de forma más lenta que ψ_1 . Para ψ_3 valores comunes de c con 0.85 y 0.9.

3.4.3. *Aplicación del SA para la resolución del TSP.* Planteemos el problema TSP como sigue. Dada una lista $C = [x_1, \dots, x_n]$ de ciudades y la distancia d entre ellas, queremos encontrar una permutación de C tal que se minimice

$$E(C) = \sum_{i=1}^{n-1} d(C[i], C[i+1]) + d(C[n], C[1])$$

donde $E(C)$ representa la distancia total o energía de la permutación (configuración) C , y d es una función de distancia entre dos ciudades (euclídeana por ejemplo).

Para implementar el algoritmo SA, primero debemos definir cómo se generará la cadena de variables aleatorias que nos entregará los valores a revisar. Dada una

configuración C^k dada, definimos la función de transición q , de C^k a \tilde{C}^{k+1} como el resultado de tomar aleatoriamente dos elementos de C^k e intercambiarlos. Esto define una geometría para el espacio de configuraciones en el que pensamos que un elemento obtenido así es cercano al que lo produjo.

Dicho esto, tomamos una configuración inicial C^0 , y una función de temperatura $\psi(k, T)$. Se plantea el algoritmo SA para TSP como se muestra en el algoritmo 4. Noté que se incluye un ciclo interno en la línea 4 del algoritmo 4, para retrasar la actualización del valor de temperatura. Esto es, se realizan M iteraciones del método antes de avanzar a la siguiente iteración $k = k + 1$.

```

Entrada:  $C^0, T^0, M$ 
1  $k = 0$ 
2 mientras  $\psi(k, T)$  no ha llegado a su valor final hacer
3    $i = 0;$ 
4   repetir
5      $\tilde{C}^{k+1} = q(C^k);$ 
6     Evaluar  $r = e^{-\frac{E(\tilde{C}^{k+1}) - E(C^k)}{\psi_2(k, T^0)}}$ ;
7      $p \leftarrow U(0, 1);$ 
8     si  $p < q$  entonces
9        $C^{k+1} = \tilde{C}^{k+1};$ 
10    sinó
11       $C^{k+1} = C^k;$ 
12    fin
13     $i = i + 1;$ 
14  hasta que  $i = M;$ 
15   $k = k + 1;$ 
16 fin

```

ALGORITMO 4: Algoritmo SA para el TSP.

Es importante hacer notar que existen varios elementos que se deben definir en el algoritmo: T^0, ψ, q, M . Además se debe fijar un valor final para la temperatura o bien una cantidad de iteraciones como criterio de paro. Al proceso de probar diferentes configuraciones de estos elementos y elegir los que ofrecen un mejor desempeño, se le llama ajuste de parámetros y es esencial para el buen funcionamiento de los métodos

numéricos en general. Estos valores no son universales y se eligen para el problema dado.

Como caso de estudio del TSP, tomemos como ejemplo las distancias en kilómetros entre 54 ciudades de Dinamarca (todas las mayores de 10,000 habitantes a la fecha de elaboración de este material). La información es pública y se obtiene como una matriz similar a la que se muestra en la figura 9. Observemos que para un TSP con $n = 54$, el número de permutaciones es $54! \approx 2.3 \times 10^{71}$.

	Albertslund	Ballerup	Birkød	Blovstrød	Charlottenlund	Christianshavn	Copenhagen	Dragør
Albertslund		7.23	18.99	21.22	14.05	11.23	10.47	16.06
Ballerup	7.25		12.66	15.04	10.81	12.33	10.92	21.64
Birkød	18.36	12.38		2.47	9.69	14.68	13.96	30.22
Blovstrød	20.91	14.78	2.47		12.16	20.53	19.12	32.77
Charlottenlund	13.87	10.93	9.61	12.08		6.41	5.86	14.08
Christianshavn	11.40	12.04	14.82	20.42	6.51		1.94	8.00
Copenhagen	10.44	10.71	14.06	19.09	5.94	1.76		8.89
Dragør	16.58	21.44	30.63	32.86	14.16	8.00	9.25	
Espergærde	30.58	27.63	14.65	15.03	21.54	26.82	26.10	42.43
Farum	15.79	6.72	5.59	7.34	13.38	15.41	14.01	27.65
Fløng	9.89	13.10	24.44	26.82	22.37	20.33	19.57	25.16
Fredensborg	27.75	24.81	11.82	10.56	18.71	23.99	23.27	39.61
Frederiksberg	9.60	10.43	14.01	18.81	6.46	3.02	1.79	10.97
Frederikssund	23.53	16.49	17.22	15.41	26.16	28.19	26.78	37.80
Frederiksværk	35.19	24.83	21.19	19.93	32.78	34.81	33.40	47.05
Gårløse	13.79	6.76	10.75	9.86	15.39	17.42	16.01	28.06
Gilleleje	40.34	34.21	22.19	19.97	32.17	37.46	38.55	52.20
Glostrup	2.28	6.53	17.20	19.43	12.26	8.27	7.23	16.03
Græsted	35.48	29.34	21.48	20.22	33.07	35.10	33.69	47.34

FIGURA 9. Extracto de la matriz de distancias de 54 ciudades de Dinamarca.

Al implementar el algoritmo con $M = 1,000$; $\phi(k, T^0) = \phi_3(k, T^0)$, con $c = 0.95$; $T^0 = 10$; valor final de $\phi(k, T^0) \leq 1$; se revisan 45,000 configuraciones y se obtiene un valor final $E(C) \approx 532$ km. En la figura 10.a) se muestra la evolución de $E(C)$ en las 45,000 iteraciones. Se puede observar el comportamiento inicial de exploración por temperatura alta y como el proceso se va estabilizando al ir bajando la temperatura. De cualquier forma, vemos que en la parte final aún hay fluctuación por lo que podemos pensar que no se había estabilizado del todo. Se puede continuar ajustando la temperatura final a un valor menor, por ejemplo, $\phi(k, T^0) \leq 0.1$. El desarrollo se puede observar en la figura 10.b), donde se ve la estabilización después de 80,000 iteraciones y se obtiene un valor final de $E(C) \approx 511$ km.

Si el tiempo de cómputo lo permite, conviene aumentar el valor de M para hacer una mayor exploración. Por ejemplo, podemos tomar $M = 10,000$ y mantener la configuración. En este caso se revisan 900,000 configuraciones y se obtiene un valor de $E(C) \approx 495$ km.

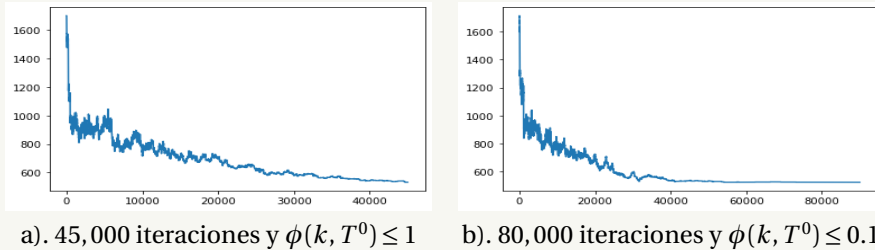


FIGURA 10. Gráfica de energía a lo largo de las iteraciones con dos criterios para la función de temperatura.

Debido a la naturaleza estocástica de estos métodos, es común que, se realicen varias ejecuciones el algoritmo y se utilicen métodos estadísticos para analizar de manera general los resultados obtenidos (con promedios y desviaciones estándar, por ejemplo).

Hay que notar que es posible que varias de las configuraciones revisadas se repitan, esto no es problema porque se evita el costo computacional de llevar un registro para verificar que no sea así. Finalmente, concluimos que se puede obtener una muy buena respuesta revisando una razón mínima del espacio de configuraciones. Como ejemplo, si hacemos 10 ejecuciones como la que se describe en el último párrafo, revisaríamos sólo 9×10^6 configuraciones de $54!$ posibles, aproximadamente un $4 \times 10^{-63} \%$.

4. CONCLUSIONES

Los métodos de optimización clásicos son ampliamente utilizados en aplicaciones cotidianas provenientes de diversas áreas del conocimiento. La teoría que los sustenta está bien establecida y sigue activa como área de investigación. Por lo cual, es fácil encontrar documentación, teoría y incluso implementaciones numéricas en software especializado, tanto comercial como de uso abierto.

Sin embargo, las limitantes que enfrentan estos métodos no son triviales. Por un lado, se tiene el crecimiento masivo de información y datos, lo cual conduce a problemas de optimización de gran dimensión. Por supuesto, ante esto se han hecho avances importantes, por ejemplo en la incorporación de cómputo en paralelo y el uso de equipos computacionales avanzados que ayudan en reducir los tiempos en los que los métodos de optimización entregan respuestas. Por otro lado, la vida cotidiana actual presenta situaciones que no son fácilmente trasladadas a expresiones matemáticas.

Más aún, en caso de que esas situaciones se puedan formular como funciones objetivo, no necesariamente cumplen con las condiciones requeridas para asegurar resultados desde el punto de vista teórico. En este sentido, también se han hecho contribuciones mediante aproximaciones o reformulaciones del problema original.

De manera alternativa, desde hace más de 50 años, se han estudiado métodos de optimización, a los que nos referimos como no clásicos, que pretenden obtener resultados comparables con los métodos de optimización clásicos, con la ventaja de no depender explícitamente de los elementos teóricos necesarios. Como continuidad, convexidad o diferenciabilidad.

Los métodos no convencionales se basan en heurísticas o metaheurísticas, que se traducen en estrategias mediante las cuales se explora el espacio definido por los parámetros del problema. Esta búsqueda guiada amplía las capacidades para encontrar múltiples soluciones al problema de estudio y consecuentemente, tener más oportunidades de localizar el mínimo global de la función objetivo.

Las estrategias que utilizan las metaheurísticas, se inspiran a su vez en la naturaleza. Es decir, parten del hecho de que en la naturaleza los fenómenos suceden con mínima energía. Por lo cual, las metaheurísticas construyen objetos computacionales que emulan el comportamiento de procesos biológicos o físicos.

Por ejemplo, algunas metaheurísticas construyen poblaciones de variables que buscan el mínimo global de la función objetivo de forma similar a como una población de sardinas busca recursos. La ventaja de tener una población, es que se pueden buscar en más sitios al mismo tiempo. Este es el caso del algoritmo PSO.

En el caso de SA, el proceso que lo inspira es el de templado de materiales como el acero. Una característica del SA, que beneficia la búsqueda de soluciones, es que permite que se avance incluso en situaciones en las que parecería que el algoritmo se aleja de los mínimos locales. Es decir, se permite equivocarse a veces, de manera controlada. Eso mismo sucede cuando se tienen materiales fundidos pues contienen tanta energía interna (calor) que no es posible que sus átomos se queden fijos en una estructura estable. Luego, al reducir paulatinamente la temperatura, se permite que cada uno de los elementos encuentre un acomodo adecuado hasta alcanzar estados con mínima energía. Es importante destacar que en este tipo de fenómenos, la dependencia entre las variables es muy alta, pues el valor que toma cada una determina los posibles valores que tomarán las demás y viceversa.

No obstante, le teoría detrás de las metaheurísticas no se encuentra totalmente establecida. Por lo general, se debe dedicar un esfuerzo considerable en ajustar los hiperparámetros y éstos terminan siendo dependientes de la aplicación o caso de

estudio. En este momento, tanto el diseño de las metaheurísticas como los resultados que ofrecen, se analizan desde la perspectiva de la Estadística.

El desarrollo de metaheurísticas, como área de investigación, es en sí un campo muy amplio y está en continuo crecimiento. Se puede estudiar desde los aspectos teóricos y computacionales, así como desde el punto de vista de la aplicación en cuestión. Para el lector interesado, se recomienda ampliar la literatura relacionada a las metaheurísticas, así como tener una preparación integral en Matemáticas, Computación, Estadística y por supuesto, conocer la aplicación específica de interés.

REFERENCIAS

- [1] Anthony Carlisle and Gerry Dozier. An off-the-shelf pso. In *Proc. Workshop on Particle Swarm Optimization, Purdue School of Engineering and Technology, IUPUI*, volume 1, pages 1–6, 2001.
- [2] Maurice Clerc and James Kennedy. The particle swarm - explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, 6(1):58–73, 2002.
- [3] Andrew R Conn, Katya Scheinberg, and Luis N Vicente. *Introduction to derivative-free optimization*. SIAM, 2009.
- [4] Ke-Lin Du and MNS Swamy. *Search and optimization by metaheuristics: Techniques and Algorithms Inspired by Nature*. Springer, 2016.
- [5] JL Fernández Martínez and E García Gonzalo. The generalized PSO: a new door to PSO evolution. *Journal of Artificial Evolution and Applications*, 2008, 2008.
- [6] Juan Luis Fernández Martínez and E García Gonzalo. The PSO family: deduction, stochastic analysis and comparison. *Swarm Intelligence*, 3:245–273, 2009.
- [7] F Glover and K. Sörensen. Metaheuristics. *Scholarpedia*, 10(4):6532, 2015. revision #149834.
- [8] Fred Glover. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & operations research*, 13(5):533–549, 1986.
- [9] ER Golder and JG Settle. The box-müller method for generating pseudo-random normal deviates. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 25(1):12–20, 1976.
- [10] Michael Held and Richard M Karp. A dynamic programming approach to sequencing problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied mathematics*, 10(1):196–210, 1962.
- [11] Michael Hinze, René Pinnau, Michael Ulbrich, and Stefan Ulbrich. *Optimization with PDE constraints*, volume 23. Springer Science & Business Media, 2008.
- [12] Reiner Horst and Panos M Pardalos. *Handbook of global optimization*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2013.

- [13] Kashif Hussain, Mohd Najib Mohd Salleh, Shi Cheng, and Yuhui Shi. Metaheuristic research: a comprehensive survey. *Artificial Intelligence Review*, 52:2191–2233, 2019.
- [14] Momin Jamil and Xin-She Yang. A literature survey of benchmark functions for global optimisation problems. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, 4(2):150–194, 2013.
- [15] Mykel J Kochenderfer and Tim A Wheeler. *Algorithms for optimization*. Mit Press, 2019.
- [16] George Marsaglia. Xorshift rngs. *Journal of Statistical software*, 8:1–6, 2003.
- [17] George Marsaglia and Arif Zaman. The kiss generator. Technical report, Tech. rep., Department of Statistics, University of Florida, 1993.
- [18] Makoto Matsumoto and Takuji Nishimura. Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, 8(1):3–30, 1998.
- [19] William Menke. *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. Academic press, 2018.
- [20] Jorge Nocedal and Stephen J Wright. *Numerical optimization*. Springer, 1999.
- [21] Stephan Olariu and Albert Y. Zomaya. *Handbook of Bioinspired Algorithms and Applications*. Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [22] Colin R Reeves. *Modern heuristic techniques for combinatorial problems*. John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [23] Berthold Immanuel Schmitt. *Convergence analysis for particle swarm optimization*. FAU University Press, 2015.
- [24] Yuhui Shi and Russell Eberhart. A modified particle swarm optimizer. In *1998 IEEE international conference on evolutionary computation proceedings. IEEE world congress on computational intelligence (Cat. No. 98TH8360)*, pages 69–73. IEEE, 1998.
- [25] Patrick Siarry. *Metaheuristics*, volume 71. Springer, 2016.
- [26] Ioan Cristian Trelea. The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection. *Information processing letters*, 85(6):317–325, 2003.

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL Y TOPOGRAFÍA, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN #1421, ESQ CALZADA OLÍMPICA, C.P. 44430, GUADALAJARA, JALISCO, MÉXICO.

E-mail address: miguel.alatorre@academicos.udg.mx

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN #1421, ESQ CALZADA OLÍMPICA, C.P. 44430, GUADALAJARA, JALISCO, MÉXICO.

E-mail address: ignacio.becerra@academicos.udg.mx

E-mail address: emilia.fbecerra@academicos.udg.mx

E-mail address: edgar.guerrero@academicos.udg.mx

E-mail address: antonio.licea@academicos.udg.mx

E-mail address: mauricio.navaflores@academicos.udg.mx

E-mail address: abel.palafox@academicos.udg.mx

INTRODUCCIÓN A VARIAS VARIABLES COMPLEJAS

CELIA ÁVALOS RAMOS, ISIDRO HUMBERTO MUNIVE LIMA Y SOFÍA ORTEGA CASTILLO

RESUMEN. En este trabajo se estudia a C^n desde el punto de vista del análisis, llamado el estudio de las varias variables complejas. Presentamos la holomorfía en varias variables y los dominios de holomorfía, entre otros temas relacionados.

ABSTRACT. In this work we study C^n from the point of view of analysis, called the study of several complex variables. We present holomorphy in several variables and domains of holomorphy, among other related topics.

1. INTRODUCCIÓN

Estas notas introductorias a las varias variables complejas están basadas en [2]. El propósito de este trabajo es fundamentar el concepto de la holomorfía en varias variables a partir del estudio de series de potencias multivariable, así como presentar varias nociones equivalentes de holomorfía como sucede en el caso 1-dimensional y recuperar como en el plano complejo que una función holomorfa es C^∞ y coincide con su serie de Taylor. También resulta esencial introducir los operadores $\frac{\partial}{\partial z_k}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ para funciones de varias variables complejas.

Una vez presentado el concepto de holomorfía y en particular el de serie de potencias multivariable, una observación interesante es que los dominios de convergencia de dichas series ya no necesariamente tienen que ser bolas como sucede en una variable compleja, pero su geometría se puede caracterizar por ser dominios multicirculares completos y logarítmicamente convexos, conceptos que explicamos a detalle en este texto. También es relevante presentar la definición de singularidad, dado que por un célebre resultado de Cartan y Thullen, los dominios de convergencia de series

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32-01.

Palabras Claves. Holomorfía en varias variables. Dominios de holomorfía.

de potencias multivariable admiten una serie de potencias (no necesariamente la que define el dominio) tal que es singular en cada punto fronterizo. Resulta entonces natural introducir el concepto de dominio de existencia de una función holomorfa, la noción de continuación holomorfa así como presentar el dominio de Hartogs, que es un ejemplo de un dominio en \mathbb{C}^2 que admite continuación holomorfa de toda función holomorfa definida en él a un dominio estrictamente más grande. También se presenta el concepto de dominio de holomorfa que resulta ser equivalente al concepto de dominio de existencia y se presentan ejemplos de dichos dominios así como una caracterización geométrica de Levi de los dominios de holomorfa con frontera C^2 . A manera de ejemplo, presentamos la prueba de que los dominios convexos con frontera C^2 , los cuales son dominios de holomorfa, satisfacen la condición de Levi. Para esto también presentamos y probamos la forma compleja del Hessiano real. Finalmente presentamos el concepto de pseudoconvexidad estricta así como probamos que la bola unitaria en \mathbb{C}^n es fuertemente pseudoconvexa. Además, en un apéndice para el lector presentamos los teoremas fundamentales usados en el texto.

2. HOLOMORFÍA EN VARIAS VARIABLES

Un primer concepto a definir en varias variables complejas es el de función holomorfa. Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, y sin tener un concepto definido de función holomorfa, lo más natural es dar una definición de función holomorfa sobre Ω con valores complejos que incluya a los *polinomios* en las coordenadas complejas z_1, z_2, \dots, z_n . Más aún, por comparación con el caso en una variable compleja, consideremos a las series de potencias multivariable para un modelo local de las funciones holomorfas \mathbb{C} -valuadas.

Definición 2.1. *Dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$, una serie de potencias multivariable centrada en a toma la forma*

$$\sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (z_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (z_n - a_n)^{\alpha_n}, \quad \text{donde cada } c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

y converge absoluta y uniformemente en polidiscos cerrados $\overline{D(a_1, r_1)} \times \cdots \times \overline{D(a_n, r_n)}$ dentro de Ω .

Hasta este punto, no hemos definido la holomorfa en varias variables. Puesto que las series de potencias multivariable convergen uniformemente en compactos simplemente conexos por los teoremas de Morera y de Cauchy-Goursat [1] y además las series de potencias multivariable son el límite uniforme en compactos de funciones

continuas, es fácil ver que representan funciones continuas que son holomorfas en cada variable por separado. Debido a esto, diremos lo siguiente.

Definición 2.2. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es **holomorfa** ($f \in \mathcal{O}(\Omega)$) si lo es en cada variable compleja por separado y en conjunto es una función continua en Ω .

Con esta definición, al iterar la fórmula integral de Cauchy en sus n variables, vemos que para todo z en un polidisco $\overline{D}(a, r) := \overline{D}(a_1, r_1) \times \cdots \times \overline{D}(a_n, r_n)$ contenido en Ω , existen $R_1 > r_1, \dots, R_n > r_n$ tales que $D(a, r) \subset \overline{D}(a, R) = \overline{D}(a_1, R_1) \times \cdots \times \overline{D}(a_n, R_n) \subset \Omega$ y

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{b_0 D(a, R)} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}, \quad z \in \overline{D}(a, r). \quad (2)$$

donde $b_0 D(a, R) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j - a_j| = R_j, 1 \leq j \leq n\}$ es la frontera distinguida del polidisco $\overline{D}(a, R)$.

Re-escribiendo cada término $\frac{1}{\zeta_i - z_i}$ del kernel de Cauchy en (2) como una serie de potencias en z_i centrada en a_i , obtenemos una expansión de f en serie de potencias multivariable, que converge absoluta y uniformemente en el polidisco $\overline{D} := \overline{D}(a, r)$ debido al criterio M de Weierstrass:

$$\frac{1}{\zeta_i - z_i} = \frac{1}{(\zeta_i - a_i) - (z_i - a_i)} = \frac{1}{\zeta_i - a_i} \left(\frac{1}{1 - \frac{z_i - a_i}{\zeta_i - a_i}} \right) = \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \frac{(z_i - a_i)^{\alpha_i}}{(\zeta_i - a_i)^{\alpha_i+1}}.$$

Luego, (2) se escribe como

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{b_0 D} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - a_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\zeta_n - a_n)^{\alpha_n+1}} \cdot (z_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (z_n - a_n)^{\alpha_n}, \quad (3)$$

es decir, obtenemos lo siguiente.

Proposición 2.3. Cada función holomorfa en un dominio Ω admite una expansión en serie de potencias multivariable centrada en cada $a \in \Omega$, convergiendo absolutamente en todo polidisco cerrado $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$.

Es un ejercicio para el lector checar que una serie de potencias multivariable centrada en a que converge absolutamente en cada polidisco cerrado en Ω abierto, tiene una expansión en serie de potencias multivariable centrada en cada otro punto $b \in \Omega$.

Sugerencia: Usa la observación previa a la definición de holomorfa.

Por el análisis anterior, una función es holomorfa si y sólo si admite expansiones locales en series de potencias multivariable, así uno concluye lo siguiente.

Proposición 2.4. Una función holomorfa f en a es (Fréchet) \mathbb{C} -diferenciable en a , es decir, existe una transformación \mathbb{C} -lineal $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que aproxima linealmente a f cerca de a , i.e.,

$$f(a+h) = f(a) + T(h) + o(|h|), \quad (4)$$

lo cual se satisface justamente para T el polinomio homogéneo de grado 1 en la expansión en serie de potencias multivariable de f centrada en a .

Es un ejercicio para el lector probar el recíproco: si una función es \mathbb{C} -diferenciable entonces es holomorfa. **Sugerencia:** Usa que la composición de funciones \mathbb{C} -diferenciables es diferenciable y que las funciones \mathbb{C} -diferenciables son continuas.

Las caracterizaciones anteriores de funciones holomorfas en varias variables permiten generalizar propiedades clásicas al caso multivariable. Fijemos notación para entrar en detalles.

Definición 2.5. Escribamos $\frac{\partial}{\partial z_k}$ para denotar a la derivada compleja con respecto a la variable $z_k = x_k + i \cdot y_k$.

Es un ejercicio para el lector verificar que $\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_k})$ para funciones holomorfas y define $\frac{\partial}{\partial z_k}$ como antes para cualquier función de variable compleja. Más aún, definimos y notamos lo siguiente.

Definición 2.6. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_k})$

Proposición 2.7. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, una función en n variables complejas de clase \mathcal{C}^2 es holomorfa en la k -ésima variable si y sólo si se anula con respecto al operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$.

Dado que la frontera distinguida de un polidisco es un compacto, podemos tomar derivadas bajo el signo de integración en el lado derecho de la ecuación (2) y obtener lo siguiente.

Proposición 2.8. Una función holomorfa tiene derivadas complejas de todos los órdenes con respecto a cada una de las variables z_k , $k = 1, \dots, n$.

De hecho, obtenemos lo siguiente.

Proposición 2.9. *Dado un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, si D^α denota a $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}$, tenemos que para todo elemento a del dominio Ω de una función holomorfa f ,*

$$D^\alpha f(a) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{b_D} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - a_1)^{\alpha_1+1} \dots (\zeta_n - a_n)^{\alpha_n+1}}, \quad (5)$$

Al comparar con (3) nos lleva a lo siguiente.

Proposición 2.10. *La expansión en serie de potencias multivariable de una función holomorfa coincide con su serie de Taylor en cada punto del dominio.*

A partir de esto es posible recuperar en varias variables algunas herramientas del análisis complejo, como las estimaciones de Cauchy, el Principio de Identidad, el Teorema del Mapeo Abierto y el Principio del Máximo.

3. DOMINIOS DE HOLOMORFÍA

Como motivación al estudio de dominios de holomorfa, estudiemos la familia de ejemplos que consiste de los dominios de convergencia.

Definición 3.1. *Dada una serie de potencias multivariable centrada en 0, su dominio de convergencia es el interior del conjunto de puntos en \mathbb{C}^n donde tal serie converge.*

En comparación con lo sucedido en una variable compleja, las series de potencias multivariable no necesariamente tienen una bola o polidisco como dominio de convergencia, por ejemplo:

- $\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ tiene dominio de convergencia $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, y
- $\sum_{n=1}^{\infty} z_1^n z_2^n$ tiene dominio de convergencia $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1/|z_2|\}$.

Es un ejercicio para el lector hallar los dominios de convergencia de $\sum_{v_1, v_2 \geq 0} \frac{v_1!}{v_2!} z_1^{v_1} z_2^{v_2}$ y $\sum_{v_1, v_2 > 0} v_1! z_1^{v_1} z_2^{v_2}$, respectivamente. **Sugerencia:** Utiliza que el radio de convergencia de una serie en una variable compleja, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, está dado por $1/(\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n})$.

Proposición 3.2. *Los dominios de convergencia D satisfacen las siguientes propiedades:*

- *son multicirculares (dominios de Reinhardt), es decir, si (z_1, \dots, z_n) cae en D , también cae todo punto de la forma $(\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_n z_n)$, donde $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$.*
- *más aún, son dominios multicirculares completos: si $(z_1, \dots, z_n) \in D$, entonces el polidisco $\mathbb{D}(0, |z_1|) \times \dots \times \mathbb{D}(0, |z_n|)$ está contenido en D ,*

- y son *logarítmicamente convexos*, lo que significa que el dominio

$$\log(D) := \{(\log|w_1|, \dots, \log|w_n|) : w \in D \text{ con cada } w_i \neq 0\}$$

es convexo.

Demostración. Las primeras 2 propiedades son inmediatas y la última se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz: si $\sum_{\alpha} |c_{\alpha} z^{\alpha}|$ y $\sum_{\alpha} |c_{\alpha} w^{\alpha}|$ convergen, también $\sum_{\alpha} |c_{\alpha}| |z^{\alpha}|^{1/2} |w^{\alpha}|^{1/2}$ converge. \square

El recíproco también es cierto.

Proposición 3.3. *Un dominio multicircular completo que es logarítmicamente convexo resulta ser un dominio de convergencia.*

Demostración. En efecto, cuando un dominio D así es acotado, una serie de potencias multivariable con dominio de convergencia D es $\sum_{\alpha} z^{\alpha} / N_{\alpha}(D)$, donde $N_{\alpha}(D) = \sup_{w \in D} |w^{\alpha}|$:

Si $(z_1, \dots, z_n) \in D$, sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ tales que $(\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_n z_n) \in D$. Entonces,

$$\sum_{\alpha} \frac{|z_1|^{\alpha_1} \dots |z_n|^{\alpha_n}}{N_{\alpha}(D)} \leq \sum_{\alpha} \frac{|z_1|^{\alpha_1} \dots |z_n|^{\alpha_n}}{|\lambda_1 z_1|^{\alpha_1} \dots |\lambda_n z_n|^{\alpha_n}} \leq \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{|\lambda_1|}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{|\lambda_n|}\right)^{\alpha_n} < \infty.$$

Y si $z \notin \overline{D}$, por la multicircularidad podemos suponer que $z \in [0, \infty)^n$ con $z \neq (0, \dots, 0)$ por ser D una vecindad de 0. Más aún, supongamos que z_1, \dots, z_k no se anulan mientras que $z_{k+1} = \dots = z_n = 0$. Luego, $(\log(z_1), \dots, \log(z_k)) \notin \log(D)$, donde $\pi_k \log(D)$ es convexo para π_k la proyección en las primeras k coordenadas de \mathbb{C}^n , de modo que por el teorema de separación de Hahn-Banach real [3] existen $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\beta_1 \log(z_1) + \dots + \beta_k \log(z_k) > \sup_{\zeta \in \pi_k \log(D)} (\beta_1 |\zeta_1| + \dots + \beta_k |\zeta_k|). \quad (6)$$

Como D es una vecindad de 0, es claro que $\pi_k \log(D)$ es una vecindad de $(-\infty, \dots, -\infty)$, luego por (6) no es posible que algún β_i sea menor que cero, es decir, cada $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Haciendo una pequeña perturbación a cada β_i , podemos suponer que los β_i son racionales no-negativos. Y multiplicando los β_i por el producto de los denominadores de todos ellos, obtenemos que los nuevos β_i también cumplen (6). Es decir, sin pérdida de generalidad los β_i son enteros no-negativos. Pero entonces el multi-índice $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k, 0, \dots, 0)$ cumple que, aplicando exponencial a ambos lados de (6),

$$z^{\beta} > \sup_{w \in D} |w^{\beta}| = N_{\beta}(D). \quad (7)$$

Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, también $z^{k\beta} > N_{k\beta}(D)$, así que $\sum_{\alpha} z^{\alpha} / N_{\alpha}(D)$ tiene una infinidad de términos mayores que 1, es decir, dicha serie de potencias multivariable no converge.

Dado un dominio D no acotado que es multicircular, completo y logarítmicamente convexo, es un ejercicio para el lector construir una modificación de la última serie de potencias multivariable cuyo dominio de convergencia sea D . **Sugerencia:** Observa que la intersección de D con una bola de radio r y centrada en cero es aún un dominio multicircular, completo y logarítmicamente convexo. \square

En la frontera de un dominio de convergencia se puede converger o no. Por ejemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n / n^2$ converge en todo el disco unitario cerrado mientras que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ diverge en todo el círculo unitario; mientras tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n / n$ al menos diverge para $z = 1$ y al menos converge para $z = -1$. Para puntos fronterizos de un dominio de convergencia, el siguiente concepto es relevante.

Definición 3.4. Si D es el dominio de convergencia de la serie de potencias multivariable $\sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha}$, entonces $p \in bD$ es una singularidad de dicha serie de potencias multivariable si no existe $f \in \mathcal{O}(V_p)$, donde V_p es vecindad conexa de p , tal que $f(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha}$ para $z \in W \subset V_p \cap D$, siendo W un abierto no vacío.

Un resultado de Cartan y Thullen de 1932 garantiza que el dominio de convergencia de una serie de potencias multivariable es una *frontera natural* de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 3.5. Un dominio es una *frontera natural* si existe otra serie de potencias que converge en el dominio y que es singular en todos los puntos de la frontera.

La prueba del resultado de Cartan y Thullen se trata de verificar que las funciones holomorfas en el dominio dado que se extienden holomórficamente más allá de algún punto de la frontera forman un conjunto de la primera categoría en el espacio métrico completo de funciones holomorfas \mathbb{C} -valuadas sobre el dominio (con la topología de convergencia uniforme en compactos τ_c) usando el lema multidimensional de Pringsheim [2].

Veamos el siguiente ejemplo.

Proposición 3.6. La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, cuyo dominio de convergencia es el disco unitario, solamente es singular en $z_0 = 1$, pero existe otra serie de potencias cuya frontera natural es el disco unitario, a saber, $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

Demostración. Si $x \in (0, 1)$, para cada $N \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$f(x) \geq \sum_{n=0}^N x^{n!} \rightarrow N + 1 \text{ conforme } x \rightarrow 1^-$$

y así $f(x) \rightarrow \infty$ conforme $x \rightarrow 1^-$.

Ahora, si $p/q \in \mathbb{Q}$ y $x \in (0, 1)$, entonces la función $f(e^{2\pi i p/q} x) - f(x)$ es un polinomio en x ya que $(e^{2\pi i p/q})^{n!} = 1$ cuando $n \geq q$. Luego, $|f(e^{2\pi i p/q} x)| \rightarrow \infty$ conforme $x \rightarrow 1^-$, de modo que f tiene una singularidad en cada z de radio 1 y ángulo racional, y así el disco unitario es la frontera natural de $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. \square

Debido al resultado mencionado de Cartan y Thullen, un dominio de convergencia es un *dominio de existencia*, de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 3.7. $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto es el dominio de existencia de una función $f \in \mathcal{O}(U)$ si no hay abiertos V y W en \mathbb{C}^n ni función $\tilde{f} \in \mathcal{O}(V)$ tales que

- V es conexo y no está contenido en U ,
- $\emptyset \neq W \subset U \cap V$,
- $\tilde{f} = f$ en W .

Los dominios de existencia no admiten *continuación holomorfa* conforme a la siguiente definición.

Definición 3.8. Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio, un subconjunto conexo V de \mathbb{C}^n que contiene propiamente a U se dice que es una *continuación holomorfa* de U si toda $f \in \mathcal{O}(U)$ tiene una única extensión $\tilde{f} \in \mathcal{O}(V)$.

El recíproco no es cierto: los dominios que no admiten continuación holomorfa no necesariamente son dominios de existencia, por ejemplo si $U = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ entonces, $f \in \mathcal{O}(U)$ dada por $f(z) = \log(r) + i\theta$ con $0 < \theta < 2\pi$ cuando $z = r e^{i\theta}$, no admite continuación holomorfa pues no admite extensión continua, mientras que para $V = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ conexo, la función $\tilde{f} \in \mathcal{O}(V)$ dada por $f(z) = \log(r) + i\theta$ con $-\pi < \theta < \pi$ cuando $z = r e^{i\theta}$, cumple que \tilde{f} y f coinciden en W el semiplano superior abierto.

Veamos un dominio en \mathbb{C}^2 que admite continuación holomorfa, y por tanto no es dominio de existencia.

Definición 3.9. El dominio de Hartogs está dado por

$$H = \{z \in \mathbb{D}^2 : |z_1| < 1/2 \text{ ó } |z_2| > 1/2\}.$$

Proposición 3.10. Toda función holomorfa en H se extiende holomórficamente a \mathbb{D}^2 .

Demostración. Nos basaremos en la fórmula integral de Cauchy.

Sea $f \in \mathcal{O}(H)$ y fija $r \in (1/2, 1)$. Para (z, w) en el bidisco $P = \mathbb{D} \times D(0, r)$, sea

$$F(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(z, \zeta) d\zeta}{\zeta - w}, \quad (8)$$

de modo que no es difícil checar que F es continua y holomorfa en cada variable por separado y que coincide con f en $D(0, 1/2) \times D(0, r)$. Haciendo $r \rightarrow 1$ obtenemos la extensión holomorfa deseada. \square

Los dominios de existencia caen dentro de los dominios de holomorfia de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 3.11. $U \subset \mathbb{C}^n$ es llamado un **dominio de holomorfia** si no existen abiertos V y W en \mathbb{C}^n tales que:

- V es conexo y no está contenido en U ,
- $\emptyset \neq W \subset U \cap V$,
- Para toda $f \in \mathcal{O}(U)$ existe $\tilde{f} \in \mathcal{O}(V)$ (necesariamente única) tal que $\tilde{f} = f$ en W .

Dado un dominio de holomorfia U , se puede probar que es el dominio de existencia de una función holomorfa al verificar que la familia \mathcal{F} de funciones $f \in \mathcal{O}(U)$ tales que U no es el dominio de existencia de f es de la primera categoría en $(\mathcal{O}(U), \tau_c)$: Toma I un conjunto numerable denso en bU , y para cada par de abiertos V y W tales que V es un bola con centro en I y radio racional, mientras W es una componente conexa de $U \cap V$, prueba que para todo $m \in \mathbb{N}$, la familia $\mathcal{O}_m(U, V, W)$ de funciones $f \in \mathcal{O}(U)$ acotadas por m para las que existe $\tilde{f} \in \mathcal{O}(V)$ con $\tilde{f} = f$ en W , es densa en ninguna parte en $(\mathcal{O}(U), \tau_c)$, y prueba que la unión numerable de éstas cubre a \mathcal{F} .

Mientras el dominio de Hartogs en \mathbb{C}^2 claramente no es de holomorfia, todo dominio en \mathbb{C} es de holomorfia: para cualquier a_0 en su frontera, la función $\frac{1}{z-a_0}$ tiene una singularidad en a_0 .

Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Supongamos que para toda sucesión $(a_j) \subset U$ que converge a un punto $a \in bU$, existe $f \in \mathcal{O}(U)$ que no tiene cota en (a_j) . Es un ejercicio para el lector checar que U es un dominio de holomorfia. **Sugerencia:** Considera V una vecindad de a y W un subconjunto abierto no vacío de $U \cap V$ con $a \in bW$.

Otros ejemplos de dominios de holomorfia incluyen a la familia de dominios convexos, debido a que todo punto fuera del dominio convexo C se puede separar de C

por medio de un hiperplano por el teorema de separación de Hahn-Banach complejo [3]: dado $a_0 \in bC$, existe $v_0 \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$\operatorname{Re}\langle a_0, v_0 \rangle > \operatorname{Re}\langle u, v_0 \rangle, \text{ para todo } u \in C,$$

de modo que $f(z) = \frac{1}{\langle z - a_0, v_0 \rangle}$ es holomorfa en C y tiene una singularidad en a_0 .

Dado que los dominios de holomorfa forman una familia relativamente grande, nos interesa caracterizarlos. Entre 1910 y 1911, Levi sentó las bases para hacer esto localmente en el caso de dominios cuya frontera es de clase C^2 . Sus observaciones se basan en una caracterización de las funciones convexas de clase C^2 por medio del Hessiano.

Definición 3.12. Decimos que $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tiene frontera C^2 si existe una función \mathbb{R} -valuada r de clase C^2 definida en una vecindad U de $b\Omega$ tal que $U \cap \Omega = \{z \in U : r(z) < 0\}$ y $dr(z) \neq 0$ en todo punto $z \in b\Omega$. A r se le llama función definitoria de $b\Omega$.

Proposición 3.13. Si un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ es convexo y tiene frontera C^2 dada por una función definitoria r , entonces para todo $z \in b\Omega$,

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_k}(z) \zeta_j \zeta_k \geq 0, \text{ para todo } \zeta \in T_z(b\Omega) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n} : \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial r}{\partial x_j}(z) \zeta_j = 0\}. \quad (9)$$

Demostración. En efecto, si $z \in b\Omega$ entonces $r(z) = 0$. Más aún, si $\mu \in \mathbb{R}^{2n}$ es no nulo, $\|\mu\|$ es pequeña y $\mu \in T_z(b\Omega)$, es decir $dr(z)(\mu) = 0$, por la convexidad de Ω obtenemos que $r(z + \mu) \geq 0$. Ahora, como r es de clase C^2 , desarrollando $r(z + \mu)$ en series de Taylor alrededor de z obtenemos,

$$0 \leq r(z + \mu) = r(z) + dr(z)(\mu) + \frac{1}{2} \mu^t \operatorname{Hess}(r)(z) \mu + R(z)(\mu) \quad (10)$$

donde $\frac{R(z)(\mu)}{\|\mu\|^2} \rightarrow 0$ conforme $\mu \rightarrow 0$. Luego, si ζ es el vector unitario $\mu/\|\mu\|$, dividiendo por $\|\mu\|^2$ y tomando el límite cuando $\mu \rightarrow 0$,

$$0 \leq \frac{1}{2} \zeta^t \operatorname{Hess}(r)(z) \zeta + \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{R(z)(\mu)}{\|\mu\|^2} = \frac{1}{2} \zeta^t \operatorname{Hess}(r)(z) \zeta.$$

Finalmente, multiplicando ζ por cada escalar real, uno obtiene lo deseado. \square

Veamos como podemos interpretar la ecuación (9) en sentido complejo:

Proposición 3.14. *En forma compleja, el Hessiano real de $r \in C^2$ se escribe como*

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_k}(z) \zeta_j \zeta_k = \operatorname{Re} \left(\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k}(z) t_j t_k \right) + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) t_j \bar{t}_k \quad (11)$$

donde $t_j = \zeta_{2j-1} + i\zeta_{2j}$ y $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$, $1 \leq j \leq n$.

Demostración. En efecto, para cada $j, k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{2j}} \right) \circ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{2k}} \right) r \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k-1}} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_{2j} \partial x_{2k}} \right) + \frac{1}{4i} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_{2j} \partial x_{2k-1}} + \frac{\partial^2 r}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k}} \right), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_j \partial z_k} t_j \bar{t}_k \right) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k-1}} - \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j} \partial x_{2k}} \right) (\zeta_{2j-1} \zeta_{2k-1} - \zeta_{2j} \zeta_{2k}) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j} \partial x_{2k-1}} + \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k}} \right) (\zeta_{2j-1} \zeta_{2k} + \zeta_{2j} \zeta_{2k-1}). \end{aligned} \quad (12)$$

Mientras tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{2j}} \right) \circ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{2k}} \right) r \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k-1}} + \frac{\partial^2 r}{\partial x_{2j} \partial x_{2k}} \right) + \frac{1}{4i} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_{2j} \partial x_{2k-1}} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k}} \right) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k-1}} + \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j} \partial x_{2k}} \right) (\zeta_{2j-1} \zeta_{2k-1} + \zeta_{2j} \zeta_{2k} + i(-\zeta_{2j-1} \zeta_{2k} + \zeta_{2j} \zeta_{2k-1})) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j} \partial x_{2k-1}} - \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k}} \right) (-\zeta_{2j-1} \zeta_{2k} + \zeta_{2j} \zeta_{2k-1} - i(\zeta_{2j-1} \zeta_{2k-1} + \zeta_{2j} \zeta_{2k})). \end{aligned} \quad (13)$$

Entonces, sumando (12) y (13), obtenemos que

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_j \partial z_k} t_j \bar{t}_k\right) + \frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k-1}} [\zeta_{2j-1} \zeta_{2k-1} + i/2(-\zeta_{2j-1} \zeta_{2k} + \zeta_{2j} \zeta_{2k-1})] \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j} \partial x_{2k}} [\zeta_{2j} \zeta_{2k} + i/2(-\zeta_{2j-1} \zeta_{2k} + \zeta_{2j} \zeta_{2k-1})] \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j} \partial x_{2k-1}} [\zeta_{2j} \zeta_{2k-1} - i/2(\zeta_{2j-1} \zeta_{2k-1} + \zeta_{2j} \zeta_{2k})] \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k}} [\zeta_{2j-1} \zeta_{2k} + i/2(\zeta_{2j-1} \zeta_{2k-1} + \zeta_{2j} \zeta_{2k})]
\end{aligned} \tag{14}$$

Como r es de clase C^2 , al intercambiar k con j llegamos a que

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_k \partial z_j} t_k \bar{t}_j\right) + \frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_k \partial \bar{z}_j} t_k \bar{t}_j \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k-1}} [\zeta_{2j-1} \zeta_{2k-1} - i/2(-\zeta_{2j-1} \zeta_{2k} + \zeta_{2j} \zeta_{2k-1})] \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j} \partial x_{2k}} [\zeta_{2j} \zeta_{2k} - i/2(-\zeta_{2j-1} \zeta_{2k} + \zeta_{2j} \zeta_{2k-1})] \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j} \partial x_{2k-1}} [\zeta_{2j} \zeta_{2k-1} + i/2(\zeta_{2j-1} \zeta_{2k-1} + \zeta_{2j} \zeta_{2k})] \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial x_{2j-1} \partial x_{2k}} [\zeta_{2j-1} \zeta_{2k} - i/2(\zeta_{2j-1} \zeta_{2k-1} + \zeta_{2j} \zeta_{2k})]
\end{aligned} \tag{15}$$

Por tanto, al sumar sobre k y j entre 1 y n , claramente los términos imaginarios en (14) y (15) desaparecen y obtenemos lo deseado. \square

Así, si r satisface (9), entonces,

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k}(z) t_j t_k\right) + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) t_j \bar{t}_k \geq 0 \text{ para todo } t \in T_z(b\Omega).$$

Si t se restringe al espacio tangente complejo $T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega) := T_z(b\Omega) \cap iT_z(b\Omega)$, entonces también $it \in T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega)$, así que debido a (11),

$$-\operatorname{Re}\left(\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k}(z) t_j t_k\right) + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) t_j \bar{t}_k \geq 0 \text{ para todo } t \in T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega),$$

por lo que al promediar las dos ecuaciones anteriores obtenemos que

$$\mathcal{L}_z(r, t) := \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) t_j \bar{t}_k \geq 0 \text{ para todo } t \in T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega),$$

donde $\mathcal{L}_z(r, t)$ es llamada la *forma de Levi* o el *Hessiano complejo*, y a la ecuación anterior se le conoce como la *condición de Levi*.

Definición 3.15. *Dado un dominio Ω con frontera C^2 , decimos que Ω es Levi pseudoconvexo en z si se satisface la condición de Levi en z . Más aún, si la forma de Levi de r en z es estrictamente positiva cuando $t \neq 0$ está en el tangente complejo, decimos que Ω es estrictamente Levi pseudoconvexo en z .*

Debido a los cálculos anteriores, hemos probado el siguiente enunciado.

Proposición 3.16. *Los dominios convexos en \mathbb{C}^n son Levi pseudoconvexos (en todo punto de su frontera).*

Lo mismo pasa para todo dominio en \mathbb{C} , debido a la vacuidad de la condición de Levi en tal caso. En general, Levi demostró que todo dominio de holomorfa con frontera C^2 es Levi pseudoconvexo. La prueba usa técnicas de subvariedades complejas y utiliza que la pseudoconvexidad de Levi es un invariante bajo mapeos biholomorfos locales [4, Cap. II].

Por ejemplo, la función $r(z) = \|z\|^2 - 1 = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j - 1$ satisface que $\frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = \delta_{jk}$, así que $\mathcal{L}_z(r, t) = \|t\|^2 \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$. En este caso el Hessiano complejo es, más aún, positivo definido en todo \mathbb{C}^n . En consecuencia, dado que r es función definitoria de la frontera de la bola Euclidiana en \mathbb{C}^n , obtenemos que $B(0, 1)$ es estrictamente Levi pseudoconvexa.

4. APÉNDICE

En esta sección enlistamos los resultados de una variable compleja, análisis funcional y series de potencias multivariable necesarios para comprender este trabajo.

Teorema 4.1 (Teorema de Morera). *Si una función continua y \mathbb{C} -valuada definida en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ satisface que*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda γ curva cerrada de clase C^1 a pedazos en D , entonces f es holomorfa.

Teorema 4.2 (Teorema de Cauchy-Goursat). *Si una función \mathbb{C} -valuada es holomorfa en un dominio simplemente conexo $D \subset \mathbb{C}$ entonces*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda γ curva cerrada de clase C^1 a pedazos en D .

Teorema 4.3 (Teorema de separación de Hahn-Banach real). *Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y abierto y $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ entonces existe una función lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(x) > L(y)$ para todo $y \in C$.*

Teorema 4.4 (Teorema de separación de Hahn-Banach complejo). *Si $C \subset \mathbb{C}^n$ es convexo y abierto y $x \in \mathbb{C}^n \setminus C$ entonces existe una función \mathbb{C} -lineal $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}L(x) > \operatorname{Re}L(y)$ para todo $y \in C$.*

Teorema 4.5 (Lema multidimensional de Pringsheim). *Una serie de potencias con coeficientes reales no-negativos es singular en los puntos de la frontera de su dominio de convergencia cuyas coordenadas son todas no-negativas.*

REFERENCIAS

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [2] H. Boas, *Lecture notes on several complex variables*, <https://www.math.tamu.edu/~boas/courses/650-2013c/notes.pdf>
- [3] H. Fetter Nathansky, B. Gamboa de Buen, *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach*, Centro de Investigación en Matemáticas, México, 2008.
- [4] M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer Verlag, Berlin, 1986.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN #1421, ESQ. CALZADA OLÍMPICA, GUADALAJARA, 44430, JALISCO, MÉXICO

E-mail address: celia.avalos@academicos.udg.mx

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN #1421, ESQ. CALZADA OLÍMPICA, GUADALAJARA, 44430, JALISCO, MÉXICO

E-mail address: isidro.munive@academicos.udg.mx

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN #1421, ESQ. CALZADA OLÍMPICA, GUADALAJARA, 44430, JALISCO, MÉXICO

E-mail address: sofia.ortega@academicos.udg.mx

APLICACIONES DE TEORÍA DE GRUPOS EN ÓPTICA CUÁNTICA

JUAN JESÚS DÍAZ GUEVARA, ANDRÉS GARCÍA SANDOVAL,
OMAR VLADIMIR MACÍAS SANDOVAL, IVÁN FERNANDO VALTIERRA CARRANZA

RESUMEN. Estas notas contienen una breve bosquejo de la aplicación de teoría de grupos en específico grupos de Lie en la óptica cuántica y fueron preparadas para la VIII Escuela de Verano en Matemáticas 2024, (CUCEI, U.de G.). Estas notas están completamente basadas en los textos [1],[2].

ABSTRACT. These notes contains a brief sketch of the application of group theory specifically Lie groups in quantum optics and they were prepared for the VIII Summer School in Mathematics 2024, (CUCEI, U.de G.). These notes are completely based on [1],[2].

1. INTRODUCCIÓN

La mecánica cuántica surge a principios del siglo XX teniendo su progreso formal a partir del año 1920. Con el tiempo la mecánica cuántica se separó en varias ramas, en los años 1950 los estudios se ocupaban en la interacción entre la materia y la luz desconvocando en la invención del máser y láser surgiendo así la óptica cuántica. En primera instancia se presentan conceptos básicos y métodos operacionales esenciales para el desarrollo de la óptica cuántica.

2. NOTACIÓN DE DIRAC

Usando la notación de Dirac, un vector será denotado por el siguiente símbolo $| \ \rangle$ conocido como *ket*. El espacio de Hilbert es un espacio vectorial lineal complejo, equipado con con la definición de producto escalar y generado por un conjunto completo

2000 *Mathematics Subject Classification.* 82B44.

Palabras Claves. grupos de lie, mecánica clásica, mecánica cuántica, óptica cuántica.

de vectores.

2.1. Espacio vectorial lineal. Si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son vectores en un espacio vectorial lineal complejo, entonces la combinación lineal $a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle$ para coeficientes complejos a_1, a_2 arbitrarios es también un vector en el mismo espacio.

Un conjunto de vectores $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_N\rangle$ se dice que es linealmente independiente si

$$\sum_{n=1}^N a_n |\psi_n\rangle = 0,$$

implica en que $a_n = 0$ para todo $n = 1, \dots, N$. La dimensión del espacio vectorial viene dada por el número máximo de vectores linealmente independientes.

2.1.1. Producto escalar. Se dice que un espacio de Hilbert es Euclideano si es posible asociar con cada par de vectores $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ un número complejo, denotado como $\langle\phi|\psi\rangle$ tal que

1. $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$, aquí * denota la operación de complejo conjugado;
2. Si $|\psi\rangle = a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle$ entonces $\langle\phi|\psi\rangle = c_1\langle\phi|\psi_1\rangle + c_2\langle\phi|\psi_2\rangle$;
3. $\langle\psi|\psi\rangle > 0$;
4. $\langle\psi|\psi\rangle = 0$ si y sólo si $|\psi\rangle = 0$.

Un conjunto de vectores $|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle$ se dice que es ortonormal si

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

2.1.2. Completez. En un espacio vectorial de dimensión finita n , siempre existe un conjunto de n vectores linealmente independientes $\{|\psi_i\rangle\}$, llamados vectores base, tal que cualquier vector puede ser expresado como un combinación lineal

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |\psi_i\rangle.$$

La relación de completez es

$$\sum_{i=1}^n |\psi_i\rangle \langle\phi_i| = \mathbb{I},$$

donde \mathbb{I} es el operador identidad. Los números complejos α_i pueden ser determinados tomando el producto escalar sobre los vectores ortonormales $\{|\phi_i\rangle\}$, es decir $\alpha_i = \langle\phi_i|\psi\rangle$.

Sin embargo tal expansión no tiene por que existir si el espacio es de dimensión infinita. Hasta el momento hemos asumido que los vectores base son numerable. Sin embargo, hay ocasiones que requieren que trabajemos con una base $|\chi\rangle$ etiquetada por un parámetro continuo χ . La condición de ortonormalidad es

$$\langle \chi' | \chi \rangle = \delta(\chi - \chi'), \quad (1)$$

siendo $\delta(x)$ una distribución conocida como *delta de Dirac*.

2.1.3. Ejercicio.

- Si $a \leq \chi \leq b$ exprese la expansión para el vector $|\psi\rangle$ en términos de los vectores base $|\chi\rangle$.

2.1.4. Operador. La regla de transformación

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle, \quad (2)$$

que asocia a un vector en el espacio otro vector en el mismo espacio, la llamaremos operador.

Un operador \hat{A} es lineal sí para cualquier número complejo a_1, a_2 ,

$$\hat{A}(a_1|\psi\rangle + a_2|\phi\rangle) = (a_1\hat{A}|\psi\rangle + a_2\hat{A}|\phi\rangle). \quad (3)$$

2.1.5. Ejercicio.

- Obtenga una representación discreta para el operador \hat{A} considerando una base ortonormal $\{|e_i\rangle\}$.
- Obtenga una representación continua para el operador \hat{A} en la base $|\xi\rangle$.

2.1.6. Operaciones algebraicas con operadores lineales.

1. El operador definido por $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ es llamado conmutador. Si $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, se dice que \hat{A} y \hat{B} conmutan.
2. Sí m es un entero positivo entonces \hat{A}^m denota \hat{A} multiplicado consigo mismo m -veces.
3. Una función $F(\hat{A})$ puede ser definida por su expansión en potencias del operador \hat{A} . De particular interés el exponencial de un operador es

$$\exp(\hat{A}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{A}^m.$$

4. El adjunto de \hat{A} denotado por \hat{A}^\dagger es definido por la relación

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A}^\dagger | \phi \rangle^*.$$

5. Si para el operador \hat{A} existe un operador \hat{B} tal que $\hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B} = I$ entonces \hat{B} es llamado inverso de \hat{A} , el cual es denotado como \hat{A}^{-1} .
6. Un operador \hat{H} es llamado *hermítico* si $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$.
7. Un operador \hat{U} es llamado *unitario* si $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = I$.
8. Si un operador \hat{A} conmuta con su adjunto, entonces es llamado operador normal.
9. La suma de los elementos diagonales de un operador en su representación matricial es llamada *traza del operador* y se denota como $\text{Tr}(\hat{A})$.
10. Si $|\psi\rangle$ es tal que

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle, \quad (4)$$

donde λ es una constante entonces $|\psi\rangle$ es un *eigenvector* o *eigenestado* y λ es el correspondiente *eigenvalor* de \hat{A} .

- Los eigenvalores de un operador hermítico son reales.
 - Cualquier operador normal en un espacio n -dimensional posee n eigenvectores que son ortonormales.
11. Si un vector $|\psi(t)\rangle$ o un operador $\hat{A}(t)$ es una función de un parámetro escalar t , su derivada con respecto a ese parámetro tiene el significado usual que para funciones numéricas.

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle\langle\phi(t)| = \left(\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle\right)\langle\phi(t)| + |\psi(t)\rangle\left(\frac{d}{dt}\langle\phi(t)|\right) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\phi(t)\rangle = \left(\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\right)\phi(t) + \langle\psi(t)|\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right) \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_1\dots\hat{A}_n = \left(\frac{d}{dt}\hat{A}_1\right)\dots\hat{A}_n + \dots + \hat{A}_1\dots\frac{d}{dt}\hat{A}_n. \quad (7)$$

12. Sea \hat{S} un operador no singular. La transformación definida como

$$\hat{S}^{-1}\hat{A}\hat{S} = \hat{B}$$

es llamada *transformación de similaridad* de \hat{A} por \hat{B} .

2.1.7. Ejercicio.

- Verifique que $\hat{B}F(\hat{A}\hat{B}) = F(\hat{B}\hat{A})\hat{B}$.
- Verifique que $(\hat{A}\hat{B}\hat{C})^\dagger = \hat{C}^\dagger\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$.

- Verifique que el valor de la traza es cíclica y que la traza de un operador es independiente de la base.
- Verifique que $\det[\exp(\hat{A})] = e^{\text{Tr}\hat{A}}$.
- Verifique que

$$\frac{d}{dt} \hat{A}^n = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{A}^k \left(\frac{d}{dt} \hat{A} \right) \hat{A}^{n-k-1}.$$

- verifique que

$$\frac{d}{dt} \exp(\hat{A}(t)) = \int_0^1 \exp[u\hat{A}] \frac{d}{dt} \hat{A} \exp[(1-u)\hat{A}] du.$$

- Verifique que

•

$$[\hat{S}^{-1} \hat{A} \hat{S}]^m = \hat{S}^{-1} \hat{A}^m \hat{S},$$

•

$$\hat{S}^{-1} F(\hat{A}) \hat{S} = F(\hat{S}^{-1} \hat{A} \hat{S}).$$

- Verifique que si $\hat{S} = \exp(t\hat{P})$, entonces

$$\hat{A}(t) = \hat{S}^{-1} \hat{A} \hat{S} = \exp[-t\hat{L}_P] \hat{A}$$

donde

$$\hat{L}_P^0 \hat{A} = \hat{A}, \dots, \hat{L}_P^n \hat{A} = \hat{L}_P^{n-1} [\hat{P}, \hat{A}]$$

- Considere ls matrices

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} i x & y + i z \\ -y + i z & -i x \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} i \alpha & \beta + i \gamma \\ -\beta + i \gamma & -i \alpha \end{pmatrix},$$

obtenga :

- $[\hat{A}, \hat{B}]$,
- $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B})$.

3. TEORÍA DE GRUPOS

Una colección de elementos G junto con una operación binaria (llamada \circ) es llamado grupo si satisface los siguientes axiomas:

- Asociatividad: sí x, y y z están en G , entonces

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z.$$

- Elemento identidad: G contiene un elemento e tal que, para cualquier $x \in G$,

$$x \circ e = x.$$

- Elemento inverso: para cada x en G existe un elemento denotado por $x^{-1} \in G$, tal que

$$x \circ x^{-1} = e.$$

- Un grupo es Abeliano (conmutativo) sí

$$x \circ y = y \circ x \quad \forall x, y \in G.$$

Un subgrupo S de un grupo G es una colección de elementos de G que ellos mismos forman un grupo con la misma operación binaria.

Dos grupos G_1 y G_2 con operaciones binarias \circ y $*$ respectivamente, son *isomorfos* (es decir son idénticos en sus propiedades de grupo) sí hay un mapeo f 1-1 de G_1 sobre G_2 que respete las operaciones de grupo

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y).$$

3.1. Grupo de Lie. Considerese una variedad G de clase C^∞ de dimensión n y que tiene el siguiente mapeo diferenciable: cualquier elemento $g \in G$ se mapea $h \mapsto gh$ (traslación izquierda por g) o $h \mapsto hg$ (traslación derecha por g). En general no asumiremos que el grupo es Abeliano, es decir ($hg \neq gh$) y denotaremos el elemento identidad por e . Cualquier vecindad de e se mapea mediante traslación a la izquierda a lo largo de un g particular hacia una vecindad de g . Debido a que el mapa lleva curvas a curvas, mapea vectores tangentes en e (elementos de T_e) a aquellos en g . Este mapeo es llamado $L_g : T_e \rightarrow T_g$. Ahora consideremos un campo vectorial \mathbf{V} sobre G y se dice que es invariante por la izquierda sí L_g mapea \mathbf{V} en e a \mathbf{V} en g : $L_g : \mathbf{V}(e) \mapsto \mathbf{V}(g) \forall g \in G$. Por la ley de composición de grupo se tiene que L_g mapea $\mathbf{V}(h) \mapsto \mathbf{V}(gh) \forall h \in G$, esto nos da una definición de campo vectorial constante sobre G .

Si \mathbf{V} Y \mathbf{W} son dos espacios vectoriales invariantes por la izquierda, entonces L_g mapea $\{\mathbf{V}, \mathbf{W}\}(e) \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{W}\}(g)$, entonces el campo $\{\mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ es invariante por la izquierda, esto nos lleva a concluir que un campo vectorial que es invariante por la izquierda es un *álgebra de Lie*, denotado comunmente como *álgebra de Lie de G*, $\mathfrak{L}(G)$ o \mathfrak{g} . Esta álgebra de Lie, está completamente caracterizada por sus constantes de estructura $c_{k,l}^j$ definidas como sigue: Sea $\{\mathbf{V}_i, i = 1, \dots, n\}$ una base para el álgebra de Lie, entonces podemos escribir

$$\{\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_i\} = c_{k,i}^j \mathbf{V}_j.$$

Consideremos una curva integral de un campo vectorial invariante por la izquierda \mathbf{V} que pasa através de e y tiene un solo vector tangente \mathbf{v}_e en e y un parametro t para el cual corresponde e cuando $t = 0$. Ahora bien, los puntos sobre la curva pueden ser localizados por la exponenciación de \mathbf{V} , es decir $\exp(t\mathbf{V})$. Podemos denotar los puntos de G sobre esta curva por

$$g\mathbf{v}_e(t) = \exp(t\mathbf{V})|_e.$$

Como la exponenciación, tiene por definición la propiedad

$$\exp(t_2\mathbf{V})\exp(t_1\mathbf{V})|_e = \exp[(t_1 + t_2)\mathbf{V}]|_e,$$

los puntos sobre la curva integral forman un grupo,

$$g\mathbf{v}_e(t_1 + t_2) = \exp[(t_1 + t_2)\mathbf{V}]|_e = \exp(t_2\mathbf{V})\exp(t_1\mathbf{V})|_e = g\mathbf{v}_e(t_2)\mathbf{v}_e(t_1).$$

Esto es llamado *sub-grupo uniparametrico de G*.

3.2. Álgebra de Lie. Cada *grupo de Lie* tiene su *álgebra de Lie*. Un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial sobre el cual está definida la operación $[\cdot, \cdot]$ la cual produce de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} otro vector $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ satisfaciendo:

- $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -[\mathbf{B}, \mathbf{A}]$
- $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0.$

Vale la pena mencionar, aunque sin demostrar, que cada *álgebra de Lie* es el *álgebra de Lie* de uno y sólo un *grupo de Lie* simplemente conexo. Sin embargo algun otro *grupo de Lie* que comparte la misma *álgebra de Lie* pero el grupo no es simplemente conexo es *cubierto* por el que si lo es.

3.3. El grupo SU(2). El grupo SU(2) es el grupo de todas las matrices g 2×2 que satisfacen las siguientes condiciones

- $\det g = 1$
- $g^\dagger g = 1$,

donde $g^\dagger = \tilde{g}^*$ es el hermitico conjugado de g . Este grupo es un subgrupo del *grupo especial lineal* $SL(2, \mathcal{C})$ el cual consiste de matrices complejas 2×2 con determinante 1.

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathcal{C}).$$

La condición de unitariedad se cumple para $\delta = \alpha^*$ y $\gamma = -\beta^*$, y por lo tanto la condición del determinante es

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (8)$$

Es decir, cada elemento de $SU(2)$ es determinado unívocamente por un par de números complejos (α, β) bajo la condición

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \in SU(2).$$

3.3.1. Relación con S^3 . Si tomamos $\alpha = (u^1) + i(u^2)$ y $\beta = (u^3) - i(u^4)$ donde $(u^1), (u^2), (u^3), (u^4) \in \mathcal{R}$, entonces la condición (8) puede ser reescrita como

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2 = u^2 = 1,$$

que describe una esfera unitaria S^3 centrada en el origen de un espacio real Euclideo de dimensión 4 E^4 . Ya que los parametros u^α están sujetos a la condición $|u^\alpha| \leq 1$, SU(2) es un grupo *compacto*. Por el siguiente mapeo biyectivo

$$\Phi : \mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3, u^4) \mapsto \begin{pmatrix} u^1 + i u^2 & u^3 - i u^4 \\ -u^3 - i u^4 & u^1 - i u^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

satisfaciendo la condición $\|\mathbf{u}\|^2 = \det \Phi = 1$, en este sentido podemos identificar la variedad del grupo SU(2) con la esfera S^3 .

El punto $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3, u^4) \in S^3$ puede ser parametrizado con los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ)

$$u^1 = u \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi + \psi}{2} \quad (10)$$

$$u^2 = u \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi + \psi}{2} \quad (11)$$

$$u^3 = u \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi - \psi}{2} \quad (12)$$

$$u^4 = u \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi - \psi}{2} \quad (13)$$

donde $u = 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ y $0 \leq \psi \leq 4\pi$. Con esta parametrización, un elemento de $SU(2)$ es expresado via el mapeo (9) como

$$g(\theta, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \exp(i \frac{\phi + \psi}{2}) & i \sin \frac{\theta}{2} \exp(i \frac{\phi - \psi}{2}) \\ i \sin \frac{\theta}{2} \exp(-i \frac{\phi - \psi}{2}) & \cos \frac{\theta}{2} \exp(-i \frac{\phi + \psi}{2}) \end{pmatrix}$$

que puede ser factorizado en la siguiente forma

$$g(\theta, \phi, \psi) = g(\phi, 0, 0)g(0, \theta, 0)g(0, 0, \psi)$$

donde

$$g(\phi, 0, 0) = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix},$$

$$g(0, \theta, 0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

$$g(0, 0, \psi) = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}.$$

Esta es la descomposición de Cartan de $SU(2)$. La medida invariante es

$$d\mu(g) = \frac{1}{16\pi^2} \sin \theta d\theta d\phi d\psi,$$

la cual está normalizada a

$$\int_{SU(2)} d\mu(g) = 1,$$

La integral sobre $SU(2)$ expresada en términos de los ángulos de Euler es

$$\int_{SU(2)} f(g) d\mu(g) = (16\pi^2)^{-1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{4\pi} f(\phi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\phi d\psi.$$

3.4. Álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. El producto interno de dos matrices A y B es definido como

$$(A, B) = \text{Tr}(AB^\dagger).$$

La norma de A definida por

$$\|A\| = (A, A)^{1/2}$$

satisface la desigualdad

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

y por lo tanto la exponencial de A definida por la serie

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

es convergente. Suponga que cada componente de una matriz $g \in Sl(2, \mathcal{C})$ es una función continua de un parametro t . Entonces g puede ser puesto en la forma

$$g(t) = \exp(itA), \quad A = -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dg(t)}{dt}.$$

La matriz A introducida anteriormente es llamada *generador infinitesimal* del grupo uniparametrico $g(t)$. Para un $g \in SU(2)$, A es una matriz hermítica 2×2 . La matriz hermítica $A (= A^\dagger)$ es una representación del *álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$* de $SU(2)$.

Las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

proveen una base ortogonal para el *álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$* ; es decir, cualquier elemento A de $\mathfrak{su}(2)$ puede ser descompuesto en la forma

$$A = \sum_{k=1}^3 a_k J_k$$

donde $J_k = \frac{1}{2} \sigma_k$ ($k = 1, 2, 3$).

Es fácil verificar que las matrices J_k satisfacen las reglas de conmutación

$$[J_1, J_2] = iJ_3 \quad [J_2, J_3] = iJ_1 \quad [J_3, J_1] = iJ_2.$$

El elemento casimir del grupo viene dado por

$$Q = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

el cual conmuta con cualquier J_k . Los tres conjuntos de elementos de $SU(2)$ correspondientes a las matrices J_k ($k = 1, 2, 3$) de $\mathfrak{su}(2)$ son

$$g_1 = \exp(it J_1) = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & i \sin \frac{t}{2} \\ i \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

$$g_2 = \exp(it J_2) = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & \sin \frac{t}{2} \\ -\sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

$$g_3 = \exp(it J_3) = \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix},$$

Con estas relaciones, el elemento $g(\phi, \theta, \psi)$ expresado en ángulos de Euler puede ser escrito como

$$g(\phi, \theta, \psi) = e^{i\phi J_3} e^{i\theta J_1} e^{i\psi J_3}.$$

3.5. Representación de $SU(2)$. Una representación de $SU(2)$ puede obtenerse como caso especial de la representación de $SL(2, \mathcal{C})$. El grupo $SL(2, \mathcal{C})$ actúa en el plano complejo \mathcal{C}^2 de todo vector fila $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ donde $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$. Un elemento

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathcal{C})$$

toma \mathbf{z} en $\mathbf{z}' = \mathbf{z}g \in \mathcal{C}^2$. Más explícito, le corresponde una transformación lineal de \mathcal{C}^2 ,

$$(z_1, z_2)g = (\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$$

satisfaciendo $\mathbf{z}(g g') = (\mathbf{z}g)g'$ para cualquier $g, g' \in SL(2, \mathcal{C})$. La acción de $SL(2, \mathcal{C})$ sobre \mathcal{C}^2 es transferida al espacio V de funciones $f(\mathbf{z})$ de dos variables complejas definida por el operador $T(g)$ tal que $T(g)f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}g)$ o

$$T(g)f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2).$$

Obviamente $T(gg') = T(g)T(g')$ y $T(\mathbb{1}) = 1$. Así $T(g)$ es una representación de $SL(2, \mathcal{C})$. Una representación $T^j(g)$ puede ser construida en el espacio V_j de todos los polinomios homogéneos de grado $2j$ con $j = 0, 1, 2, \dots$,

$$p(z_1, z_2) = \sum_{m=-j}^j a_m z_1^{j+m} z_2^{j-m}.$$

La representación $T^j(g)$ puede ser realizada mas convenientemente en el espacio de todos los polinomios de grado $2j$ en una sola variable compleja $z_1/z_2 = z$. Sea $\varphi(z) = p(z, 1)$. Entonces $p(z_1, z_2) = z_2^{2j} \varphi(z_1/z_2)$, entonces en el espacio $\varphi(z)$, la representación $T^j(g)$ viene dada por

$$T^j(g)\varphi(z) = (\beta z + \delta)^{2j} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right).$$

La representación D^j para $SU(2)$ puede obtenerse simplemente reemplazando $\gamma = -\beta^*$ y $\delta = \alpha^*$, es decir

$$D^j(g)\varphi(z) = (\beta z + \alpha^*)^{2j} \varphi\left(\frac{\alpha z - \beta^*}{\beta z + \alpha^*}\right) \quad (14)$$

Si el producto interno (φ_a, φ_b) en V_j es definido por

$$\left(\sum_{j=-m}^m a_m z^{j+m}, \sum_{m=-j}^j b_m z^{j+m} \right) = \sum_{m=-j}^j (j+m)!(j-m)! a_m b_m^*$$

podemos decir que para cualquier elemento $g \in SU(2)$,

$$(D^j(g)\varphi_a, D^j(g)\varphi_b) = (\varphi_a, \varphi_b)$$

esto quiere decir que $D^j(g)$ es unitaria.

Así las matrices J_k que son la base ortogonal de $\mathfrak{su}(2)$ pueden ser *realizadas* en el espacio de monomios $\psi_j^m(z) = N_m z^{j+m}$ ($-j \leq m \leq j$) sobre el círculo $S^1 = \{z = e^{i\phi} | 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ de la siguiente forma

$$D^j(J_1)z^{j+m} = -i \frac{d}{dt} D^j(g_1)z^{j+m}|_{t=0} \quad (15)$$

$$= -i \frac{d}{dt} [(i z \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2})^{j-m} (z \cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2})^{j+m}]|_{t=0} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} [(j+m)z^{j+m-1} + (j-m)z^{j+m+1}]. \quad (17)$$

3.5.1. Ejercicios.

- Obtenga $D^j(J_2)z^{j+m}$ y $D^j(J_3)z^{j+m}$
- Definiendo a las matrices $J_{\pm} = J_1 \pm i J_2$ obtenga $D^j(J_{\pm})z^{j+m}$
- Obtenga las realizaciones para J_{\pm} y J_3 actuando sobre la función ortonormal $\psi_j^m(z) = [(j+m)!(j-m)!]^{-1/2} z^{j+m}$

3.6. Elementos matriciales de D^j . Los elementos de matriciales del operador D^j vienen dados por

$$D_{m,n}^j(g) = (D^j(g)\psi_j^n(z), \psi_j^m(z)) = \langle j, m | D^j(g) | j, n \rangle$$

$$D_{m,n}^j(g) = \langle j, m | e^{i\phi J_3} e^{i\theta J_2} e^{i\psi J_3} | j, m \rangle = e^{im\phi} e^{in\psi} d_{m,n}^j(\theta)$$

donde $d_{m,n}^j(\theta) = \langle j, m | e^{i\theta J_2} | j, m \rangle$ es conocida como la función d-Wigner.

Los elementos de matriz presentan las siguientes propiedades de ortogonalidad

$$\int_{\text{SU}(2)} D_{mn}^{j*}(g) D_{m'n'}^j(g) d\mu(g) = \frac{1}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (18)$$

$$\int_0^\pi d_{mn}^{j*}(\theta) d_{m'n'}^j(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (19)$$

El producto de dos elementos matriciales D^j es:

$$D_{r,p}^j(g) D_{s,q}^{j*}(g) = \sum_{l=0}^{2j} \frac{2l+1}{2j+1} C_{j,r;l,s-r}^{j,s} C_{j,p;l,q-p}^{j,q} D_{s-r,q-p}^{l*}(g), \quad (20)$$

donde $C_{j,r;l,s-r}^{j,s}$ y $C_{j,p;l,q-p}^{j,q}$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan.

3.6.1. *Coefficientes de Clebsch-Gordan.* Consideremos dos subespacios etiquetados por los índices \hat{J}_1 y \hat{J}_2 , las componentes de cada subespacio satisfacen las relaciones de conmutación del álgebra $\mathfrak{su}(2)$. Consideremos dos subespacios etiquetados por los índices \hat{J}_1 y \hat{J}_2 , las componentes de cada subespacio satisfacen las relaciones de conmutación del álgebra $\mathfrak{su}(2)$, además los eigenvectores de \hat{J}_1 y \hat{J}_2 son $|j_1, m_1\rangle$ y $|j_2, m_2\rangle$ respectivamente tal que

$$\begin{aligned}\hat{J}_1^2 |j_1 m_1\rangle &= j_1(j_1 + 1) |j_1 m_1\rangle, \\ \hat{J}_{1z} |j_1 m_1\rangle &= m_1 |j_1 m_1\rangle, \\ \hat{J}_2^2 |j_2 m_2\rangle &= j_2(j_2 + 1) |j_2 m_2\rangle, \\ \hat{J}_{2z} |j_2 m_2\rangle &= m_2 |j_2 m_2\rangle.\end{aligned}$$

Consideremos ahora los dos subespacios juntos, de tal forma que son diagonalizados por la base conjunta

$$|j_1, j_2; m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle,$$

la cual es una base completa y ortonormal.

3.6.2. *Ejercicio.*

- Obtenga la acción de los operadores $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{z_1}, \hat{J}_{z_2}$ en la base $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$.
- Pruebe que la base conjunta es completa y ortonormal.

Sea \hat{J} la representación de la suma $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$, se quiere los eigenvalores de \hat{J} y \hat{J}_z en terminos de los eigenvalores y eigenvectores de $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{z_1}, \hat{J}_{z_2}$ es decir

$$\begin{aligned}\hat{J}_1^2 |j_1 j_2; j m\rangle &= j_1(j_1 + 1) |j_1 j_2; j m\rangle, \\ \hat{J}_2^2 |j_1 j_2; j m\rangle &= j_2(j_2 + 1) |j_1 j_2; j m\rangle, \\ \hat{J}^2 |j_1 j_2; j m\rangle &= j(j + 1) |j_1 j_2; j m\rangle, \\ \hat{J}_z |j_1 j_2; j m\rangle &= m |j_1 j_2; j m\rangle.\end{aligned}$$

Para cada j el valor m tiene $2j + 1$ valores permitidos que corren de $-j \leq m \leq j$. Ya que j_1 y j_2 son valores fijos optaremos por usar la notación

$$|j_1, j_2; j, m\rangle \rightarrow |j, m\rangle.$$

Siendo la base $|j, m\rangle$ ortonormal y completa

$$\sum_j \sum_{m=-j}^j |j, m\rangle \langle j, m| = \mathbb{1} \quad (21)$$

$$\langle j', m' | j, m \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'}. \quad (22)$$

El espacio donde opera la representación total \hat{J} es generado por la base $|j, m\rangle$, este espacio es conocido como espacio producto y este espacio es el mismo que el generado por la base $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$, que es el espacio que incluye a los subespacios 1 y 2. La conexión entre ambas bases viene dada por

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j, m \rangle \quad (23)$$

$$= \sum_{m_1, m_2} C_{j_1, m_1; j_2, m_2}^{j, m} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle. \quad (24)$$

Los coeficientes $C_{j_1, m_1; j_2, m_2}^{j, m}$ son los elementos de matriz de la transformación unitaria que conectan a ambas bases. Algunas propiedades útiles son:

1. Propiedad de simetría:

$$C_{a\alpha; b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a+b+c} C_{b\beta; a\alpha}^{c\gamma} = (-1)^{a-\alpha} \sqrt{\frac{2c+1}{2b+1}} C_{a\alpha; c-\gamma}^{b-\beta} = (-1)^{a-\alpha} \sqrt{\frac{2c+1}{2b+1}} C_{c\gamma; a-\alpha}^{b\beta}$$

2. Relación de ortogonalidad

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j C_{j_1, m_1; j_2, m_2}^{j, m} C_{j_1, m'_1; j_2, m'_2}^{j, m} = \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2}.$$

3.7. Expansión en Fourier. Cualquier función cuadráticamente integrable sobre $SU(2)$ puede ser expandida en series de Fourier

$$f(g) = \sum_{2j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{n=-j}^j (2j+1) a_{m,n}^j D_{m,n}^j(g)$$

donde los coeficientes son

$$a_{m,n}^j = \int f(g) D_{m,n}^{j*}(g) d\mu(g)$$

En particular, si consideramos la parametrización de ángulos de Euler y la función no depende del ángulo ψ , es decir que es cuadráticamente integrable en S^2 , entonces

$$f(\theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j (2j+1) a_m^j e^{im\phi} P_j^m(\cos \theta)$$

donde $P_j^m(\cos \theta) = (-1)^m \sqrt{(j+m)!/(j-m)!} d_{m0}^j(\theta)$ son los polinomios asociados de Legendre.

3.7.1. Ejercicio.

- Obtenga los coeficientes a_m^j

4. EL GRUPO $SU(1,1)$

El grupo especial pseudo-unitario $SU(1,1)$ es el grupo de todas las matrices 2×2 g que satisfacen las siguientes condiciones

- $\det g = 1$,
- $g^\dagger \sigma_3 g = \sigma_3$,

donde σ_3 es el tercer elemento de las matrices de Pauli. Un elemento g de $SU(1,1)$ es una matriz pseudo-unitaria unimodular 2×2 que tiene la forma

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$$

donde α y β son números complejos que satisfacen la condición

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

El grupo $SU(1,1)$ es isomorfo al grupo $SL(2, \mathcal{R})$ que consiste de todas las matrices reales unimodulares 2×2 . Tomemos una matriz unitaria, por ejemplo

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

La transformación unitaria $g = hc^\dagger$ toma una matriz unimodular real h en una matriz unimodular pseudounitaria g . Así tenemos un isomorfismo $SU(1,1) = cSL(2, \mathcal{R})c^\dagger$.

Cualquier elemento $h \in SL(2, \mathcal{R})$ puede ser descompuesto de la siguiente forma

$$h = h_\phi h_\xi h_\eta$$

donde

$$h_\phi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & \sin \frac{\phi}{2} \\ -\sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{pmatrix},$$

$$h_\xi = \begin{pmatrix} e^{\xi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\xi/2} \end{pmatrix},$$

$$h_\eta = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta descomposición es conocida como *la descomposición de Iwasawa* de $h \in SL(2, \mathcal{R})$. Por el isomorfismo $g_h \mapsto c h c^\dagger$ de $SL(2\mathcal{R})$ a $SU(1,1)$, tenemos tres subgrupos uniparametricos

$$g_\phi = c h_\phi c^\dagger = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \text{ clase elíptica,}$$

$$g_\xi = c h_\xi c^\dagger = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\xi}{2} & \sinh \frac{\xi}{2} \\ \sinh \frac{\xi}{2} & \cosh \frac{\xi}{2} \end{pmatrix} \text{ clase hiperbólica,}$$

$$h_\eta = c h_\eta c^\dagger = \begin{pmatrix} 1 + i\eta/2 & -i\eta/2 \\ i\eta/2 & 1 - i\eta/2 \end{pmatrix} \text{ clase parabólica.}$$

La clase elíptica es un subgrupo compacto de $SU(1,1)$, mientras que la clase hiperbólica y parabólica son subgrupos no compactos.

4.1. Parametrización de $SU(1,1)$. Las matrices de $SU(1,1)$ pueden ser parametrizadas por los ángulos de Euler modificados

$$g(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\theta}{2} e^{i(\phi+\psi)/2} & \sinh \frac{\theta}{2} e^{i(\phi-\psi)/2} \\ \sinh \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi-\psi)/2} & \cosh \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi+\psi)/2} \end{pmatrix}$$

donde $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta < \infty$ y $0 \leq \psi < 4\pi$ y al igual que $SU(2)$ admite una descomposición de Cartan.

Mientras que $SU(2)$ es un grupo compacto $SU(1,1)$ no es compacto. Sin embargo, podemos decir que es localmente compacto en el sentido que cada elemento de

$SU(1,1)$ vecindad compacta. Si $f(g)$ es una función integrable sobre $SU(1,1)$, entonces la integración puede llevarse a cabo de la siguiente manera

$$\int_{SU(1,1)} f(g) d\mu(g) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(\theta, \phi, \psi) \sinh \theta d\theta d\phi d\psi.$$

4.2. Álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$. Cualquier elemento g del grupo $SU(1,1)$ puede ser generado por un elemento A del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ como

$$g = \exp(itA).$$

Si A es una matriz hermítica, entonces tenemos una representación unitaria de $SU(1,1)$, en general cualquier representación unitaria de un grupo no compacto es infinito dimensional. Cualquier elemento de $\mathfrak{su}(1,1)$ puede ser dado como una combinación lineal de tres elementos independientes J_1, J_2, J_3 , los cuales satisfacen las relaciones de conmutación

$$[J_1, J_2] = -iJ_3, [J_2, J_3] = iJ_1, [J_3, J_1] = iJ_2.$$

Los elementos de $\mathfrak{su}(1,1)$ pueden ser representado en terminos de las matrices de Pauli;

$$J_1 = \frac{i}{2}\sigma_1, J_2 = \frac{i}{2}\sigma_2, J_3 = \frac{1}{2}\sigma_3.$$

Los tres conjuntos de elementos de $SU(1,1)$ correspondientes a las matrices J_k ($k = 1, 2, 3$) de $\mathfrak{su}(1,1)$ son

$$\begin{aligned} g_1 &= \exp(itJ_1) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{t}{2} & \sinh \frac{t}{2} \\ \sinh \frac{t}{2} & \cosh \frac{t}{2} \end{pmatrix} \\ g_2 &= \exp(itJ_2) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{t}{2} & -i \sinh \frac{t}{2} \\ i \sinh \frac{t}{2} & \cosh \frac{t}{2} \end{pmatrix} \\ g_3 &= \exp(itJ_3) = \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Los primeros dos elementos generan los subgrupos no compactos de la clase hiperbolica mientras que el último elemento genera al subgrupo compacto.

Con estas relaciones, el elemento $g(\phi, \theta, \psi)$ exppresado en ángulos de Euler puede ser escrito como

$$g(\phi, \theta, \psi) = e^{i\phi J_3} e^{i\theta J_1} e^{i\psi J_3}.$$

El elemento de casimir del *álgebra de Lie* $\mathfrak{su}(1, 1)$ es

$$Q = J_3^2 - J_1^2 - J_2^2$$

el cual es hermítico pero no es positivo definido.

4.3. Representaciones de SU(1,1). Las representaciones del grupo SU(1,1), que son de dimensión infinita, pueden ser caracterizadas por los eigenvalores del casimir Q y el operador compacto J_3 , actuando en la base $|j, m\rangle$ de la siguiente forma

$$Q|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle \quad (25)$$

$$J_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle \quad (26)$$

$$J_{\pm}|j, m\rangle = [m(m \pm 1) - j(j+1)]^{1/2}|j, m \pm 1\rangle, \quad (27)$$

con $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$.

Estas representaciones son caracterizadas por J y m en

1. Serie principal o Serie continua

$$C_j : j = -\frac{1}{2} + is \quad (0 < s)$$

2. Serie discreta positiva (negativa)

$$D_j^+(D_j^-) : j = -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots \quad m = -j, -j+1, \dots (m = j, j-1, \dots)$$

3. La serie suplementaria no será aborada.

4.4. Elementos de Matriz. Los elementos de matriz en la base estandar son

$$D_{mn}^j(g) = \langle j, m | e^{i\phi J_3} e^{i\theta J_2} e^{i\psi J_3} | j, n \rangle = e^{im\phi} e^{in\psi} b_{mn}^j(\theta) \quad (28)$$

donde $b_{mn}^j(\theta) = \langle j, m | e^{i\theta J_2} | j, n \rangle$ el cual es conocido como la función de Bargmann, siendo una función real y satisface la siguiente relación de ortogonalidad para la serie discreta

$$\int_0^{\infty} b_{mn}^j(\theta) b_{m'n'}^{j'}(\theta) \sinh \theta d\theta = (2j+1)^{-1} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

5. MECÁNICA CLÁSICA

5.1. Estructuras simplécticas y de Poisson. **Definición:** Sea P una variedad y sea $\mathcal{F}(P)$ un conjunto de funciones suaves y reales en P . Consideremos la siguiente operación denotada por los corchetes

$$\{, \} : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(P). \quad (29)$$

El par $(P, \{, \})$ es llamado *variedad de Poisson* si $\{, \}$ satisface

- bilineal $\{f, g\}$ es bilineal en f y g ,
- anticonmutatividad $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
- Identidad de Jacobi $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0$
- Regla de Leibnitz $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$.

Las condiciones anteriores convierten el par $(\mathcal{F}(P), \{, \})$ en un *álgebra de Lie*.

Hay un tensor B en P , asignando a cada $z \in P$ un mapa lineal $B(z) : T_z^*P \rightarrow T_zP$ tal que

$$\{f, g\}(z) = \langle B(z) \cdot \mathbf{d}f(z), \mathbf{d}g(z) \rangle. \quad (30)$$

Aquí \langle, \rangle denota el emparejamiento natural entre vectores y covectores. Debido a la anticonmutatividad $B(z)$ es antisimétrico. Siendo $z^I, I = 1, \dots, M$ coordenadas en P , (30) se convierte en

$$\{f, g\} = B^{IJ} \frac{\partial f}{\partial z^I} \frac{\partial g}{\partial z^J}. \quad (31)$$

Definición. Sea P una variedad y Ω una 2-forma en P . El par (P, Ω) es llamado una *variedad simpléctica* si Ω satisface

1. $\mathbf{d}\Omega = 0$ es decir Ω es cerrado,
2. Ω es no degenerado.

Definición Sea (P, Ω) una variedad simpléctica y sea $f \in \mathcal{F}(P)$. Sea X_f un campo vectorial en P que satisface

$$\Omega_z(X_f(z), v) = \mathbf{d}f(z) \cdot v \quad \forall v \in T_zP. \quad (32)$$

Llamaremos a X_f *el campo vectorial Hamiltoniano* de f . Las ecuaciones de Hamilton son ecuaciones diferenciales sobre P dadas por

$$\dot{z} = X_f(z). \quad (33)$$

De hecho si $(P, \{, \})$ es una *variedad de Poisson*, hay tres maneras equivalentes de escribir las ecuaciones de Hamilton para $H \in \mathcal{F}(P)$:

1. $\dot{z} = X_H(z)$,

2. $\dot{f} = \mathbf{d}f(z) \cdot X_H(z) \quad \forall f \in \mathcal{F}(P)$,
3. $\dot{f} = \{f, H\} \quad \forall f \in \mathcal{F}(P)$.

6. FIBRADOS COTANGENTES

Sea Q una variedad (usualmente llamada espacio de configuraciones en sistemas mecánicos) y T^*Q es su fibrado cotangente. Las coordenadas q^i en Q generan coordenadas (q^i, p_j) sobre T^*Q , llamadas **coordenadas canónicas** de T^*Q .

Proposición: Hay una 1-forma Θ sobre T^*Q tal que cualquier elección de las coordenadas canónicas

$$\Theta = p_i dq_i; \quad (34)$$

Θ es llamada la *1-forma canónica*. Definimos la *2-forma canónica* Ω por

$$\Omega = -\mathbf{d}\Theta = dq^i \wedge dp_i. \quad (35)$$

Proposición: (T^*Q, Ω) es una variedad simplectica. El corchete de Poisson en T^*Q tiene la forma clásica

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (36)$$

Teorema Teorema de Darboux: cada variedad simplectica es localmente como T^*Q ; es decir, sobre cada variedad simplectica finita, hay coordenadas locales en las que Ω tiene la forma (35).

7. MECÁNICA LAGRANGIANA Y HAMILTONIANA

Sea Q una variedad y TQ su fibrado tangente, también llamado *espacio fase de velocidades*. Las coordenadas q^i en Q producen coordenadas (q^i, \dot{q}^i) sobre TQ , llamadas *coordenadas tangentes*. Un mapeo $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado *Lagrangiano*, el cual frecuentemente tiene la forma $L = K - V$ donde $K(v) = \frac{1}{2} \langle \langle v, v \rangle \rangle$ es la energía cinética asociada a una métrica de Riemann $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ y donde $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$ es una función potencial.

Definición: Sea L un lagrangiano en TQ y sea $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ definido (en coordenadas) por

$$(q^i, \dot{q}^j) \mapsto (q^i, p_j)$$

donde $p_j = \partial L / \partial \dot{q}^j$. Llamaremos a $\mathbb{F}L$ el derivado de la fibra. Un Lagrangiano es llamado *hyperregular* si $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo. Si L es un Lagrangiano hyperregular, definimos el correspondiente **Hamiltoniano** por

$$H(q^i, p_j) = p_i \dot{q}^i - L. \quad (37)$$

El cambio de L en TQ a H en T^*Q es llamado *Transformada de Legendre*.

8. POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

8.1. Postulado 1. *Un sistema cuántico aislado está descrito por un vector en un espacio de Hilbert.*

8.2. Postulado 2. Cada variable dinámica le corresponde un operador hermítico.

8.3. Postulado 3. Si \hat{A} y \hat{B} son operadores hermíticos asociados a variables clásicas a y b entonces el conmutador de dichos operadores viene dado por

$$[\hat{A}, \hat{B}] \rightarrow i\hbar\{a, b\}$$

donde $\{a, b\}$ es el corchete de Poisson y $\hbar = h/2\pi$ con h siendo la constante de Planck.

8.4. Postulado 4. Cada acto de medición de un observable \hat{A} de un sistema en el estado $|\psi\rangle$ colapsa el sistema a un eigenestado $|a_i\rangle$ de \hat{A} con amplitud de probabilidad $|\langle a_i|\psi\rangle|^2$.

8.5. Postulado 5. La evolución temporal de un estado $|\psi\rangle$ viene dada por la ecuación de Shrodinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (38)$$

donde \hat{H} es el *Hamiltoniano* el cual es un operador hermítico asociado a la energía del sistema.

9. APLICACIONES

9.1. El espacio de fase en Mecánica Cuántica. En mecánica cuántica, el espín es representado por operadores que actúan en un espacio vectorial de dimensión $2j+1$ \mathcal{C}^{2j+1} , donde $j \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$. Tomando como base orthonormal los vectores $|j, m\rangle$, tal que

$$\hat{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle,$$

$$\hat{J}_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle.$$

En este espacio vectorial \mathcal{C}^{2j+1} tenemos una representación irreducible de $SU(2)$ cuyos elementos de matriz vienen dados por

$$D_{mn}^j(g) = \langle jm | \pi_j(g) | jn \rangle.$$

El espacio de fase es la esfera S^2 , equipada con la forma symplectica $d\phi \wedge \sin\theta d\theta$, lo anterior es debido a que para el grupo $SU(2)$ sus orbitas coadjuntas son esferas y $SU(2)$ actúa en cada orbita por rotaciones de la esfera.

Denotemos puntos de S^2 por $\mathbf{n} = (\theta, \phi)$ en coordenadas esféricas siendo $d\mathbf{n} = \sin\theta d\theta d\phi$ la medida.

9.1.1. Correspondencia de Stratonovich-Weyl. Por una correspondencia de Stratonovich-Weyl para el espín, nos referimos a una regla que asocia a cada operador \hat{A} en el espacio de Hilbert \mathcal{C}^{2j+1} una función W_A en el espacio de fase S^2 (a la cual llamaremos símbolo del operador \hat{A}) que satisface las siguientes propiedades:

1. Linealidad: $\hat{A} \mapsto W_A$ es un mapeo lineal uno a uno.
2. $W_{\hat{A}^\dagger}(\mathbf{n}) = W_A^*(\mathbf{n})$
3. $\frac{2j+1}{4\pi} \int_{S^2} W_A(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = \text{tr} \hat{A}$
4. $\frac{2j+1}{4\pi} \int_{S^2} W_A(\mathbf{n}) W_B(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = \text{Tr} \hat{A} \hat{B}$
5. $W_{g \cdot A} = (W_A)^g \forall g \in SU(2)$, donde $g \cdot A = \pi_j(g) \hat{A} \pi_j^{-1}(g)$.

Por la linealidad podemos decir que

$$W_A(\mathbf{n}) = \text{tr}(\hat{A} \hat{\omega}(\mathbf{n})), \quad (39)$$

donde $\hat{\omega}(\mathbf{n})$ es el operador kernel y que tiene las siguientes propiedades:

1. $\hat{\omega}^\dagger(\mathbf{n}) = \hat{\omega}(\mathbf{n}) \forall \mathbf{n} \in S^2$,
2. $\frac{2j+1}{4\pi} \int_{S^2} \hat{\omega}(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = \mathbb{I}$,
3. $\frac{2j+1}{4\pi} \int_{S^2} \text{tr}(\hat{\omega}(\mathbf{m}) \hat{\omega}(\mathbf{n})) \hat{\omega}(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = \hat{\omega}(\mathbf{m})$,
4. $\hat{\omega}(g \cdot \mathbf{n}) = \pi_j(g) \hat{\omega}(\mathbf{n}) \pi_j^{-1}(g)$.

- Muestre que los elementos de matriz del operador kernel son

$$Z_{mm'}(\mathbf{n}) = \frac{\sqrt{4\pi}}{2j+1} \sum_{l=0}^{2j} \sqrt{2l+1} C_{j,m;l}^{j,m'} Y_{l,m'-m}(\mathbf{n})$$

donde $C_{j,m;l}^{j,m'}$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan y $Y_{l,m}(\mathbf{n})$ son los armónicos esféricos.

Podemos expandir en la base de armónicos esféricos el operador kernel

$$\hat{\omega}(\mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} \hat{T}_{lm}^{j\dagger} Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad (40)$$

donde las matrices \hat{T}_{lm}^j serán llamados operadores tensoriales irreducibles

$$\hat{T}_{lm}^j = \sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}} \sum_{r,s} C_{jr;lm}^{js} |jr\rangle \langle js|$$

Teniendo estas expresiones explícitas podemos obtener símbolos de algunos operadores, por ejemplo obtengamos el símbolo del operador \hat{J}_z

$$\begin{aligned} W_{J_z}(\mathbf{n}) &= \text{Tr}(\hat{\omega}(\mathbf{n}) \hat{J}_z) = \sum_{m=-j}^j \langle jm | \hat{\omega}(\mathbf{n}) | jm \rangle m \\ &= \frac{\sqrt{4\pi}}{2j+1} \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-j}^j \sqrt{2l+1} C_{jm;l0}^{jm} Y_{l,0}(\mathbf{n}) m \\ &= \frac{1}{2j+1} \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-j}^j (2l+1) C_{jm;l0}^{jm} P_l(\cos \theta) m \end{aligned}$$

haciendo uso del siguiente Clebsch-Gordan $C_{jm;l0}^{jm} = \frac{3m}{(2j+1)\sqrt{j(j+1)}}$

$$\begin{aligned} W_{J_z}(\mathbf{n}) &= \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-j}^j (2l+1) C_{jm;l0}^{jm} P_l(\cos \theta) \sqrt{j(j+1)} C_{jm;l0}^{jm} \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{j(j+1)} 3P_1(\cos \theta) \right) \\ &= \sqrt{j(j+1)} \cos \theta. \end{aligned}$$

9.1.2. Ejercicios.

- Obtenga los símbolos para los operadores $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_\pm$

9.2. Estados Coherentes. Consideremos la dinámica de un sistema cuántico arbitrario. En general, el Hamiltoniano \hat{H} y los operadores \hat{A} del sistema pueden ser expresados en términos de un conjunto completo de operadores $\{T_i\} = \mathfrak{g}$,

$$\hat{H} = \hat{H}(T_i), \quad \hat{A} = \hat{A}(T_i),$$

donde los completos de un conjunto de operadores $\{T_i\} = \mathfrak{g}$ generan un álgebra cerrada. En muchas ocasiones, el Hamiltoniano puede ser expresado siguiendo una forma lineal y cuadrática por los operadores

$$\hat{H} = \sum_i c_i \hat{T}_i + \sum_{i,j} c_{i,j} \hat{T}_i \hat{T}_j. \quad (41)$$

Ahora definiremos la construcción general de estados coherentes

1. El grupo dinámico G con su álgebra \mathfrak{g} .

El álgebra \mathfrak{g} está determinada por las propiedades algebraicas del operador de un sistema cuántico. En este caso el álgebra \mathfrak{g} es generada por los operadores \hat{T}_i bajo las relaciones de conmutación:

$$\{\hat{T}_i, \hat{T}_j\} = C_{ij}^k \hat{T}_k,$$

donde C_{ij}^k son las constantes de estructura de \mathfrak{g} .

2. El espacio de Hilbert \mathcal{H}^Λ

Dado el Hamiltoniano (41), el espacio de estados físicos (el espacio de Hilbert \mathcal{H}^Λ) lleva una representación unitaria irreducible Γ^Λ del grupo G .

3. Estado de Referencia.

Este estado $|\Phi_0\rangle$ que vive en el espacio de Hilbert \mathcal{H}^Λ , está normalizado. La elección de este estado es arbitraria, sin embargo la construcción de un sistema de estados coherentes depende fuertemente de la elección de dicho estado, ya que no solamente determinará la estructura de dichos estados si no que también la estructura del espacio de fase del sistema dinámico.

4. **Subgrupo de máxima estabilidad.**

Sea H un subgrupo de G que consiste de todos los elementos h que dejan invariante hasta un factor de fase el estado de referencia

$$h|\Phi_0\rangle = |\Phi_0\rangle e^{i\phi(h)}, \quad h \in H. \quad (42)$$

Si G es semisimple entonces $|\Phi_0\rangle$ será el estado de peso más alto (bajo) de Γ^Λ .

5. Espacio Cociente G/H

Para cada elemento $g \in G$, existe una descomposición unica de g en un producto de dos elementos del grupo, una en H y otra en el cociente G/H

$$g = \Omega h, \quad g \in G, \quad h \in H, \quad \Omega \in G/H.$$

6. Estados Coherentes

La acción de un elemento del grupo sobre el estado de referencia es

$$g|\Phi_0\rangle = \Omega|\Phi_0\rangle e^{i\phi(h)}.$$

Identificamos el producto

$$\Omega|\Phi_0\rangle = |\Lambda, \Omega\rangle,$$

como la definición de *estados coherentes del grupo*. Estos estados están en correspondencia 1 a 1 con el espacio cociente

$$|\Lambda, \Omega\rangle \longleftrightarrow G/H.$$

Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie semisimple es conveniente trabsformar \hat{T}_i en la base de Cartan $\{\hat{L}_i, \hat{L}_\alpha, \hat{L}_{-\alpha}\}$:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_\alpha] = \alpha_i \hat{L}_\alpha,$$

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_{-\alpha}] = \alpha^i \hat{L}_i.$$

Los operadores \hat{L}_i pueden ser tomados diagonales en la representación unitaria irreducible Γ^Λ , mientras que los operadores \hat{L}_α son operadores de escalera, de tal manera que sí $\Gamma^\Lambda(g)$ es hermitico entonces $\hat{L}_i^\dagger = \hat{L}_i$ y $\hat{L}_\alpha^\dagger = \hat{L}_{-\alpha}$.

Si el estado de referencia se elige como $|\Lambda, \Lambda\rangle$ el estado de peso máximo de la representación unitaria irreducible del grupo de Lie G ,

$$\hat{L}_\alpha|\Lambda, \Lambda\rangle = 0.$$

Con esta elección el, tanto los estados coherentes como el espacio cociente se construyen vía el mapeo exponencial de los operadores de escalera actuando sobre el estado de referencia antes mencionado.

$$\Omega = \exp\left(\sum_{\beta} \eta_{\beta} \hat{L}_{\beta} - \text{h.c.}\right). \quad (43)$$

9.2.1. *Estados Coherentes SU(2)*. Consideremos los los generadores J_k que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[J_1, J_2] = i\hbar J_3.$$

Los operadores de acenso y descenso son

$$J_{\pm} = J_1 \pm i J_2,$$

que obedecen las relaciones de conmutación

$$[J_3, J_{\pm}] = J_{\pm}, [J_+, J_-] = 2J_3.$$

Las representaciones son caracterizadas por los eigenvalores del casimir y el operador J_3 actuando sobre la base $\{|j, m\rangle, |m| \leq j\}$. Cada elemento de esta representación puede ser creado a partir del *vector de menor peso* $|j, -j\rangle$, por una aplicación repetida del operador de acenso;

$$|j, m\rangle = \frac{1}{(j+m)!} \left(\frac{2j}{j+m} \right)^{-1/2} J_+^{j+m} |j, -j\rangle$$

con $m = -j \sim j$. El *estado más bajo* juega el rol de *estado de vacío*, es decir

$$J_- |j, -j\rangle = 0.$$

Ahora consideremos el operador de rotación que genera rotación por un ángulo θ alrededor de un eje dado por el coseno director $\vec{n} = (\sin \phi, -\cos \phi, 0)$

$$T(\theta, \phi) = \exp(-i\theta J_n) = \exp(-i\theta(J_1 \sin \phi - J_2 \cos \phi)),$$

que puede ser reescrito como

$$T(\xi) = \exp(\xi J_+ - \xi^* J_-),$$

usando el parametro complejo

$$\xi = \frac{1}{2} \theta e^{-i\phi}.$$

9.2.2. *Ejercicio*. Siendo $J_n = J_1 \sin \phi - J_2 \cos \phi$ y $J_t = J_1 \cos \phi + J_2 \sin \phi$, obtenga las siguientes transformaciones

- $T(\theta, \phi) J_n T^{-1}(\theta, \phi)$
- $T(\theta, \phi) J_t T^{-1}(\theta, \phi)$
- $T(\theta, \phi) J_z T^{-1}(\theta, \phi)$
- $T(\theta, \phi) J_- T^{-1}(\theta, \phi)$

$$\blacksquare T(\theta, \phi)J_+T^{-1}(\theta, \phi)$$

Entonces los *estados coherentes de SU(2)* se obtienen aplicando el operador $T(\xi)$ sobre el vacío:

$$|\theta, \phi\rangle = T(\theta, \phi)|j, -j\rangle. \quad (44)$$

9.3. Ejercicios.

- Obtenga la forma desenlazada del operador

$$T(\theta, \phi) = \exp(z\hat{J}_+)\exp(\text{Log}(1+|z|^2)\hat{J}_3)\exp(-z^*\hat{J}_-)$$

$$\text{con } z = \frac{\xi}{|\xi|} \tan|\xi|$$

- Obtenga explícitamente la acción del operador desenlazado sobre el vector de peso mínimo $T(\theta, \phi)|j, -j\rangle$

Los estados coherentes forman una base sobre completa

$$\frac{2j+1}{4\pi} \int_{S^2} d\mathbf{n} |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi| = \mathbb{I}$$

9.3.1. *Símbolos de Berezin.* Berezin introdujo símbolos para funciones sobre la esfera expandiendo un operador \hat{A} en el espacio de Hilbert en términos de estados coherentes. Esto puede ser realizado de dos maneras, la primera llamada símbolos covariantes (Q-símbolos) y símbolos contravariantes (P-símbolos). Las definiciones son

$$Q_A(\mathbf{n}) = \langle \theta, \phi | \hat{A} | \theta, \phi \rangle, \quad (45)$$

$$\hat{A} = \frac{2J+1}{4\pi} \int_{S^2} P_A(\mathbf{n}) |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi| d\mathbf{n}. \quad (46)$$

9.3.2. *D-álgebra.* La D-álgebra es un mapeo de los observables cuánticos a una forma diferencial tal que actúan como operadores diferenciales en el espacio cociente, para el caso de $SU(2)$ la forma explícitas son:

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi| = D_{J_+} |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi| = e^{i\phi} \left(j \sin \theta + \cos^2 \frac{\theta}{2} \partial_\theta + \right. \\ \left. \frac{i}{2} \cot \frac{\theta}{2} \partial_\phi \right) |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi|, \end{aligned}$$

$$\hat{J}_-|\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi| = D_{J_-}|\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi| = e^{-i\phi} \left(j \sin \theta - \sin^2 \frac{\theta}{2} \partial_\theta - \frac{i}{2} \tan \frac{\theta}{2} \partial_\phi \right) |\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi|.$$

$$\hat{J}_0|\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi| = D_{J_0}|\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi| = \left(-j \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \partial_\theta + \frac{i}{2} \partial_\phi \right) |\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi|,$$

y

$$|\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi| \hat{J}_- = D_{J_+}^* |\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi|,$$

$$|\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi| \hat{J}_+ = D_{J_-}^* |\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi|,$$

$$|\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi| \hat{J}_0 = D_{J_0}^* |\theta, \phi\rangle\langle\theta, \phi|.$$

10. APLICACIONES A MODELOS EN ÓPTICA CUÁNTICA

Mencionaremos solo algunos ejemplos tratados en óptica cuántica y analizaremos su comportamiento dinámico en el espacio de fase.

10.1. El medio Kerr. Uno de los modelos no lineales más simples que aquí analizaremos es la generación de compresión de espín mediante el uso del Hamiltoniano de torsión de un eje. Este modelo es útil para generar estados comprimidos. Dicho sistema viene dado por el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \chi \hat{J}_x^2, \quad (47)$$

que es un operador de $SU(2)$, no lineal con constante de acoplamiento χ . Dado que la torsión se realiza a lo largo del eje x , elegimos el estado inicial a un estado coherente a lo largo del eje z

$$|\psi(0)\rangle = |j, -j\rangle. \quad (48)$$

10.2. Desarrollo en el espacio de Hilbert. En los postulados de la Mecánica Cuántica se mencionó que la evolución temporal de un estado viene dada por la ecuación de Shrodinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (49)$$

Como el sistema en cuestión es tiempo-independiente, la solución a la ecuación de Shrodinger es

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-i(t-t_0)\hat{H}) |\psi(0)\rangle, \quad (50)$$

donde t_0 es el tiempo inicial y hemos hecho $\hbar = 1$ para trabajar adimensionalmente. Entonces

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-it\chi \hat{J}_x^2) |j, -j\rangle$$

10.2.1. *Ejercicio.* :

- Aplique el operador exponencial y obtenga una expresión analítica para el vector evolucionado.
- Obtenga el operador de densidad $\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$.

10.3. Mapeo al espacio de fase. Una vez que se ha obtenido el operador que contiene la información dinámica del sistema $\hat{\rho}(t)$, debemos mapearlo a el espacio de fase correspondiente. Para esto se debe usar el kernel $\hat{\omega}(\mathbf{n})$ y obtener el símbolo del operador correspondiente.

10.3.1. *Ejercicio.*

- Obtenga el Q-símbolo y el W-símbolo símbolo del operador \hat{H} .
- Obtenga Q-símbolo y el W-símbolo del operador $\hat{\rho}(t)$.
- Discuta las diferencias dinámicas entre el mapeo dinámico con la Q-función y la W -función.

REFERENCIAS

- [1] Puri, Ravinder Rupchand. *Mathematical methods of quantum optics*. Vol. 79. Berlin: Springer, 2001.
- [2] Klimov, Andrei B., and Sergei M. Chumakov. *A group-theoretical approach to quantum optics: models of atom-field interactions*. John Wiley & Sons, 2009.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN 1421, ESQ CALZADA OLÍMPICA, C.P. 44430, GUADALAJARA, JALISCO, MÉXICO.

E-mail address: `ivan.valtierra@academicos.udg.mx`

E-mail address: `andres.gsandoval@academicos.udg.mx`

E-mail address: `vladimir.macias@academicos.udg.mx`

E-mail address: `juan.diaz1559@academicos.udg.mx`

EL CAMPO DE FUNCIONES MEROMORFAS SOBRE SUPERFICIES DE RIEMANN

MIRIAM BOCARDO GASPAR, DIEGO RODRÍGUEZ GUZMÁN, ANGEL ZALDÍVAR CORICHI

RESUMEN. Este texto pretende bosquejar la idea de que hay una biyección entre las superficies de Riemann y las extensiones algebraicas del campo de funciones racionales $\mathbb{C}(z)$. Para esto observaremos la convergencia de el Análisis Complejo, la Geometría Analítica en el Plano Proyectivo Complejo y la Teoría de Campos.

A Mario A. Díaz Torres, cuya pasión por las matemáticas dejó una huella imborrable en la ciencia mexicana y en quien tuvo la suerte de conocerle.

1. INTRODUCCIÓN

En la tesis doctoral "Fundamentos para la teoría general de funciones en variable compleja" de Riemann (1851), uno de los problemas que trata es el de calcular las integrales sobre caminos en la línea compleja \mathbb{C} . El problema análogo en la línea real encuentra su solución con el teorema fundamental del cálculo. Pero el caso complejo considera unos dominios Ω en \mathbb{C} con topología más rica que la de un intervalo, pues pueden existir caminos cerrados en Ω que no se pueden contraer a un punto dentro de Ω . De este fenómeno topológico aparece naturalmente las funciones multivaluadas complejas, como son bien conocidas la función logaritmo o raíz n -ésima con dominio \mathbb{C}^* .

Consideremos que F es una función multivaluada con dominio Ω . Para este tipo de funciones, Riemann en su tesis propone extraer curvas $\{\gamma_j\}$ de Ω para obtener un dominio $\Omega_1 = \Omega - \{\gamma_j\}_{j=1}^k$, y con esto construir un dominio X mediante el pegado continuo de varias copias de Ω_1 a través de los cortes γ_j . En este nuevo dominio X , F

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30F20, 30F10, 14H05.

Palabras Claves. Campos Algebraicos. Superficies de Riemann. Cubrientes Ramificados.

sí es una función complejo valuada. Así nacen lo que conocemos como Superficies de Riemann.

Entonces una pregunta natural es: ¿Qué puedo decir las funciones holomorfas sobre las superficies de Riemann?

En este sentido los primeros dominios que pasan por las manos de Riemann son \mathbb{C} menos un conjunto finito de puntos $\{z_j\}$ y funciones multivaluadas F definidas a través de integrales Abelianas sobre curvas $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{z_j\}$, con $\gamma_z(0) = z_0$ y $\gamma_z(1) = z$. Entonces la definición de F es

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{P(z, w)}{Q(z, w)} dz,$$

con $P(z, w), Q(z, w)$ polinomios, donde las variables z, w satisfacen la relación $R(z, w) = 0$, $R(z, w) \in \mathbb{C}(z)[w]$ y las indefiniciones de de la función racional P/Q están contenidos en $\{z_j\}$.

La superficie de Riemann X que resulta de este proceso extiende a la función multivaluada F en la función \tilde{F} con contradominio $\mathbb{C} \cup \infty$, la cual es conocida como función meromorfa sobre X . Otra cosa que prueba Riemann [10], es que si construyes un superficie de Riemann X con el proceso de corte y pegado siempre existen funciones meromorfas no constantes sobre ella. Esta afirmación es la primera versión del teorema de existencia de Riemann, pero resulta que el conjunto $\mathcal{M}(X)$ de funciones meromorfas sobre X es un campo algebraico. Esta idea induce a otro enunicado que también es conocido como teorema de existencia de Rieman, que dice:

Teorema 1.1 (Existencia de Riemann). *Sea $\mathcal{M}(X)$ el campo de funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann compacta X . Entonces, $\mathcal{M}(X)$ es una extensión algebraica de $\mathbb{C}(z)$. Más aún, la correspondencia entre los conjuntos*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Superficies de Riemann} \\ \text{compactas conexas} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Extensiones algebraicas} \\ \text{del campo } \mathbb{C}(z) \end{array} \right\}, \quad (1)$$

es biunívoca.

En estas notas nos interesa estudiar y entender esta versión del teorema de existencia de Riemann, pero como muchas cosas que salieron de la cabeza de Riemann este tiene versiones mucho más generales. Dichas versiones valen unas notas a parte solo para enunciarlas correctamente, pero si tienes curiosidad busca a tu geometra algebraico de confianza y preguntale.

Estas notas están escritas para un curso de verano de nivel licenciatura impartido en la Universidad de Guadalajara, es por esto que la sección 2 está dedicada a retomar los

conceptos de un curso de Análisis complejo al contexto de Superficies de Riemann. En la sección 3 trabajamos con el teorema de Riemann-Hurwitz que estudia las relaciones topológicas que surgen al estudiar las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann. Para la sección 4 enunciamos una versión particular del teorema 1.1, pero manejable con lo presentado en las secciones anteriores. Y con esto hablamos un poco de teoría de Galois a través de ejemplos.

Los autores esperamos que sean de su interés estas notas preparadas desde la perla tapatía.

2. SUPERFICIES DE RIEMANN

Una *superficie de Riemann* es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y conexo, junto con una colección de homeomorfismos locales, llamados cartas complejas, $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, donde U_α y V_α son abiertos de X y \mathbb{C} , respectivamente. Tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$$

y para cualquier par de cartas de \mathcal{A} , $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ y $\phi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$, se tiene que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces,

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es biholomorfismo.

La colección \mathcal{A} se conoce como el *atlas complejo sobre X* y por simplificar la notación lo denotaremos con $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Notemos que si $Y \subseteq X$ es un conjunto abierto conexo, entonces la colección

$$\mathcal{A}_Y = \{\phi_\alpha : Y \cap U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(Y \cap U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$$

es un atlas complejo sobre Y .

Un espacio topológico puede tener distintos atlas complejos y dos atlas generarán las mismas nociones locales de análisis complejo si su unión es nuevamente un atlas, es decir, son atlas compatibles. Esto define una relación de equivalencia entre ellos, donde cada clase de equivalencia contiene un atlas maximal. Lo que define una estructura compleja para cada clase de equivalencia de atlas.

El ejemplo básico de superficie de Riemann es el espacio de números complejos \mathbb{C} , conocida como la *línea compleja*. Con la topología inducida por \mathbb{R}^2 en \mathbb{C} y con el atlas dado por la carta (\mathbb{C}, id) , donde id es la función identidad, obtenemos su estructura compleja.

Ejercicio 2.1. Demuestra que el par $\{(\mathbb{C}, \phi)\}$, donde $\phi(z) = \bar{z}$ es la conjugación compleja, es un atlas para la línea compleja. ¿Este atlas es compatible con el de la línea compleja?

Ejemplo 2.2. Considera el subconjunto

$$X := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\},$$

donde $P(z, w)$ es un polinomio en $\mathbb{C}[z, w]$. Si cero es un valor regular de P , entonces el gradiente $\nabla P(z, w) = (\partial_z P, \partial_w P)$ es no nulo para todo punto $p_0 = (z_0, w_0)$ en X . Supongamos que $\partial_w P(p_0) \neq 0$, entonces el *Teorema de la Función Implícita* asegura la existencia de una vecindad abierta U_0 de z_0 y una función $\xi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $P(z, \xi(z)) = 0$. Esto nos da una parametrización local de X

$$\begin{aligned} \rho_0 : U_0 &\rightarrow X \\ z &\mapsto (z, \xi(z)). \end{aligned}$$

La proyección en la primera coordenada $\text{pr}_1(z, w) = z$ es su inversa, es decir, $\text{pr}_1 \circ \rho_0 = Id$ en U_0 . Entonces $\phi_0 = \text{pr}_1|_{\rho_0(U_0)}$ es una carta de X en una vecindad de p_0 . En cada punto p de X , es suficiente demostrar que $\partial_z P(p) \neq 0$ ó $\partial_w P(p) \neq 0$ para construir una carta y los cambios de carta por construcción son biholomorfos. Entonces, cada componente conexa X_j de X es una superficie de Riemann.

Ejercicio 2.3. Prueba que para todo polinomio $P(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ de grado n existe un cambio de variable lineal $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, tal que

$$P \circ T(z, w) = w^n + a_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + a_1(z)w + a_0(z), \quad (2)$$

donde $a_j \in \mathbb{C}[z]$ y el grado de a_j es menor igual a $n - j$.

2.1. La esfera de Riemann. Sea X un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto, no compacto e ∞ un punto que no está en X . Entonces, $\widehat{X} := X \cup \{\infty\}$ es un espacio topológico con la siguiente topología: los conjuntos abiertos son los elementos de la topología de X y las uniones de conjuntos $V \cup \{\infty\}$ donde $X \setminus V$ es compacto. Con esta topología \widehat{X} es compacto y se le conoce como la *compactificación de X en el punto ∞* .

Ejercicio 2.4. Demuestra las siguientes afirmaciones.

- a) El espacio \widehat{X} es compacto y Hausdorff.
- b) El espacio X es abierto y denso en \widehat{X} .
- c) La compactificación en un punto de un espacio segundo numerable es segundo numerable.
- d) Si X es conexo, entonces la compactificación de X en un punto es conexo.

Dado que \mathbb{C} es localmente compacto, Hausdorff, conexo y segundo numerable, podemos construir su compactificación $\widehat{\mathbb{C}}$ en ∞ , llamada *plano extendido*. Definiremos un atlas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ con los abiertos $U_0 := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ y $U_\infty := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Definamos $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\phi_0(z) = z$ y $\phi_\infty : U_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ definido como

$$\phi_\infty(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \in U_\infty \setminus \{\infty\}, \\ 0 & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Puesto que ϕ_0 es la identidad, entonces es un homeomorfismo. Sea $B(r, 0)$ una bola alrededor de 0 en \mathbb{C} . La imagen del abierto $\{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{B}(\frac{1}{r}, 0))$ bajo ϕ_∞ está en $B(r, 0)$, por lo tanto ϕ_∞ es continua en ∞ . Además, su inversa ϕ_∞^{-1} está definida por

$$\phi_\infty^{-1}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w} & \text{si } w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ \infty & \text{si } w = 0. \end{cases}$$

Demostremos que ϕ_∞^{-1} es continua en 0. Sea $\{\infty\} \cup V$ una vecindad de ∞ . Como $\mathbb{C} \setminus V$ es compacto, entonces es acotado en \mathbb{C} . Por lo que existe un número real $r > 0$ tal que $\mathbb{C} \setminus V \subseteq B(r, 0)$. Entonces,

$$\phi_\infty^{-1}\left(B\left(\frac{1}{r}, 0\right)\right) \subseteq \mathbb{C} \setminus B(r, 0) \cup \{\infty\} \subseteq \{\infty\} \cup V.$$

Así, ϕ_∞ es un homeomorfismo y

$$\phi_0 \circ \phi_\infty^{-1}|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

dado por $w \mapsto 1/w$, es un biholomorfismo. Por lo tanto, $\{(U_0, \phi_0), (U_\infty, \phi_\infty)\}$ es un atlas para $\widehat{\mathbb{C}}$. El plano extendido con este atlas es una superficie de Riemann que es homeomorfa a la esfera \mathbb{S}^2 , por lo que también es conocido como la *esfera de Riemann*.

Por otra parte, recordemos que la esfera de Riemann también se puede definir como la recta proyectiva compleja $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, definida como el cociente del plano complejo menos el origen $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ con la relación de equivalencia:

$$(z_1, w_1) \sim (z_2, w_2) \quad \text{si y sólo si} \quad (z_1, w_1) = \lambda(z_2, w_2) \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - 0.$$

Denotamos por $[z : w]$ a la clase de equivalencia de $(z, w) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$. Al considerar la carta afín $[z : 1] \mapsto z$ como la carta (U_0, ϕ_0) y $[1 : w] \mapsto w$ como la carta (U_∞, ϕ_∞) , obtenemos los mismos cambios de coordenadas

$$\phi_0 \circ \phi_\infty^{-1}([1 : w]) = [1/w : 1], \quad \phi_\infty \circ \phi_0^{-1}([z : 1]) = [1 : 1/z],$$

tenemos una compatibilidad con el atlas de $\widehat{\mathbb{C}}$.

2.2. Aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann. Sean X y Y dos superficies de Riemann. Una aplicación holomorfa entre X e Y es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que para cada punto $x \in X$, la composición

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$$

es holomorfa para cualesquier par de cartas $(U, \phi), (V, \psi)$ tales que $x \in U$ y $f(x) \in V$.

Por ejemplo, la identidad $id : X \rightarrow X$ es una aplicación holomorfa.

Ejercicio 2.5. Sean X e Y dos superficies de Riemann. Demuestra que cualquier aplicación holomorfa $f : X \rightarrow Y$ es continua.

Proposición 2.6. *La composición de aplicaciones holomorfas es holomorfa.*

Demostración. Sean X, Y, Z Superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ aplicaciones holomorfas. Sean $x \in X$ y $(U, \phi), (V, \psi), (W, \rho)$ cartas de X, Y, Z , respectivamente, tal que $x \in U, f(x) \in V$ y $g(f(x)) \in W$. Consideremos

$$\rho \circ (f \circ g) \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap (g \circ f)^{-1}(W)) \rightarrow \rho(W)$$

y notemos que $\rho \circ (f \circ g) \circ \phi^{-1} = (\rho \circ f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ g \circ \phi^{-1})$ es composición de dos funciones holomorfas, por lo tanto $g \circ f$ es holomorfa. \square

Si una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann tiene función inversa holomorfa decimos que es un *biholomorfismo*.

Ejercicio 2.7. Desarrolla la prueba de que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es biholomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$, usando los atlas definidos en la sección anterior.

Una *función holomorfa* f sobre una superficie de Riemann X es una aplicación holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. El conjunto de todas las funciones holomorfas sobre X se denota con $\mathcal{O}(X)$ y tiene estructura de anillo conmutativo con uno con las operaciones

$$(f + g)(p) := f(p) + g(p), \quad (fg)(p) := f(p)g(p),$$

para cualesquiera $f, g \in \mathcal{O}(X)$ y $p \in X$.

Ejercicio 2.8. Sea $X \subset \mathbb{C}^2$ como en el Ejemplo 2.2. Sea $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa, prueba que la restricción de F en cualquier componente conexa X_j de X está en $\mathcal{O}(X_j)$.

Además, toda aplicación holomorfa $f : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann induce un homomorfismo entre los anillos $\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)$ definido como

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{O}(Y) &\rightarrow \mathcal{O}(X) \\ f^*(g) &:= g \circ f, \end{aligned}$$

y está bien definida por la Proposición 2.6.

Como las funciones constantes también son funciones holomorfas, el anillo $\mathcal{O}(X)$ contiene a \mathbb{C} como sub-anillo. Por lo tanto, $\mathcal{O}(X)$ es una \mathbb{C} -álgebra con producto escalar inducido por el producto de funciones holomorfas.

Teorema 2.9. (*Teorema de la aplicación abierta*) Sean X, Y superficies de Riemann y $U \subset X$ un abierto. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante. Entonces $f(U)$ es abierto.

Demostración. Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta de X , y (ψ, U') una carta de Y tal que $f(U) \subseteq U'$. Consideremos $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C}$ y que f es no constante, el teorema de la función abierta en \mathbb{C} implica que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es abierta. Así, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(V) = W$ es abierto. Además, como ψ, ϕ son homeomorfismos, entonces $f(U) = (f \circ \phi^{-1})(V) = \psi^{-1}(W)$ es abierto. \square

Teorema 2.10. Sean X e Y superficies de Riemann y sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones holomorfas tal que $f|_A = g|_A$ donde A es un subconjunto de X que tiene un punto de acumulación $x_0 \in X$. Entonces $f = g$.

Demostración. Sea

$$B := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

Sean (U, ϕ) y (V, ψ) dos cartas de x_0 y $f(x_0)$, respectivamente. Dado que $f|_A = g|_A$, entonces, $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ y $G = \psi \circ g \circ \phi^{-1}$ coinciden sobre $\phi(A \cap U)$. El punto $\phi(x_0)$ es de acumulación del conjunto $\phi(A \cap U)$ por continuidad. Como F y G son funciones holomorfas en un dominio de \mathbb{C} , entonces por el teorema de la identidad sobre los complejos se tiene que $F = G$ sobre $\phi(U)$. Así

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \phi^{-1}(\phi(x)) &= \psi \circ g \circ \phi^{-1}(\phi(x)) \\ \psi \circ f(x) &= \psi \circ g(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in U$. Esto implica que $x_0 \in U \subset B$. Como X es conexa por trayectorias, para cualquier punto $q \in B$ existe un camino continuo $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $x_0 = \gamma(0)$ y $\gamma(1) = q$. Entonces vamos construyendo una cubierta abierta de $\gamma([0, 1])$ de la siguiente manera pensemos que $x_1 \in \partial(U) \cap \gamma([0, 1])$. Por la continuidad de f y g y dado que $f|_U = g|_U$, entonces análogo a lo hecho para x_0 existe una vecindad abierta $U(x_1) \subset X$ contenida en B . Consideramos $U_1 = U(x_1) \cup U$, y aplicamos el mismo argumento con $x_2 \in \partial U_1 \cap \gamma([0, 1])$. Por la compacidad de $\gamma([0, 1])$ este proceso es finito. Luego, B es conexo por trayectoria y abierto.

Si tomas x cualquier punto de acumulación de B , estas en las mismas condiciones que x_0 . Entonces $\partial(B) \subseteq B$, es decir, B es cerrado. Dado que X es conexo y $B \neq \emptyset$, tenemos que $B = X$ y se sigue el resultado. \square

Dada una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(X)$ se puede definir su función módulo

$$\begin{aligned} |f| : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ |f|(x) &:= |f(x)|, \end{aligned}$$

donde $|\cdot|$ denota el módulo complejo.

Teorema 2.11. *Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante. Entonces $|f|$ no alcanza su máximo en X .*

Demostración. Supongamos que $|f|$ alcanza su máximo en X . Entonces existe x_0 en X tal que $|f(x)| \leq |f(x_0)|$, para todo $x \in X$. Así, $f(X) \subseteq \overline{B(0, |f(x_0)|)}$. Por el Teorema 2.9, la imagen $f(X)$ es abierta por lo que $f(X) \subseteq B(0, |f(x_0)|)$. Esto implica que $|f(x_0)| < |f(x_0)|$, lo cual es una contradicción. \square

Corolario 2.12. *Sea X una superficie de Riemann compacta y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces f es constante.*

Demostración. Como f es holomorfa, entonces $|f|$ es continua. Por hipótesis X es un espacio compacto, por lo tanto $|f|$ alcanza su máximo en X . El Teorema 2.11, implica que f es constante. \square

En particular, las únicas funciones holomorfas sobre la esfera de Riemann son las funciones constantes.

2.3. Singularidades de funciones. Sea X una superficie de Riemann y $p \in X$. Una *vecindad perforada de p* es un conjunto $U - \{p\}$ donde U es una vecindad de p .

Definición 2.13. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa sobre una vecindad perforada de $p \in X$. Decimos que f tiene una:

- **Singularidad removible** en p si y sólo si existe una carta (V, ϕ) con $p \in V$ y $\phi(p) = q$, tal que $f \circ \phi^{-1}$ es acotada en $\phi(V) - \{q\}$.
- **Polo** en p si y sólo si existen natural $N > 0$, una carta (V, ϕ) con $p \in V$ y $\phi(p) = q$, tal que

$$(z - q)^N f \circ \phi^{-1}(z) = g(z),$$

con g una función holomorfa y $g(q) \neq 0$. El natural N es el *orden* de p como polo de f .

- **Cero** en p si y sólo si existen natural $N > 0$, una carta (V, ϕ) con $p \in V$ y $\phi(p) = q$, tal que

$$f \circ \phi^{-1}(z) = (z - q)^N g(z),$$

con g una función holomorfa y $g(q) \neq 0$. El natural N es el *orden* de p como cero de f .

- **Esencial** en p si y sólo si existe una carta (V, ϕ) con $p \in V$ y $\phi(p) = q$, tal que $f \circ \phi^{-1}(\phi(V) - \{q\})$ es un conjunto denso en \mathbb{C} .

Teorema 2.14 (Teorema de las singularidades removibles de Riemann). *Sean X una superficie de Riemann, $U \subset X$ un abierto y $p \in U$. Si f es una función holomorfa en un abierto perforado $U - \{p\}$ y acotada en una vecindad de p , entonces f se puede extender de manera única a una función holomorfa \hat{f} en U .*

Demostración. Se deja al lector. □

Corolario 2.15 (Teorema de Liouville). *Toda función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ acotada y holomorfa es constante.*

Demostración. Consideremos $f : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$. Por hipótesis f es holomorfa y acotada en la vecindad perforada $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$, entonces por el Teorema 2.14, f se puede extender a una función holomorfa $\tilde{f} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}|_{\mathbb{C}} = f$. Dado que $\widehat{\mathbb{C}}$ es una superficie compacta, por el Corolario 2.12 sabemos que \tilde{f} es constante y f también. □

Para una aplicación holomorfa $f : Y \rightarrow X$ y un punto $q \in Y$ existen cartas $(\phi_p, V_p), (\psi_q, U_q)$ en $f(q) = p$ y q tal que

$$\phi_p \circ f \circ \psi_q^{-1}(z) = z^n h(z),$$

con $\phi_p^{-1}(0) = p$, $\psi_q(q) = 0$, con $h(0) \neq 0$. Decimos que $q \in Y$ es un *punto de orden* $b_f(q) = n - 1$ de la aplicación f .

Definición 2.16. Sea $f : Y \rightarrow X$ una aplicación holomorfa. Decimos que $q \in Y$ es un punto de ramificación de f si su orden $b_f(q)$ es mayor igual a 1.

Si la función holomorfa $f_n(z) = z^n$ se restringe al círculo unitario $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ su imagen está contenida en el círculo unitario $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Entonces para imaginar la grafica de f_n podemos pensar en ella dentro del toro de revolución, el cuál es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Revolucionando el círculo unitario \mathbb{S}_{YZ}^1 en el plano YZ con centro $(0,2,0)$ obtenemos un toro con centro igual al círculo \mathbb{S}_{XY}^1 de radio 2 y centro en $(0,0,0)$ en el plano XY . La "gráfica" de $f_n : \mathbb{S}_{YZ}^1 \rightarrow \mathbb{S}_{XY}^1$ es un nudo toridal, y al hacer el cono de la gráfica con el origen nos da una idea de cómo se comporta un punto de ramificación de orden $n - 1$.

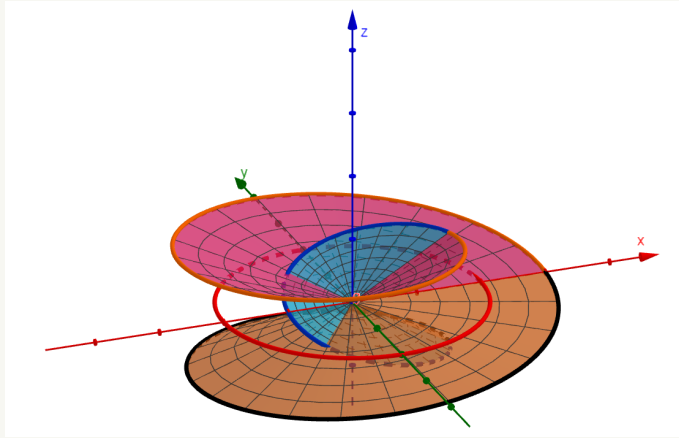


FIGURA 1. Bosquejo de gráfica de $f_3 : \mathbb{S}_{YZ}^1 \rightarrow \mathbb{S}_{XY}^1$, donde \mathbb{S}_{XY}^1 es el círculo rojo y \mathbb{S}_{YZ}^1 está pintado de 3 colores (naranja, azul, negro) para cada tercio que cubre a \mathbb{S}_{XY}^1 . Y la superficie es el cono de esta.

Lema 2.17. Sea $f : Y \rightarrow X$ una aplicación holomorfa no constantes y $\tilde{\Delta}$ el subconjunto de puntos de ramificación de f en Y . Entonces $\tilde{\Delta}$ es un conjunto discreto.

Demostración. Supongamos que $\tilde{\Delta}$ tiene un punto de acumulación q_0 . Entonces para unas cartas $(\phi_p, V_p), (\psi_{q_0}, U_{q_0})$, con $f(q_0) = p$, tenemos que la función

$$h = \phi_p \circ f \circ \psi_{q_0}^{-1} : \psi_{q_0}(U_{q_0}) \rightarrow \phi_p(V_p)$$

es ramificada y que hay una sucesión de puntos de ramificación $\{z_m\} \subset \psi_{q_0}(U_{q_0})$ que se acumulan en $\psi_{q_0}(q_0)$. Como la derivada de h en cada punto z_m es cero, el Teorema 2.10 implica que h' es la constante cero. Por lo tanto, la función h es constante y el Teorema 2.10 nos dice que f es constante. Contradicción, por lo que $\tilde{\Delta}$ es un conjunto discreto. \square

2.4. Funciones meromorfas sobre superficies de Riemann. Sean X una superficie de Riemann $U \subset X$. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es *meromorfa*, si en cada punto $p \in X$ la función f es holomorfa en p , o p es un polo o una singularidad removible. El *conjunto de funciones meromorfas* sobre X será denotado por $\mathcal{M}(X)$. Denotaremos al conjunto de polos de una función meromorfa f como P_f y al conjunto de ceros con Z_f .

Teorema 2.18 ([11]). *Sea X una superficie de Riemann y $f \in \mathcal{M}(X)$. Si definimos $\tilde{f} : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ como*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin P_f, \\ \infty & \text{si } x \in P_f. \end{cases}$$

Entonces \tilde{f} es una aplicación holomorfa que extiende a f . Inversamente, se demuestra que una aplicación holomorfa $\tilde{f} : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ no idénticamente ∞ define una función meromorfa f sobre X , donde P_f es el conjunto de puntos con imagen infinita.

Demostración. Se deja la prueba al lector. \square

Teorema 2.19 (Teorema de la identidad para funciones meromorfas). *Sea X una superficie de Riemann y sean f, g funciones meromorfas en X .*

- i) *Si $f|_A = g|_A$, donde $A \subset X$ tiene un punto de acumulación. Entonces $f = g$.*
- ii) *Si f no es idénticamente 0 o idénticamente ∞ , entonces f solo tiene ceros y polos aislados.*

Demostración. i) Dado que las funciones $g, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfas definen funciones holomorfas $\tilde{g}, \tilde{f} : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, y el Teorema 2.10 nos dice que $\tilde{f} = \tilde{g}$ y por lo tanto $f = g$.

ii) Supongamos que el conjunto Z_f no es discreto, esto significa que tiene un punto de acumulación y

$$f|_{Z_f} = \mathbf{0}|_{Z_f}.$$

El inciso i) implica que $f \equiv \mathbf{0}$, contradiciendo la suposición. Análogamente, P_f es discreto. \square

Corolario 2.20. *Sea X una superficie de Riemann compacta, y $f \in \mathcal{M}(X)$ no constante. Entonces los conjuntos de ceros y polos de f son finitos.*

Demostración. Ejercicio para el lector. \square

Análogo al caso de las funciones holomorfas, podemos definir una estructura de anillo sobre $\mathcal{M}(X)$ con la suma y producto puntual sobre el dominio. Para cada punto en el conjunto de polos se usa las respectivas expresiones locales (Definición 2.13) para verificar que la multiplicación y la suma de funciones es meromorfa.

Corolario 2.21. *Si X es una superficie de Riemann, el anillo $\mathcal{M}(X)$ es un campo.*

Demostración. Basta probar que toda función meromorfa no constante tiene inverso multiplicativo. Sea $f \in \mathcal{M}(X)$ no constante. Por el inciso ii) del Teorema 2.19 los ceros de f son puntos aislados. Definamos $1/f : X \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)}, & \text{si } x \notin Z_f, \\ \infty, & \text{si } x \in Z_f. \end{cases}$$

La función se extiende a una aplicación holomorfa de X en $\widehat{\mathbb{C}}$, donde Z_f es la preimagen de ∞ bajo la aplicación. Entonces, $1/f$ es meromorfa y la función $f \cdot (1/f)$ es la constante 1 en $X - Z_f \cup P_f$ y por el Teorema 2.19 es la función constante 1. \square

Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación holomorfa no constante, entonces podemos definir un homomorfismo inyectivo de campos

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{M}(Y) &\rightarrow \mathcal{M}(X) \\ f^*(g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Notemos que f^* está bien definida porque $g \circ f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es holomorfa y por lo tanto $g \circ f$ es meromorfa sobre X . Dado que f^* es inyectiva, podemos considerar $\mathcal{M}(Y)$ como subcampo de $\mathcal{M}(X)$. Más aún, se puede considerar $\mathcal{M}(X)$ como espacio vectorial sobre $\mathcal{M}(Y)$. El teorema siguiente implica que estos campos nunca coinciden con \mathbb{C} .

Teorema 2.22 ([3], pág. 52). *Toda superficie de Riemann tienen funciones meromorfas no constantes.*

2.5. Funciones meromorfas sobre la esfera de Riemann. Denotamos con $\mathbb{C}(z)$ al campo de funciones racionales del anillo de polinomios $\mathbb{C}[z]$. Por lo tanto, toda función racional es un cociente de polinomios. Demostraremos que el campo de funciones meromorfas sobre la esfera es isomorfo al campo $\mathbb{C}(z)$.

Observación 2.23. Consideremos el atlas $\{(U_0, \phi_0), (U_\infty, \phi_\infty)\}$ sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ y $f \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$. Por definición, ∞ es un polo de f si y solo si $f \circ \phi_\infty^{-1}$ tiene un polo en $\phi_\infty(\infty) = 0$. Es, decir, $f(z)$ tiene un polo en ∞ si y solo si $f(1/w)$ tiene un polo en $w = 0$.

Toma la función racional $f(z) = P(z)/Q(z) \in \mathbb{C}(z)$, con P y Q polinomios no constantes sin factores comunes en $\mathbb{C}[z]$. Por el teorema fundamental del álgebra, los polinomios P y Q se puede descomponer en factores lineales. Sean $\{z_i\}$ y $\{q_j\}$ los ceros con multiplicidad d_i y e_j de los polinomios P, Q , respectivamente. Así tenemos que

$$f(z) = a \frac{\prod (z - z_i)^{d_i}}{\prod (z - q_j)^{e_j}},$$

donde $a \in \mathbb{C}^*$. Por la Definición 2.13 cada q_j es un polo de orden e_j de f , entonces f es una función meromorfa sobre \mathbb{C} . La cual se puede extender a una función meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ notando que

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m},$$

en la carta de $z = \infty$ tenemos que

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{a_0 + a_1 \frac{1}{w} + \cdots + a_n \left(\frac{1}{w}\right)^n}{b_0 + b_1 \frac{1}{w} + \cdots + b_m \left(\frac{1}{w}\right)^m} = \frac{w^m p_1(w)}{w^n q_1(w)},$$

donde p_1 y q_1 son polinomios en $\mathbb{C}[w]$. Por lo tanto, las funciones racionales son funciones meromorfas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$.

A través de las cartas de una superficie de Riemann, retomamos una propiedad local de funciones meromorfas dada por la siguiente definición.

Definición 2.24. Sean X una superficie de Riemann y f una función holomorfa en una vecindad perforada de $p \in X$. Toma $p \in X$ y (U, ϕ) una carta de X tal que $p \in U$. Si $z = \phi(x)$ para $x \in U$, entonces, $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en una vecindad perforada de $z_0 = \phi(p)$. Ahora podemos expresar la composición $f \circ \phi^{-1}(z)$ como una serie de Laurent cerca del punto z_0 :

$$f \circ \phi^{-1}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n.$$

El desarrollo en serie de Laurent depende de la carta que se elija. Sin embargo, el tipo de singularidad de f es independiente de dicha elección y se puede determinar a partir de los términos de la serie como en variable compleja. Se puede demostrar que f tiene una singularidad removible (resp. polo) en p si y solo si su serie no tiene exponentes negativos (resp. tiene un número finito de términos con exponente negativo). La singularidad es esencial si y solo si tiene un número infinito de términos con exponente negativo, como la función $\exp(1/z)$ en cero.

Si p es un polo de f , su orden N (Definición 2.13) coincide con el mínimo exponente de los coeficientes no cero y llamamos a la suma

$$\sum_{k=-N}^{-1} a_k (z - z_0)^k.$$

la parte principal del polo p .

Ejercicio 2.25. Demuestra que el orden no depende de la elección de la carta.

Teorema 2.26. *Toda función meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ es cociente de dos polinomios con coeficientes en \mathbb{C} , es decir, $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$, por la Proposición 2.20, el conjunto de ceros y polos de f es finito. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ∞ no es un polo de f . De otra forma, $1/f$ no tendría un polo en ∞ . Además, $1/f$ es racional si y sólo si f lo es.

Sea $P_f = \{z_1, \dots, z_n\}$ y como $\infty \notin P_f$, trabajaremos en la carta (U_0, ϕ_0) . Así, la función

$$F := f \circ \phi_0^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa y meromorfa en \mathbb{C} . Para cada uno de los polos consideremos las partes principales de sus respectivas series de Laurent:

$$h_j(z) = \sum_{k=-d_j}^{-1} a_{jk} (z - z_j)^k,$$

que son funciones racionales, por lo tanto meromorfas en $\widehat{\mathbb{C}}$ y tienen un único polo z_j . Entonces, la función $G := F - (h_1 + \dots + h_n)$ tiene extensión holomorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$. La compacidad de $\widehat{\mathbb{C}}$ junto con el Corolario 2.12 implican que la extensión de G es constante. Despejamos F y obtenemos que f coincide con la función racional

$$\frac{p(z)}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)^{d_i}},$$

donde $p(z) \in \mathbb{C}[z]$. □

Una aplicación holomorfa no constante $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ nos muestra que $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$ es un subcampo de $\mathcal{M}(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{M}(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}(z)$ o también podemos considerar a $\mathcal{M}(X)$ una extensión de campos de $\mathbb{C}(z)$.

3. TEOREMA DE RIEMANN-HURWITZ

Cuando Y es una superficie de Riemann compacta sus funciones meromorfas $f : Y \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ son cubrientes ramificados de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, para las cuales Riemann [10], en 1857, desarrolla una relación entre la topología de Y , el grado de f y sus puntos de ramificación. Hurwitz [4] en 1891 prueba el teorema en su formulación más difundida, la cual desarrollaremos en esta sección.

3.1. Espacios Cubrientes y grupos fundamentales. Sea $f : Y \rightarrow X$ una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann X, Y . Decimos que f es una *aplicación cubriente* si para todo punto $p \in X$ existe una vecindad abierta $V \subset X$, tal que para cada componente conexa $U \subset Y$ de $f^{-1}(V)$ la restricción $f|_U : U \rightarrow V$ es un biholomorfismo. La superficie Y con la aplicación f es un *espacio cubriente* de X .

Ejercicio 3.1. Prueba que la función exponencial compleja $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ es una aplicación cubriente y que para todo elemento $c \in 2i\pi\mathbb{Z}$ se satisface que $\exp(z + c) = \exp(z)$.

Al hablar de aplicaciones cubrientes es necesario hablar del *grupo fundamental* o *primer grupo de homotopía* $\pi_1(X, o)$ de una superficie de Riemann X basado en $o \in X$ (ver [2]). Comencemos por definir el conjunto de lazos basados en o de X ,

$$\mathcal{L}(X, o) := \{ \gamma : [0, 1] \rightarrow X \mid \gamma \text{ es continua y } \gamma(0) = \gamma(1) = o \}.$$

Dos lazos γ, γ' en $\mathcal{L}(X, o)$ se pueden *concatenar* para obtener otro lazo en $\mathcal{L}(X, o)$ de la siguientes manera:

$$\gamma' * \gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma'(2t - 1), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (3)$$

Decimos que dos lazos γ, γ' en $\mathcal{L}(X, o)$ son *homotópicos* si existe una función continua

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad \text{tal que } H(t, 0) = \gamma(t) \text{ y } H(t, 1) = \gamma'(t), \quad (4)$$

para toda $t \in [0, 1]$, H es una *homotopía* entre los lazos γ y γ' .

Ejercicio 3.2. Prueba que la relación $\gamma \sim \gamma'$ si y sólo si γ es homotópica a γ' , es una relación de equivalencia en $\mathcal{L}(X, o)$.

Entonces el conjunto cociente $\pi_1(X, o) := \mathcal{L}(X, o) / \sim$ con la operación concatenación (3) es grupo, con elemento neutro la clase de homotopía del lazo constante $\hat{o}(t) = o$, para toda $t \in [0, 1]$. Si el lazo γ es homotópico a \hat{o} , diremos que γ es *contraíble a un punto* o *homotópico al trivial*.

Observemos que el grupo de homotopía $\pi_1(\mathbb{C}, 1)$ de \mathbb{C} es el grupo trivial, porque para todo lazo $\gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, 1)$ tenemos la homotopía

$$H(s, t) = s(1 - \gamma(t)) + \gamma(t)$$

con el lazo constante $\hat{1}$, $\gamma \in [\hat{1}]$. Una superficie de Riemann X es *simplemente conexa* si su grupo fundamental $\pi_1(X, o)$ es trivial.

Ya en el caso de \mathbb{C}^* tenemos que su grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ es isomorfo a \mathbb{Z} , y el isomorfismo está dado por

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.3. Prueba que φ está bien definido y que es efectivamente un isomorfismo. Para esto, prueba que todas las clases de homotopía en $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ están representadas por los lazos $\gamma_n(t) = \exp(2i\pi n t)$ con $n \in \mathbb{Z}$ y que lazos homotópicos tienen integrales iguales.

El grupo fundamental $\pi_1(X, o)$ y los espacios cubrientes conexos $f : Y \rightarrow X$ de X guardan una relación muy fuerte que está descrita por el siguiente teorema.

Teorema 3.4 ([7], Proposición 7.12). *Sea X una superficie de Riemann. Dado un punto $o \in X$ y un subgrupo $H < \pi_1(X, o)$ existe un espacio cubriente conexo $f : Y \rightarrow X$ tal que el morfismo de grupos*

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(Y, \tilde{o}) &\rightarrow \pi_1(X, o) \\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma], \end{aligned}$$

inducido por f , con $\tilde{o} \in f^{-1}(o) \subset Y$, satisface que $f_(\pi_1(Y, \tilde{o})) = H$.*

En el caso de $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \simeq \mathbb{Z}$ sus únicos subgrupos son $n\mathbb{Z}$, los múltiplos de un entero positivo n . Para cada uno de estos subgrupos su cubriente $f_n : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ dado por el

Teorema 3.4 corresponde a la función holomorfa $\tilde{f}_n(z) = z^n$ restringida a \mathbb{C}^* . Para estos recubrimientos consideramos la raíz n -ésima de la unidad $\xi_n \in \mathbb{C}$ que satisface

$$f_n(\xi_n^k z) = \xi_n^{nk} z^n = z^n = f_n(z).$$

Es decir, multiplicar por cualquier potencia de ξ_n es un automorfismo del espacio cubriente \mathbb{C}^* que conmuta con la aplicación cubriente. Análogamente, la traslación por múltiplos enteros de $2i\pi$ en la aplicación cubriente $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ nos da el grupo de automorfismos.

En particular, los automorfismos $g: Y \rightarrow Y$ de un espacio cubriente $f: Y \rightarrow X$ son los biholomorfismos de Y que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow f & \downarrow f \\ & & X. \end{array} \quad (5)$$

Estos forman un grupo $A(Y, f)$ isomorfo al grupo cociente $N(H)/H$, con $N(H)$ el grupo normalizador de H en $\pi_1(X, o)$ ([7, Proposición 7.9]). Cuando H es un subgrupo normal, entonces el cubriente se llama *normal* o *regular*.

Considera un número $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tal que $\alpha \notin \mathbb{R}$ y considera la relación de equivalencia en \mathbb{C} dada por

$$z_1 \sim z_2 \iff z_1 - z_2 \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}.$$

Entonces, el cociente $\mathbb{T}_\alpha^2 = \mathbb{C}/\sim$ es una superficie de Riemann con cartas dadas por las bolas $B(r, z)$, con $r < \min\{|\alpha| \sin(\arg(\alpha)), |\alpha| \sin(\arg(-\bar{\alpha}))\}/4$, y la restricción de la función identidad en cada una es carta. Esta superficie es conocida como el toro plano.

Ejercicio 3.5. Prueba que la proyección cociente $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}_\alpha^2$ es una aplicación holomorfa cubriente.

Por la definición de la relación de equivalencia \sim , la traslación en \mathbb{C} por cualquier elemento en $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ conmuta con la aplicación cubriente $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}_\alpha^2$ y son los únicos. Así, el grupo de automorfismos $A(\mathbb{C}, f)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Del Teorema 3.4 y de que $\pi_1(\mathbb{C}, 1)$ es trivial, tenemos que el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{T}_\alpha^2, [1])$ es isomorfo a \mathbb{Z}^2 .

3.2. Cubrientes ramificados. Considera $f: Y \rightarrow X$ una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann X, Y . Decimos que f es una *cubriente ramificado* si existe un subconjunto discreto $\Delta \subset X$ tal que la restricción

$$f|_{Y-f^{-1}(\Delta)}: Y-f^{-1}(\Delta) \rightarrow X-\Delta$$

es una aplicación cubriente y para cada punto $p \in \Delta$ hay al menos un punto $q \in f^{-1}(p)$ de ramificación (Definición 2.16).

Para $n > 1$ la función $\tilde{f}_n(z) = z^n$ en \mathbb{C} es un cubriente ramificado, con 0 su punto de ramificación de orden $b_{\tilde{f}_n}(0) = n - 1$. En 0 ya no hay vecindad que satisfaga la definición de cubriente.

Teorema 3.6. *Sea $f : Y \rightarrow X$ una aplicación holomorfa propia no constante entre superficies de Riemann X, Y . Entonces existe un número natural n tal que la suma*

$$S(p) := \sum_{q \in f^{-1}(p)} (b_f(q) + 1) \quad (6)$$

es igual a n para todo punto $p \in X$. El entero positivo n es el grado de la aplicación f .

Demostración. Como f es propia, la preimagen $f^{-1}(p)$ de cualquier punto $p \in X$ es un conjunto finito de puntos. Considera los conjuntos

$$X_n := \{p \in X \mid S(p) \geq n\},$$

para cualquier natural n . Probaremos que estos conjuntos son abiertos y conexos, lo que implica que son X o el conjunto vacío porque X es conexo.

Toma $p \in X_n$ y $p \notin \Delta$, entonces existe una vecindad abierta U de p tal que cada componente conexa de $f^{-1}(U)$ es biholomorfa a U y cada $q \in f^{-1}(p)$ tiene orden $b_f(q) = 0$. Como $S(p) \geq n$ las componentes conexas de $f^{-1}(U)$ son al menos n , por lo que $S(x) \geq n$ para toda $x \in U$. Es decir U esta contenida en X_n .

En el caso de que $p \in \Delta$, supongamos sin pérdida de generalidad que en $f^{-1}(p)$ hay un sólo punto de ramificación q con orden $b_f(q) = m$. Entonces existe una vecindad abierta U de p , tal que cualquier componente conexa de $f^{-1}(U)$ que no contenga a q es biholomorfa a U y en $q \in V \subset f^{-1}(U)$ tiene una carta ψ y (U, ϕ) tal que

$$h := \phi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi_{q_0}(V) \rightarrow \phi(U), \quad \text{con } \phi(p) = 0 = \psi(q) \text{ y } h(z) = z^{m+1}. \quad (7)$$

Entonces $f^{-1}(U)$ tiene al menos $n - m$ componentes conexas. Por la expresión de h podemos asegurar que cada punto $x \in U - \{p\}$ tiene $m + 1$ preimágenes en V , por lo tanto $S(x) \geq n$ y X_n es abierto.

Ahora, toma p en los puntos de acumulación de X_n . Como Δ es discreto podemos tomar una sucesión de puntos $\{p_j\}$ que convergen a p y en cada uno de ellos f es aplicación cubriente. Si $p \notin \Delta$, existe la vecindad U de p que verifica que f es cubriente en p y hay puntos $p_j \in U$ para j suficientemente grande. Entonces, $f^{-1}(U)$ tiene al menos n componentes conexas y $S(p) \geq n$ o $p \in X_n$. Para el caso $p \in \Delta$, tomamos las cartas $(V, \psi), (U, \phi)$ y la función h (definida en la ecuación 7) en el punto de ramificación

$q \in f^{-1}(p)$. Existe un real positivo r tal que la bola cerrada $\overline{B(r, 0)} \subset \psi(V)$, y tomamos $z_j \in h(B(r, 0))$ con $z_j = \phi(p_j)$. El teorema de Rouché garantiza que h y $h - z_j$ tienen el mismo número de raíces contando multiplicidades, es decir, $f^{-1}(p_j) \cap \psi^{-1}(B(r, 0))$ tiene cardinalidad $m + 1$. Entonces, X_n es abierto y cerrado. Por lo que $X_n = X$ o $X_n = \emptyset$. Si la cardinalidad de $f^{-1}(p)$ es n , con $p \notin \Delta$, entonces X_m es vacío para toda $m > n$ o todo X si $m \leq n$. \square

Ejercicio 3.7. Prueba que cualquier aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas, es un cubriente ramificado y de grado finito.

Antes de enunciar el Teorema de Riemann-Hurwitz, necesitamos definir la *característica de Euler* para superficies de Riemann compactas. Euler, estudiando poliedros regulares nota que la suma

$$C - A + V = \chi(P)$$

siempre es 2, donde C es el número de caras, A el número de aristas y V el número de vértices de un poliedro P . Notando que todos los poliedros regulares son homeomorfos a la esfera, $\chi(P)$ resulta ser un invariante topológico de la esfera y se puede definir para cualquier superficie de Riemann compacta X .

Definamos una *triangulación* $(\mathcal{V}, \{\gamma_j\}_\Gamma)$ de X , con $\mathcal{V} \subset X$ un conjunto finito de puntos como vértices, un conjunto finito de aristas $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow X$ con $j \in \Gamma$ y que satisfacen:

- Todo vértice es extremo de algún camino.
- La intersección de \mathcal{V} con cualquier arista está contenida en sus extremos y la intersección de dos aristas está contenida en \mathcal{V} .
- Cada arista γ_j es inyectiva en $(0, 1)$.
- Toda componente conexa C_l del complemento de la unión de los caminos $X - \cup_j \gamma_j([0, 1])$ es simplemente conexa y cada C_l es una cara de la triangulación.

Las variables V, A, C son las cardinalidades de \mathcal{V}, Γ y del conjunto de caras C_l de $X - \cup_j \gamma_j([0, 1])$, respectivamente. Entonces la característica de Euler de X está dada por

$$\chi(X) = C - A + V, \tag{8}$$

esta definición es independiente de la elección de la triangulación como en el caso de la esfera de Riemann $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, por lo tanto es un invariante topológico de X . La característica de Euler para superficies de Riemann X es par y va restando 2 según aumenta el género topológico $g(X)$, que podemos pensar como el número de asas que tiene la superficie (ver Figura 2). Estos conceptos están relacionados por la fórmula

$$\chi(X) = 2 - 2g(X).$$

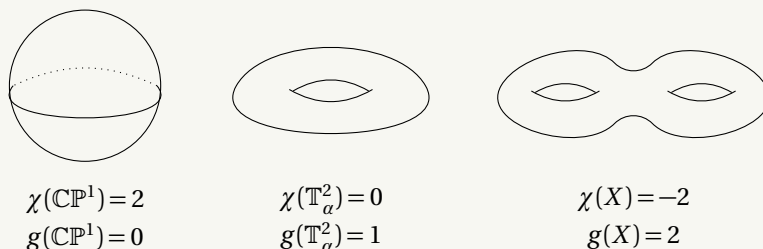


FIGURA 2. Característica de Euler y género de Superficies de Riemann.

Teorema 3.8 (Riemann-Hurwitz). *Sea $f : Y \rightarrow X$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas de grado n . Entonces, se satisface la siguiente ecuación*

$$\chi(Y) = n\chi(X) - \sum_{q \in Y} b_f(q), \quad (9)$$

relacionando las características de Euler de ambas superficies, el grado de f y sus puntos de ramificación.

Demostración. Como Y es compacta, el Lema 2.17 implica que el conjunto de puntos de ramificación R_f de f es finito y también su imagen $f(R_f) = \Delta$. Toma una triangulación $(\mathcal{V}, \{\gamma_j\}_{j \in \Gamma})$ de X tal que $\Delta \subset \mathcal{V}$. Entonces, tenemos que la característica de Euler de X es $C - A + V$.

Si $\tilde{\Delta} = f^{-1}(\Delta)$, entonces la aplicación f restringida a $Y - \tilde{\Delta}$ es un cubriente en el que cada punto tiene precisamente n preimágenes. Cada componente C_l^k conexa $f^{-1}(C_l)$ es un cubriente de C_l con aplicación cubriente $f|_{C_l^k}$, con C_l cara de $(\mathcal{V}, \{\gamma_j\}_{j \in \Gamma})$ y $k = 1, \dots, r$ y r el número de componentes conexas de $f^{-1}(C_l)$. Como C_l es simplemente conexo, el Teorema 3.4 implica que la aplicación $f|_{C_l^k}$ es un biholomorfismo y $r = n$. Análogamente, podemos demostrar que $f^{-1}(\gamma(0, 1))$ tiene n preimágenes γ_j^k homeomorfas y por continuidad sus extremos están contenidos en $f^{-1}(\mathcal{V})$. Así, $(f^{-1}(\mathcal{V}), \{\gamma_j^k\})$ es una triangulación de Y , donde el número de caras es nC , el de aristas es nA y el de vértices es $nV - \sum_{q \in R_f} b_f(q)$. La última igualdad resulta de que en un

punto $p \in \Delta$ la cardinalidad de $f^{-1}(p)$ es $n - \sum b_f(q)$, con $q \in \Delta \cap f^{-1}(p)$. Entoces,

$$\chi(Y) = nC - nA + nV - \sum_{q \in Y} b_f(q),$$

de donde se sigue el teorema. □

Ejercicio 3.9. Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ una aplicación holomorfa de la esfera de Riemann sobre sí misma. Prueba que f es una función cubriente si y sólo si f se puede escribir como el cociente de polinomios de grado a lo más 1.

4. TEOREMA DE EXISTENCIA DE RIEMANN

4.1. Curvas algebraicas en el plano proyectivo. Comencemos con la definición del plano proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ como el cociente del conjunto $\mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ por la relación de equivalencia

$$(x_1, z_1, w_1) \sim (x_2, z_2, w_2) \Leftrightarrow (x_1, z_1, w_1) = \lambda(x_2, z_2, w_2) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - 0.$$

El plano proyectivo complejo es una variedad compacta conexa de dimensión compleja 2 y dimensión real 4. Análogo a línea compleja $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, tenemos *cartas afines* dadas por

$$\begin{aligned} \phi_x : U_x &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ [1 : z : w] &\mapsto (z, w), \end{aligned}$$

donde $[x : z : w]$ representa la clase de equivalencia de (x, z, w) y el abierto $U_x \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ corresponde al conjunto $\{[x : z : w] \mid x \neq 0\}$. Notemos que U_x no contiene ningún representante del plano $x = 0$ y la intersección de $x = 0$ con los planos $az + bw = 0$ es una línea compleja que corresponde al punto $[0 : -b : a] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Este punto es el punto infinito donde se compactifica la línea compleja $\{az + bw = 0\} \cap U_x$ en la línea proyectiva compleja $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ correspondiente. De manera análoga a (ϕ_x, U_x) , obtenemos otras dos cartas afines (ϕ_z, U_z) y (ϕ_w, U_w) para completar su atlas en el mismo sentido de la definición de superficie de Riemann (para más detalles consulta [8, Sección 4]).

Entonces, una *curva algebraica* X es definida como el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo de grado n , es decir $P \in \mathbb{C}[x, z, w]$ satisface

$$P(\lambda x, \lambda z, \lambda w) = \lambda^n P(x, z, w), \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}^*. \quad (10)$$

Por lo tanto, X está bien definido en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Ejercicio 4.1. Prueba que X es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Notemos que P no es una función de \mathbb{CP}^2 a \mathbb{C} , ya que su valuación depende del representante que tomes de la clase $[x : z : w]$ como muestra la ecuación (10). El único valor que se mantiene independiente del representante es el 0. Pero, al tomar la restricción de $P(x, z, w)$ en la carta U_x es un polinomio bien definido $P(1, z, w)$ en $\mathbb{C}[z, w]$.

Ejercicio 4.2. Sea $P(x, z, w) \in \mathbb{C}[x, z, w]$ un polinomio homogéneo de grado n , prueba las siguientes afirmaciones.

- $P(x, z, w)$ es irreducible en $\mathbb{C}[x, z, w]$ si y sólo si $P(1, z, w)$ es irreducible en $\mathbb{C}[z, w]$.
- La intersección de la curva X definida por P con la línea proyectiva $\{x = 0\}$ consta de a lo más de n puntos de \mathbb{CP}^2 .
- Si $P(1, z, w)$ es irreducible en $\mathbb{C}[z, w]$ entonces el anillo

$$\mathbb{C}[z, w]/P(1, w, z)$$

es un campo.

En particular, cuales quiera dos curvas algebraicas en \mathbb{CP}^2 siempre tienen intersección no vacía. Este hecho es consecuencia del siguiente resultado.

Teorema 4.3 (Teorema de Bézout). *Sean X y Y curvas algebraicas en \mathbb{CP}^2 definidas por los polinomios homogéneos P y Q de grado n y m respectivamente. Entonces $X \cap Y$ es un conjunto de puntos con cardinalidad nm , contados con multiplicidad.*

Diremos que la curva algebraica X es *suave o regular* si y sólo si 0 es valor regular de cada restricción de P en cada una de las tres cartas afines, como en el Ejemplo 2.2. Denotaremos por X_x a la curva de nivel $P^{-1}(1, z, w)(0)$ que coincide con la intersección $X \cap U_x$.

Teorema 4.4. *Sea $X \subset \mathbb{CP}^2$ una curva algebraica definida por el polinomio homogéneo $P(x, z, w)$ de grado n . Si X es suave, entonces X es una superficie de Riemann compacta conexa y P es irreducible. Más aún, tenemos el siguiente isomorfismo de campos*

$$\mathcal{M}(X) \simeq \mathbb{C}[z, w]/P(1, w, z), \quad (11)$$

que implica que $\mathcal{M}(X)$ es una extensión algebraica de $\mathbb{C}(z)$ de grado n .

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$P(1, z, w) = w^n + a_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + a_1(z)w + a_0(z),$$

con $a_j \in \mathbb{C}[z]$ y con grado de a_j menor igual a $n - j$ (Ejercicio 2.3). El resultante $\text{Res}(P, \partial_w P)$ de los polinomios $P(1, z, w)$ y $\partial_w P(1, z, w)$ es el determinante de la matriz cuadrada (A_{ij}) de $2n - 1 \times 2n - 1$, con

$$A_{ij} = \begin{cases} a_{n+i-j}(z), & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \text{ y } i \leq j \leq n+i, \\ (i-j+1)a_{i-j+1}(z), & \text{si } n \leq i \leq 2n-1 \text{ y } i-n+1 \leq j \leq i, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, $\text{Res}(P, \partial_w P)$ es un polinomio en $\mathbb{C}[z]$, con conjunto de raíces $\Delta := \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$. El resultante igual a 0 en estos puntos implica que el polinomio $P(1, \zeta_k, w)$ tiene raíces con multiplicidad mayor a 1. Para el caso $c \notin \Delta$, la ecuación $P(1, c, w) = 0$ tiene n soluciones distintas y no tiene ninguna raíz en común con $\partial_w P(1, c, w)$.

Consideremos la proyección ρ_z de $\mathbb{C}^2 := U_x$ a su primera coordenada $\rho_z(z, w) = z$ y estudiemos su restricción $f := \rho_z|_{X_x}$ a X_x . Notemos que si $c \notin \Delta_x$ la cardinalidad de $f^{-1}(c)$ es n y además $\partial_w P(1, c, w_j) \neq 0$ para todo $(c, w_j) \in f^{-1}(c)$. Entonces, aplicando el teorema de la función implícita en cada punto (c, w_j) , para ϵ suficientemente pequeña obtenemos funciones analíticas

$$g_j(z, c) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^j (z - c)^k \quad (12)$$

tales que $P(1, z, g_j(z, c)) = 0$, con $|z - c| < \epsilon$, $b_0^j = w_j$ y $b_1^j \neq 0$. Del Ejemplo 2.2, sabemos que las componentes X_x^k de X_x son superficies de Riemann y por lo tanto f es una aplicación holomorfa en $X_x^* := X_x - f^{-1}(\Delta)$. Pero f es acotada al rededor de cada punto de $f^{-1}(\Delta)$, entonces el Teorema 2.14 implica que f es holomorfa en todo X_x .

Procediendo de manera análoga en la carta (ϕ_w, U_w) con el polinomio $P(x, z, 1)$ se prueba que f se puede extender a todo X como una aplicación meromorfa

$$\hat{f}: X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1. \quad (13)$$

La restricción de la aplicación \hat{f} en cada X^k es un cubriente ramificado de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\Delta_x = \Delta_w$. Así, restringimos a la superficie de Riemann X_x . En cada punto $\zeta_j \in \Delta$, tenemos que la cardinalidad de $f^{-1}(\zeta_j)$ es menor estrictamente que n , pues contiene al menos un punto de ramificación (ζ_j, w_0) de orden $K - 1 = b_f((\zeta_j, w_0)) \geq 1$.

Para cada punto c tal que $0 < |\zeta_j - c| < \epsilon$ existen funciones holomorfas $g_l(z, c)$ en una vecindad de c , con $g_l(c, c) = w_l$ para $l \in \{1, \dots, n\}$. Considera el lazo $\gamma(s) = \zeta_j + r \exp(2i\pi s)$, con $\gamma(0) = c$, y su levantamiento $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow X_x$ es tal que está en la misma

componente conexa de $f^{-1}(\{|\zeta_j - z| < \epsilon\})$ que (ζ_j, w_0) y $f|_{\tilde{\gamma}(0,1)}$ es homeomorfismo. Salvo una reindexación de $f^{-1}(c)$, podemos suponer que $\tilde{\gamma}(0) = (c, w_1)$ y $\tilde{\gamma}(1) = (c, w_2)$. El levantamiento $\tilde{\gamma}^K$ de concatenar K veces γ (γ^K) es un lazo en X_x basado en (c, w_1) , entonces a lo largo de $\tilde{\gamma}^K$ obtenemos una solución en una vecindad perforada de ζ_j de la ecuación

$$z - \zeta_j = y^K. \quad (14)$$

Por lo que podemos escribir cada $g_i(z, c) = g(y^K + \zeta_j)$ y g se extiende analíticamente

$$h(y) = w_0 + \sum_{l=1} b_l^0 y^{lK}, \quad (15)$$

que satisface $P(1, z, h(y)) = 0$ para toda z en $|\zeta_j - z| < \epsilon$.

Tomamos los puntos $c_0, c'_0 = \frac{1}{c_0} \notin \Delta \cup \infty$ en la línea proyectiva $w = 0$, los cuales son puntos antipodales en \mathbb{CP}^1 . Sean α_j los meridianos por los polos c_0, c'_0 que pasan por cada ζ_j . Salvo una reindexación, podemos suponer que α_j y α_{j-1} son frontera de la misma componente conexa V_j de $\mathbb{CP}^1 - \cup_j \alpha_j$, donde V_1 es la componente conexa que tiene frontera $\alpha_m \cup \alpha_1$. Al trazar los meridianos δ_j con extremos c_0, c'_0 que dividen a las áreas V_j en dos partes iguales, obtenemos una triangulación de \mathbb{CP}^1 con $2m$ triángulos esféricos dados por T_{2j-1} con aristas $c_0\zeta_j, \zeta_j c'_0, \delta_j$ y T_{2j} con aristas $c_0\zeta_{j+1}, \zeta_{j+1} c'_0, \delta_j$.

El complemento Ω de la unión de las aristas $c'_0\zeta_j$ en \mathbb{CP}^1 es un dominio simplemente conexo, ya que cualquier lazo basado en c_0 se contrae al lazo constante \hat{c}_0 . Suponiendo que $\infty \in \cup c'_0\zeta_j$, las funciones $g_j(z, c_0)$ (12) se extienden analíticamente sin obstrucciones a todo Ω , es decir, $g_j(z, c) = g_j(z, c_0)$ para toda $c \in \Omega$. Levantamos a Ω en cada punto (c_0, w_j) de $f^{-1}(c_0)$ en $\tilde{\Omega}_j \subset X$. La unión $\cup_j \tilde{\Omega}_j$ es un abierto denso en X_x , lo que hace posible la siguiente factorización

$$P(1, z, w) = \prod_{j=1}^n (w - g_j(z, c_0)),$$

para cada $z \in \Omega$.

Notemos que X_x es conexa si y sólo si X es conexa. Supongamos que X_x no es conexa y que tiene al menos dos componentes conexas X_x^1 y X_x^2 . Salvo reindexación, los abiertos $U_1 = \cup_{j=1}^m \tilde{\Omega}_j, U_2 = \cup_{j=m+1}^n \tilde{\Omega}_j$ son densos en las componentes X_x^1, X_x^2 , respectivamente.

Definamos las funciones simétricas para $k \leq m$

$$s_k(z) = \sum_{\substack{j_1 < j_2 < \dots < j_k \\ 1 \leq j_i \leq m}} g_{j_1}(z, c_0) g_{j_2}(z, c_0) \cdots g_{j_k}(z, c_0).$$

Cada función s_k está bien definida para toda $z \notin \Delta$, ya que sus extensiones analíticas al rededor de cada ζ_j satisfacen $\int_{\gamma} s_k dz = 0$ para cada lazo en $\mathbb{C} - \Delta$. Usando (15) podemos extender sin problema cada s_k a Δ , entonces tenemos funciones enteras que se pueden extender a ∞ y por el Teorema 2.26 tienen que ser polinomiales. Tenemos el siguiente polinomio

$$P_1(z, w) = \prod_{j=1}^m (w - g_j(z, c_0)) = w^m - s_1(z)w^{m-1} + \cdots + s_m(z),$$

análogamente $g_j(z, c_0)$ con $j = m+1, \dots, n$ construimos $P_2(z, w)$ para obtener

$$P(1, z, w) = \prod_{j=1}^n (w - g_j(z, c_0)) = P_1(z, w)P_2(z, w),$$

que es una factorización no trivial en P_1, P_2 que definen las curvas X^1, X^2 , respectivamente. El Teorema 4.3 para curvas proyectivas, dice que la intersección de $X^1 \cap X^2$ contiene al menos un punto. En cada punto de $X^1 \cap X^2$ tenemos que $\nabla P(1, z, w) = P_1(z, w) \cdot \nabla P_2(z, w) + P_2(z, w) \cdot \nabla P_1(z, w) = 0$, por lo que cero no es valor regular de $P(1, z, w)$, contradicción. Por lo tanto X_x es conexa y $P(1, z, w)$ es irreducible.

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ una función meromorfa. En particular, f es un cubriente ramificado de grado m y Δ el conjunto de valores en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ que resulta de valuar f en un punto de ramificación. De manera análoga a la prueba del Teorema 2.26, se demuestra que $f = Q(z, w)|_{X_x}$ con $Q(w) \in \mathbb{C}(z)[w]$, la restricción marca las clases de equivalencia del polinomio Q en el campo

$$\mathbb{C}(z)[w]/P(1, z, w).$$

Y efectivamente, cada elemento Q del campo define una única función meromorfa de X a través de valuar Q en X_x , por lo que se obtiene el isomorfismo con el campo $\mathcal{M}(X)$. Como $P(1, z, w)$ es un polinomio irreducible de grado n en $\mathbb{C}(z)[w]$, tenemos que $\mathcal{M}(X)$ es una extensión algebraica de grado n del campo $\mathbb{C}(z)$. □

Ejercicio 4.5. Prueba las siguientes afirmaciones:

- i) La curva elíptica \mathcal{E} definida por el polinomio homogéneo $w^3 - zw^2 - x^3$ es suave, por ende irreducible y genera una superficie de Riemann de género 1.
- ii) La curva de Fermat F_n definida por el polinomio homogéneo $w^n + z^n - x^n$ es irreducible y suave. La curva F_n como superficie de Riemann tiene género $(n-1)(n-2)/2$.

Por el Teorema 4.4, los campos de funciones meromorfas $\mathcal{M}(F_n)$ y $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ son extensiones algebraicas separables de $\mathbb{C}(z)$, porque este último tiene característica cero como campo. Lo que falta por verificar es si estas extensiones podrían ser normales para concluir que son de Galois. Para verificarlo en el caso de \mathcal{E} , utilizaremos la siguiente afirmación, que tiene demostración altamente no trivial.

Problema 4.6. El grupo de automorfismos holomorfos de \mathcal{E} es trivial.

Esto implica que $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ no es una extensión de Galois, ya que si fuera de Galois al ser extensión de grado 3 la cardinalidad del grupo de automorfismos debería ser 3.

En el caso de F_n , al restringirse a la carta U_x de \mathbb{CP}^2 obtenemos el polinomio $w^n + z^n - 1 = 0$ que es invariante por las transformaciones lineales

$$(z, w) \rightarrow (\zeta_n^k z, \zeta_n^k w).$$

Las cuales forman un grupo isomorfo al grupo cíclico \mathbb{Z}_n . Entonces $\mathcal{M}(F_n)$ es una extensión de Galois de $\mathbb{C}(z)$.

Considera el espacio \mathcal{H}^n de polinomios homogéneos de grado n

$$P(x, z, w) = \sum_{i+j+k=n} a_{i,j,k} x^i z^j w^k,$$

parametrizado por el espacio proyectivo de sus coeficiente $[a_{i,j,k}]$. Los elementos $P \in \mathcal{H}^n$ que definen una curva algebraica suave, forman un abierto de Zariski de \mathcal{H}^n y de éstos, los que tienen grupo de automorfismos holomorfos trivial forman también un abierto de Zariski. Es decir, son muy especiales los casos cuando el campo de funciones meromorfas $\mathcal{M}(X)$ de una curva algebraica suave X es una extensión de Galois de $\mathbb{C}(z)$.

4.2. Ideas y observaciones para la prueba del Teorema 1.1. En el Teorema 4.4, utilizamos en distintos momentos de su prueba el hecho de que X es una curva suave en el plano proyectivo, lo que excluye a muchas superficies de Riemann que no pueden ser encajadas isométricamente en \mathbb{CP}^2 . Esto quiere decir, que el polinomio irreducible $P(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ cuya extensión $\mathbb{C}[z, w]/P(z, w)$ es isomorfa a $\mathcal{M}(X)$ puede tener un conjunto de singularidades, es decir, 0 no es valor regular de P . Eso significa que

no probamos la biyección entre superficies de Riemann y extensiones algebraicas de $\mathbb{C}(z)$.

Necesitamos primero el Teorema 2.22 para garantizar que hay una función mero-morfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ no constante. Después aplicamos la misma idea que con la proyección f en la prueba del Teorema 4.4 usando continuación analítica para obtener la solución de la ecuación 14.

Aquí tendremos que construir el polinomio irreducible $P(w) \in \mathbb{C}(z)[w]$ usando la idea de funciones simétricas para encontrar los polinomios P_1 y P_2 en la prueba del Teorema 4.4. Y así cada superficie de Riemann va estar relacionada con una extensión algebraica de $\mathbb{C}(z)$.

Construir el regreso de la biyección es mucho más complejo, pero si estás interesado recomendamos leer el Capítulo 4 de [5].

Las líneas de investigación que se desprenden de las diferentes preguntas generadas desde el Teorema de Existencia de Riemann, pueden ser encontradas en los pizarrones de las matemáticas y los matemáticos que continúan buscando sus respuestas.

REFERENCIAS

- [1] P. Griffiths, J. Harris, Principles of algebraic geometry. *John Wiley and Sons*, (1978).
- [2] J. J. Díaz Guevara, A. García Sandoval, O. V. Macías Sandoval, I. F. Valtierra Carranza, *El grupo fundamental*. Notas de la Escuela de Verano en Matemáticas Básicas y Aplicadas. Aportaciones matemáticas electrónicas. N° 1, Instituto de Matemáticas, UNAM (2024), 161-183.
- [3] H. Farkas, I. Kra, Riemann Surfaces. *Springer*, (1992)
- [4] A. Hurwitz, *Über Riemann'sche Fläche mit gegebenen Verzweigungspunkten*. Math. Ann. **39** (1891), 1–61.
- [5] K. Iwasawa, *Algebraic Functions*. Translations of Mathematical Monographs, v. **118** (1993), American Mathematical Soc.
- [6] A. Lascrain, Curso basico de variable compleja. *Prensas de Ciencias. UNAM, Facultad de Ciencias* (2007).
- [7] E. L. Lima, Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento. *Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA*, (2006).
- [8] J. M. Márquez-Bobadilla, O. Mata-Gutiérrez, M. P. Suárez-Fernández, *Una introducción a la variedades determinanatales*. Notas de la Escuela de Verano en Matemáticas Básicas y Aplicadas. Aportaciones matemáticas electrónicas. N° 1, Instituto de Matemáticas, UNAM (2024), 131-159.
- [9] R. Miranda, *Algebric Curves and Riemann Surfaces* Vol. 5. American Mathematical Soc., (1995).

- [10] B. Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen*. Journ. reine angew. Math. (Crelle) **54** (1857), 115–155
- [11] F. Zaldívar Cruz, *Funciones algebraicas de una variable compleja*. Universidad Autónoma Metropolitana, (1995).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN 1421, GUADALAJARA, JALISCO, MÉXICO

E-mail address: correo2@servidor.edu

AXIOMAS DE SEPARACIÓN EN LA CATEGORÍA DE MARCOS

JUAN CARLOS MONTER CORTÉS, LUIS ÁNGEL ZALDÍVAR CORICHI

Resumen. Una de las ramas más importantes en la matemática es la topología, esta como bien sabemos estudia el concepto de espacio, y capta de manera muy general los primeros espacios que se nos presentan en la vida matemática, los espacios métricos y a su vez se observa que estos espacios son casos particulares de los llamados espacios Hausdorff, es aquí donde entran en juego los axiomas de separación. En épocas más modernas (por así decirlo), se han manufacturado otras nociones de "espacio" de estas es la noción de locale (marco, álgebra de Heyting completa), este curso pretende introducir los conceptos básicos de la topología sin-puntos y de hecho ver como los axiomas de separación juegan un papel importante pero un poco más caótico en estos "espacios".

Abstract. One of the most important branches in mathematics is topology, as we well know, it studies the concept of space, and captures in a very general way the first spaces that are presented to us in mathematical life, metric spaces, and at the same time it is observed that These spaces are particular cases of the so-called Hausdorff spaces, this is where the separation axioms come into play. In more modern times (so to speak), other notions of "space" have been manufactured, one of these is the notion of locale (frame, complete Heyting algebra), this course aims to introduce the basic concepts of pointless topology and in fact see how the separation axioms play an important but slightly more chaotic role in these "spaces".

Introducción

En la topología clásica existen las nociones de axiomas de separación. Estas son herramientas que permite dotar a los espacios de una cantidad suficiente de conjuntos abiertos (elementos de la topología). Los axiomas más elementales que existen hacen uso de los

2000 *Mathematics Subject Classification.* 82B44.

Palabras Claves. Cristales de spin. Medida de Gibbs.

puntos, y estos a su vez terminan siendo considerados como los elementos de los conjuntos abiertos. Cuando trabajamos en la categoría de marcos, podemos considerar a los conjuntos abiertos como el elemento más básico del espacio y de esta manera podemos empezar a hablar de la “topología sin puntos”. En estas notas abordamos la variante de los axiomas de separación vistos desde la perspectiva de la teoría de marcos.

Para hacerlo, en la primer sección, introducimos todos los conceptos necesarios para el desarrollo de la teoría de marcos. Partiendo del concepto de retícula y llegando a los aspectos categóricos que existen entre los marcos y los espacios topológicos. De igual manera, recopilamos la información básica sobre los axiomas clásicos de separación. Por último, mencionamos algunas propiedades de separación adicionales y la relación que existe entre todas estas.

La sección número dos la utilizamos para mostrar como trabaja la topología sin puntos para “traducir” los axiomas clásicos de separación y obtener nuevas variantes, pero ahora libres de puntos, es decir, versiones de los axiomas enunciados únicamente para elementos de la retícula $\mathcal{O}S$. En seguida, damos la versión general de estas propiedades, pero para un marco arbitrario.

La Sección 3 aborda dos propiedades de separación adicionales. Estas aparecieron en la literatura como versiones libres de puntos y permitió presentar caracterizaciones que con el paso del tiempo, complementarían los diferentes axiomas tipo Hausdorff.

En la última sección presentamos los axiomas tipo Hausdorff que existen en la literatura y mencionamos la motivación que tuvieron los diferentes autores para enunciarlos. Procuramos mencionar cual es el uso de cada uno de estos en la práctica y la relación que existe entre ellos. De manera adicional, agregamos unos diagramas que permiten ilustrar la relación de los axiomas tipo Hausdorff y todas las propiedades abordadas a lo largo de las notas.

La información aquí presentada es una recapitulación principalmente de [8]. Ahí se abordan a detalle las diferentes nociones de separación. Para consultar los detalles sobre teoría de marcos, sugerimos consultar [3], [7] o [14].

Índice

1. Preliminares	247
1.1. Teoría de marcos	247
1.2. Aspectos categóricos	250
1.3. Axiomas clásicos de separación (sensibles a puntos)	253
1.4. Algunas propiedades adicionales	254
1.5. El axioma T_D	255
1.6. Sobriedad	256
2. “Traducciones” de los axiomas de separación (libres de puntos)	258
2.1. T_0 sin puntos	259
2.2. T_1 sin puntos	259
2.3. Regularidad sin puntos	259
2.4. Completamente regular sin puntos	260
2.5. Normalidad sin puntos	262
2.6. Axiomas de separación en la categoría Frm	262
3. Las nociones de subajustado y ajustado	263
3.1. Subajustado	263
3.2. Ajustado	266
3.3. Subajustado y ajustado en sublocales	270
4. Axiomas tipo Hausdorff	272
4.1. Marcos débilmente Hausdorff	273
4.2. Marcos Hausdorff	274
4.3. Marcos Hausdorff basados	275
4.4. Marcos fuertemente Hausdorff	276
Referencias	279

1. Preliminares

1.1. Teoría de marcos. Para el desarrollo de toda esta teoría, primero necesitamos introducir aquellos conceptos centrales sobre los cuales trabajaremos. El concepto fundamental es el de marco. Recordemos que éste parte de la definición de retícula.

Definición 1.1. Una *retícula* es un conjunto con dos operaciones binarias (supremo o “ \vee ” e ínfimo o “ \wedge ”) y dos elementos distinguidos (0 y 1) tal que \vee (respectivamente \wedge) es asociativa, conmutativa, idempotente y tienen a 0 (respectivamente 1) como elementos neutros.

Definición 1.2. Consideremos una retícula $(S, \leq, \vee, \wedge, 0, 1)$. Si esta cumple las siguientes leyes distributivas

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{y} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

para todo $a, b, c \in S$. Entonces decimos S es una *retícula distributiva*.

Definición 1.3. Decimos que una \vee -semiretícula es *completa* si para cualquier subconjunto A (no solo finito) existe $\bigvee A$.

Definición 1.4. Un *marco* es una retícula completa $(S, \leq, \wedge, \bigvee, 0, 1)$ que cumple la siguiente ley distributiva

$$x \wedge \bigvee Y = \bigvee \{x \wedge y \mid y \in Y\} \quad (1)$$

para cualesquiera $x \in S$ y $Y \subseteq S$.

A (1) se le conoce como *ley distributiva para marcos (LDM)*.

Ejemplo 1.5. Para todo espacio topológico S se tienen dos familias de subconjuntos: los subconjuntos abiertos, que denotamos por $\mathcal{O}S$ y sus subconjuntos cerrados, denotados por $\mathcal{C}S$. De esta forma para cualquier $(S, \mathcal{O}S)$, $\mathcal{O}S$ tiene la estructura de retícula completa

$$(\mathcal{O}S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset).$$

Además la familia de subconjuntos abiertos cumple la LDM. Es decir, $\mathcal{O}S$ es un marco, que de manera conveniente, llamaremos *marco de abiertos*.

Consideremos $U \subseteq S$, denotamos por

$$U', \quad U^-, \quad U^\circ,$$

como el complemento, la cerradura y el interior de U en S , respectivamente.

Como mencionamos en el ejemplo, $\mathcal{O}S$ es un marco, en la literatura a $\mathcal{O}S$ también se le conoce como el marco de abiertos de S o como la retícula de conjuntos abiertos. Al ser $\mathcal{O}S$ una retícula, en ocasiones también se le denota por $\Omega(S)$.

Calcular ínfimos arbitrarios se puede realizar de la siguiente forma

$$\bigwedge U = \left(\bigcap U \right)^\circ.$$

Definición 1.6. Sean A y B dos marcos arbitrarios. Un *morfismo de marcos* es una función $f: A \rightarrow B$ tal que para cualesquiera $a, b \in A$ y $X \subseteq A$ se cumple lo siguiente:

- $a \leq b, f(a) \leq f(b)$.
- $f(0_A) = 0_B$ y $f(1_A) = 1_B$.
- $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.
- $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$.

Para culminar este apartado sobre teoría de marcos, definiremos una operación conocida como implicación y unas funciones que se conocen como núcleos. Ambas serán de utilidad más adelante.

Definición 1.7. Sea A una retícula completa, una *implicación* es una operación sobre A

$$(\cdot \succ \cdot): A \times A \rightarrow A$$

de tal forma que

$$x \leq (b \succ a) \Leftrightarrow b \wedge x \leq a$$

para cualesquiera $a, b, x \in A$.

La implicación es una operación definida sobre retículas, de hecho esta operación es denotada en ocasiones por “ \rightarrow ”. En particular, en un marco A se calcula de la siguiente forma

$$(b \succ a) = \bigvee \{c \in A \mid b \wedge c \leq a\}.$$

Además, la implicación nos permite calcular la negación de cualquier elemento $a \in A$ como $\neg a = (a \succ 0)$.

Definición 1.8. Sea A un marco y $a, b \in A$. Decimos que $j: A \rightarrow A$ es un *núcleo* si:

1. $a \leq j(a)$, (el operador infla).
2. Si $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$, (el operador es monótono).
3. $j^2 = j$, (el operador es idempotente).
4. $j(a) \wedge j(b) = j(a \wedge b)$, (el operador preserva ínfimos).

Podemos considerar a NA como el conjunto de todos los núcleos sobre A .

Ejemplo 1.9. Si $A \in \text{Frm}$ para cualquier $a \in A$ definimos las funciones

- $u_a: A \rightarrow A, u_a(x) = a \vee x, \forall x \in A$ (*núcleo cerrado*)
- $v_a: A \rightarrow A, v_a(x) = (a \succ x), \forall x \in A$ (*núcleo abierto*)
- $w_a: A \rightarrow A, w_a(x) = ((x \succ a) \succ a), \forall x \in A$ (*núcleo regular*)

Los tres operadores definidos resultan ser núcleos.

Los núcleos del Ejemplo 1.9 reciben esos nombres debido a que, en la teoría de locales, los núcleos están en correspondencia biyectiva con los sublocales. Omitiendo detalles, esbozamos como es esta correspondencia.

Por medio de un núcleo arbitrario, podemos definir un sublocal, el cual resulta ser el conjunto de puntos fijos del núcleo en consideración, denotado por A_j para $j \in NA$. También, a través de un sublocal S , podemos definir un núcleo, el cual se denota por j_S .

Observación 1.10. Para $a \in A$ tenemos las siguientes correspondencias con los núcleos u_a y v_a

$$u_a \leftrightarrow A_{u_a} = c(a) = [a, 1] \quad \text{y} \quad v_a \leftrightarrow A_{v_a} = o(a) = [0, a]$$

donde $c(a)$ y $o(a)$ se les conocen como los sublocales cerrados y abiertos, respectivamente.

1.2. Aspectos categóricos. Utilizando las Definiciones 1.4 y 1.6 podemos demostrar que la composición de morfismos de marcos es también un morfismo de marcos. Además, el morfismo identidad (id) actúa como elemento neutro en la composición. Como consecuencia tenemos una categoría, la cual denotaremos por Frm y es conocida como la *categoría de marcos*.

Definición 1.11. Sea $f : A \rightarrow B$ una función monótona. El *adjunto derecho* de f es una función monótona $f_* : B \rightarrow A$ tal que $f(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq f_*(b)$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Denotamos a f como f^* y escribimos $f^* \dashv f_*$

La relación que existe entre los morfismos de marcos y el adjunto de un morfismo se enuncia en el siguiente resultado.

Proposition 1.12. *Todo morfismo de marcos tiene adjunto derecho*

Podemos construir la categoría opuesta a Frm , esta recibe el nombre de *categoría de locales*. Por la Proposición 1.12 tenemos que para cualesquiera $A, B \in \text{Frm}$, si

$$f : A \rightarrow B \implies f_* : B \rightarrow A$$

donde f es un morfismo de marcos y f_* es su adjunto derecho. Notemos que f_* invierte el dominio y codominio de f . Por lo tanto, podemos considerar un morfismo de locales como

$$f : B \rightarrow A$$

tales que f preserva los ínfimos y sus adjuntos izquierdos (f^*), son un morfismo de marcos. Así, invirtiendo la composición de los morfismos de marcos obtenemos la categoría

$\text{Loc} = \text{Frm}^{\text{op}}$.

Existe una adjunción entre Frm y Top (la categoría de espacios topológicos), como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \text{Top} & \\ \mathcal{O} \downarrow & \dashv & \uparrow \text{pt} \\ & \text{Frm}^{\text{op}} & \end{array}$$

donde pt se le conoce como el funtor de puntos y \mathcal{O} como el funtor de abiertos.

Como vimos al inicio de esta sección, uno de los primeros ejemplos de un marco son los abiertos de un espacio topológico. De esta manera, si S es un espacio arbitrario, podemos asignarle el marco $\mathcal{O}S$. Ahora, si consideramos cualesquiera dos espacios topológicos S , T y una función continua $f: S \rightarrow T$, entonces la asignación

$$\mathcal{O}(f) = f^{-1}: \mathcal{O}T \rightarrow \mathcal{O}S,$$

por propiedades de la preimagen, resulta ser un morfismo de marcos. Lo anterior nos menciona la forma en que se construye el funtor $\mathcal{O}(_): \text{Top} \rightarrow \text{Frm}^{\text{op}}$, asignando a cada espacio su marco de abiertos y, a cada función continua la respectiva función preimagen, pero restringida a los correspondientes marcos de abiertos.

La construcción del funtor $\text{pt}(_)$ es un poco más compleja y para ello se necesita más información. Para empezar, necesitamos definir los que serán los puntos en un marco.

Definición 1.13. Sea A un marco. Un *caracter* de A es un morfismo de marcos $h: A \rightarrow \mathbf{2}$, donde $\mathbf{2}$ es el marco de dos elementos.

Existe una correspondencia biyectiva entre caracteres de un marco y otros dos dispositivos: elementos \wedge -irreducibles y filtros completamente primos. Estos últimos no serán utilizados en estas notas.

Definición 1.14. Sea A un marco. Un elemento $p \in A$ es \wedge -irreducible si $p \neq 1$ y si $x \wedge y \leq p$, entonces $x \leq p$ o $y \leq p$ se cumple para cada $x, y \in A$.

La siguiente definición es la que nos permite convertir un marco en un espacio.

Definición 1.15. Sea A un marco. El *espacio de puntos* de A es la colección de todos los elementos \wedge -irreducibles de A . Denotamos a estos por $\text{pt}A$.

Notemos que para que $\text{pt}A$ sea un espacio, este necesita una topología.

Definición 1.16. Sea A un marco con espacio de puntos $S = \text{pt}A$, vistos como elementos \wedge -irreducibles. Definimos

$$U_A(a) = \{p \in S \mid a \not\leq p\}$$

para cada elemento $A \in A$.

Si es claro el marco bajo el cual se está trabajando, eliminamos el subíndice A y solo escribimos $U(a)$.

Se puede demostrar que las intersecciones finitas y las uniones arbitrarias de conjuntos de esta forma, también tienen la misma estructura, es decir,

$$U(a) \cap U(b) = U(a \wedge b) \quad \text{y} \quad \bigcup \{U(a) \mid a \in X\} = U(\bigvee X)$$

se cumplen para todo $a, b \in A$ y $X \subseteq A$. Con lo mencionado antes tenemos el siguiente lema.

Lema 1.17. Sea A un marco con espacio de puntos $S = \text{pt}A$. La colección de conjuntos $\{U(a) \mid a \in A\}$ forman una topología en S y

$$U_a(_): A \rightarrow \mathcal{O}S \tag{2}$$

es un morfismo suprayectivo de marcos.

La asignación presentada en 2 es conocida como la *reflexión espacial*. Ahora necesitamos construir una función continua que relacione a cualesquiera espacio de puntos. Para ello tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.18. Sean $A, B \in \mathbf{Frm}$ y $f: A \rightarrow B$ un morfismo de marcos. La función $\text{pt}(f): \text{pt}A \rightarrow \text{pt}B$ definida por

$$f_*: \text{pt}B \rightarrow \text{pt}A,$$

donde f_* es el adjunto derecho de f , es una función continua.

Por lo tanto, obtenemos el funtor $\text{pt}: \mathbf{Frm}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Top}$. Obviamente, existen bastante detalles que podrían ser agregados en estas notas para comprender por completo el fenómeno de la adjunción entre estas dos categorías. Nuestro objetivo no es enfocarnos en ellos. De esta manera sugerimos consultar [14] para revisar más a fondo lo explicado antes.

1.3. Axiomas clásicos de separación (sensibles a puntos). Los axiomas de separación nos proporcionan condiciones bajo las cuales, en un espacio S , podemos separar puntos diferentes por medio de elementos en $\mathcal{O}S$ y, en el caso de los axiomas T_3 y T_4 , podemos separar también conjuntos cerrados.

Comencemos con el axioma T_0 , este es el primer axioma de separación y el más general. Para un espacio S decimos que este es T_0 si:

$$(\mathbf{T}_0): \forall x, y \in S, x \neq y, \exists U \in \Omega(S) \text{ tal que } x \notin U \ni y \text{ ó } y \notin U \ni x.$$

Equivalentemente, el espacio S es T_0 si y solo si $\forall x, y \in S$, si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Rightarrow x = y$.

Para los espacios T_1 tenemos la siguiente suposición.

$$(\mathbf{T}_1): \forall x, y \in S, x \neq y, \exists U \in \Omega(S) \text{ tal que } y \notin U \ni x.$$

También podemos decir que el espacio S es T_1 si y solo si los conjuntos formados por un punto son cerrados, es decir, $\forall x \in S, \{x\} = \overline{\{x\}}$.

Ahora enunciaremos el axioma de separación T_2 (o de Hausdorff). Este axioma es de los más usados en topología clásica. Lamentablemente, como veremos más adelante, existe más de una variante libre de puntos de este axioma. Diremos que un espacio es Hausdorff, o T_2 , si

$$(\mathbf{T}_2): \forall x, y \in S, x \neq y, \exists U, V \in \Omega(S) \text{ tal que } x \in U, y \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Como se menciona en la Introducción, la última sección de estas notas está enfocada en presentar las diferentes traducciones de este axioma y cuales son las razones por las que existen varias.

Para enunciar el siguiente axioma de separación necesitamos del concepto de espacio regular. Decimos que un espacio *regular* si

$$(\mathbf{reg}): \forall x \in S, A \subseteq S \text{ cerrado tal que } x \notin A, \exists U, V \in \Omega(S) \text{ tales que}$$

$$x \in U, \quad A \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Proposition 1.19. *Si un espacio regular es T_0 , este es T_2 y por lo tanto T_1 .*

Si consideramos la regularidad junto con T_1 obtenemos el axioma T_3 , es decir,

$$T_3 = (\mathbf{reg}) + T_1.$$

La siguiente noción que enunciaremos es la de completamente regular. Un espacio es *completamente regular* si

(creg): $\forall x \in S, A \subseteq S$ cerrado tal que $x \notin A, \exists f: S \rightarrow \mathbb{I}$ tal que

$$f(x) = 0, \quad f[A] = 1$$

donde \mathbb{I} es el intervalo cerrado $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Si un espacio es completamente regular, entonces este también es regular. Además, si a un espacio completamente regular le pedimos que sea T_1 , entonces obtenemos el axioma de separación $T_{3\frac{1}{2}}$, es decir,

$$T_{3\frac{1}{2}} = (\mathbf{creg}) + T_1.$$

Para terminar con los axiomas clásicos de separación necesitamos definir la normalidad. Decimos que un espacio S es *normal* si

(norm): $\forall A, B \subseteq S$ cerrados tales que $A \cap B = \emptyset, \exists U, V \in \Omega(S)$ tales que

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Así, obtenemos el axioma de separación T_4 dado por

$$T_4 = (\mathbf{norm}) + T_1.$$

De esta manera tenemos la siguiente sucesión de axiomas

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Ya con estas nociones, lo que sigue es obtener su significado en el lenguaje del marco abiertos, es decir, modificaremos aquello que sea necesario para que todas estas condiciones dadas para puntos o conjuntos cerrados queden en términos de conjuntos abiertos, pero esa es tarea para siguiente sección.

1.4. Algunas propiedades adicionales. Podemos definir propiedades que se ubiquen entre T_0 y T_1 y también entre T_1 y T_2 . A los espacios que las cumplen, en la literatura, se les conoce como R_0 y R_1 .

$$(\mathbf{R}_0) \quad \forall x, y \in S, x \in \overline{\{y\}} \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}.$$

En otras palabras, $x \in \overline{\{y\}}$ implica que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. A los espacios que cumplen con esta propiedad también se les conoce como simétricos.

Ahora definimos a los espacios R_1 .

$$(R_1) \quad \forall x, y \in S, \text{ si } \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}} \Rightarrow \overline{\{x\}} \subseteq U \text{ y } \overline{\{y\}} \subseteq V.$$

para algunos abiertos disjuntos U y V .

El siguientes resultado relaciona a los espacios R_0 y R_1 con los que son T_1 y T_2 respectivamente.

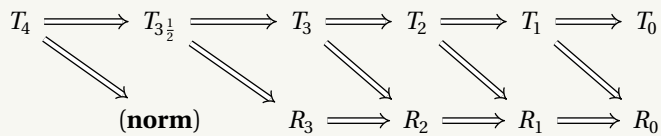
Proposition 1.20. *Bajo T_0 , $R_0 \Leftrightarrow T_1$. Bajo T_1 , $R_1 \Leftrightarrow T_2$.*

Demostración. Consideremos un espacio S

- i) Supongamos que S cumple R_0 . Consideremos $x \in \overline{\{y\}}$, por R_0 se cumple que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ y por T_0 $x = y$. Por otro lado, si S cumple T_1 y consideramos $x \in \overline{\{y\}}$, por T_1 tenemos que $\overline{\{x\}} = \overline{\{x\}}$ y $\overline{\{y\}} = \overline{\{y\}}$. De esta manera $x = y$ y así $y \in \overline{\{x\}}$.
- ii) Supongamos que R_1 se cumple. Sean $x \neq y$. Por T_1 $\overline{\{x\}} = \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}} = \overline{\{y\}}$ y por R_1 existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que $x \in U$ y $y \in V$. Por otro lado, supongamos que se cumple T_2 , entonces para $x \neq y \exists U, V$ abiertos disjuntos tales que $x \in U$ y $y \in V$. Al cumplirse T_1 $\overline{\{x\}} = \overline{\{x\}}$ y $\overline{\{y\}} = \overline{\{y\}}$, de aquí que $\overline{\{x\}} = \overline{\{x\}} \subseteq U$ y $\overline{\{y\}} = \overline{\{y\}} \subseteq V$.

□

De esta manera, denotando la regularidad y le regularidad completa por R_2 y R_3 , respectivamente, tenemos la siguiente relación.



1.5. El axioma T_D . De manera similar a R_0 , la siguiente propiedad es más fuerte que T_0 , pero más débil que T_1 .

$$(T_D): \quad \forall x \in S, \exists U \in \mathcal{O}S \text{ tal que } x \notin U \text{ y } U \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S.$$

Podemos ver que T_1 implica T_D y que T_D implica T_0 .

Proposition 1.21. *Un espacio S satisface T_D si y solo si para cada $x \in S$*

$$(S \setminus \overline{\{x\}}) \cup \{x\} \in \mathcal{O}S.$$

Demostración. \Rightarrow): Consideremos un espacio S que satisface T_D y sea $U \in \mathcal{O}S$ como el que aparece en (\mathbf{T}_D) . Para $x \neq y$ el conjunto $V = (S \setminus \overline{\{x\}}) \cup \{x\}$ es una vecindad de y y una vecindad para x , pues si $x \in U$, entonces $U \setminus \overline{\{x\}} = U \setminus \{x\}$ y por lo tanto $x \in U \subseteq V$. De aquí que V es abierto.

\Leftarrow): Si $V = (S \setminus \overline{\{x\}}) \cup \{x\}$ es abierto tenemos que si $x \in V$, entonces

$$V \setminus \{x\} = (S \setminus \overline{\{x\}}) \cup \{x\} \setminus \{x\} = S \setminus \overline{\{x\}}$$

y $S \setminus \overline{\{x\}} \in \mathcal{O}S$. Por lo tanto $V \setminus \{x\}$ es abierto, es decir, S es T_D . □

Una de las aplicaciones de la propiedad T_D la podemos encontrar en la topología sin puntos. Recordemos que los subespacios están bien representados por su marco de congruencias. Con esto en mente, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 1.22. Sean X y Y subespacios distintos de S . $E_X \neq E_Y$ si y solo si S es un espacio T_D .

Demostración. \Rightarrow): Consideremos $X \neq Y$ tales que $E_X \neq E_Y$, en particular,

$$E_{S \setminus \{x\}} \neq E_S.$$

Por lo tanto existe un abierto $U \not\subseteq V$ tal que

$$U \cap (S \setminus \{x\}) = U \setminus \{x\} = V \cap (S \setminus \{x\}) = V \setminus \{x\}.$$

Lo cual solo es posible precisamente si $x \in U$ y $V = U \setminus \{x\}$, es decir, S es T_D .

\Leftarrow): Sean S un espacio T_D y $a \in X \setminus Y$. Consideremos los abiertos $U \ni a$ y $V = U \setminus \{a\}$. Entonces $U \cap X \neq V \cap X$ mientras $U \cap Y = V \cap Y$. Así $E_X \neq E_Y$. □

1.6. Sobriedad. A lo largo de estas notas encontramos distintas propiedades de separación. Cada una de estas utilizadas o presentadas para diferentes situaciones. La mayoría de ellas comparables entre si. La que presentamos ahora es la *sobriedad*.

En la Definición 1.14 mencionamos que un elemento $p \in A$ es \wedge -irreducible si $p \neq 1$ y si $a \wedge b \leq p$, entonces $a \leq p$ o $b \leq p$. En ocasiones, la noción anterior es presentada en la literatura como ser primo.

En la Subsección 2.1 vimos que para un espacio S y $x \in S$, entonces $S \setminus \overline{\{x\}}$ es un elemento \wedge -irreducible en $\mathcal{O}S$.

Definición 1.23. Un espacio se dice que es *sobrio* (en la formulación de Grothendieck y Dieudonné), si este es T_0 y si todos los elementos \wedge -irreducibles son de la forma $S \setminus \overline{\{x\}}$.

Notemos que bajo el supuesto de que todos los espacio con los que trabajaremos son T_0 , la asignación $x \mapsto S \setminus \overline{\{x\}}$ es inyectiva. De esta manera, los elementos \wedge -irreducibles en los espacios sobrios están determinados de manera única.

Proposition 1.24. *Cada espacio T_2 es sobrio, pero la sobriedad es incomparable con T_1 .*

Demostración. i) Sean S un espacio T_2 y $P \in \mathcal{O}S$ un elemento \wedge -irreducible. Supongamos que existe $x, y \notin P$, con $x \neq y$. Por T_2 , elegimos $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. De aquí que

$$P = (P \cup U) \cap (P \cup V) = P \cup (U \cap V) = P \cup \emptyset.$$

Notemos que ni $P \cup U$ o $P \cup V$ es P . Por lo tanto $P = S \setminus \{x\}$, es decir, S es sobrio.

ii) Consideremos S un espacio infinito dotado de la topología cofinita, es decir,

$$U \in \mathcal{O}S \Leftrightarrow U = \emptyset \text{ o } S \setminus U \text{ es finito.}$$

Este espacio es T_1 , pero no es sobrio, pues \emptyset es un elemento \wedge -irreducible y $\emptyset \neq S \setminus \overline{\{x\}}$ para todo $x \in S$.

iii) Sea S el espacio de Sierpinski, es decir,

$$S = (S = \{0, 1\}, \mathcal{O}S = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}).$$

Los elementos \wedge -irreducibles son $\emptyset = S \setminus \overline{\{1\}}$ y $\{1\} = S \setminus \overline{\{0\}}$, por lo tanto S es sobrio, pero no es T_1 .

□

Si tenemos un espacio S que no es sobrio, entonces podemos “*sobrificarlo*” por medio de elementos en $\mathcal{O}S$. A este proceso se le conoce como la construcción de la reflexión sobria.

Corolario 1.25. *Un espacio sobrio S puede ser reconstruido a partir de los elementos de $\mathcal{O}S$.*

Por el Corolario 1.25, para un espacio S arbitrario que es T_0 podemos construir un espacio \tilde{S} dado por

$$\tilde{S} = (\{F \mid F \text{ es un filtro completamente primo en } \mathcal{O}S\}, \{\tilde{U} \mid U \in \mathcal{O}S\}),$$

donde $\tilde{U} = \{F \mid U \in F\}$.

Como nuestros filtros son no triviales, tenemos $\tilde{\ } = \emptyset$ y $\tilde{S} = S$. Además,

$$\begin{aligned}\tilde{U} \cap \tilde{V} &= \{F \mid U \in F, V \in F\} = \{F \mid U \cap V \in F\} = \widetilde{U \cap V} \\ \bigcup_{i \in J} \tilde{U}_i &= \{F \mid \bigcup_{i \in J} U_i \in F\} = \{F \mid \exists i \in J, U_i \in F\} = \bigcup_{i \in J} \tilde{U}_i\end{aligned}$$

es decir, la modificación sobria es una topología. Finalmente, denotando

$$F(x) = \{U \mid x \in U\},$$

de esta manera si $U \not\subseteq V$ existe $x \in U \setminus V$ y por lo tanto $F(x) \in \tilde{U} \setminus \tilde{V}$. De esta manera obtenemos

Observación 1.26. La asignación $U \mapsto \tilde{U}$ establece un isomorfismo entre $\mathcal{O}S$ y $\mathcal{O}\tilde{S}$.

Con todo lo anterior, podemos concluir que la modificación sobria se comporta de manera agradable. Resta verificar que efectivamente hacer esta construcción nos devuelve un espacio sobrio.

Proposition 1.27. *El espacio \tilde{S} es sobrio.*

Para terminar esta sección, recordemos que los funtores \mathcal{O} y pt forman una adjunción. Los resultados anteriores proporcionan la información de cuando entre estos dos existe una equivalencia. Si nos restringimos a espacios sobrios y marcos espaciales tenemos

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \xrightarrow{(\square)} & \text{sob} \\ \mathcal{O} \downarrow & \uparrow \text{pt} & \downarrow \cong \\ \text{Frm} & \xrightarrow{sp} & \text{Frm}_{sp} \end{array}$$

2. “Traducciones” de los axiomas de separación (libres de puntos)

Cuando hacemos mención a “traducción” nos referimos a trasladar cada una de las distintas nociones dadas en el lenguaje sensible a puntos a lo que significan cada una de estas en el lenguaje de retículas de abiertos. Recordemos que en $\mathcal{O}S$, los objetos con los que trabajamos son los conjuntos abiertos. De esta manera, nuestro objetivo es trasladar los axiomas de separación en términos de los elementos en $\mathcal{O}S$.

De manera similar a como fueron enunciados en la sección anterior, presentaremos los axiomas de separación en orden ascendente según la “fuerza” de estos. Comenzaremos con T_0 y terminaremos con la noción de normalidad. Para diferenciar de estos axiomas de

su variante sensible a puntos, colocaremos una “s” como subíndice para hacer referencia que esa versión es libre de puntos. Aclaremos que en esta parte no se hará mención a la traducción de ser T_2 . Esta recibirá un tratamiento especial más adelante.

2.1. T_0 sin puntos. Primero, recordemos que la propiedad de separación T_0 nos menciona que si tenemos cualesquiera dos puntos de un espacio, estos pueden ser separados por un conjunto abierto de tal manera que un punto este en el abierto y el otro no. En el lenguaje de retículas, esta noción no aporta mucha información. Si T_0 no se cumple, entonces para $x, y \in S$ distintos se tiene que para todo abierto $U \in \mathcal{O}S$, $x \in U$ si y solo si $y \in U$.

De esta manera, en el lenguaje de retículas de abiertos, estos dos puntos son indistinguibles. Por lo tanto, para evitar esta situación, supondremos que el axioma T_0 se cumple para los distintos espacios con los que trabajaremos. Además, bajo este supuesto, no se buscará una equivalencia para esta noción.

2.2. T_1 sin puntos. Sabemos que en un espacio T_1 , para todo $x \in S$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$, es decir, los conjuntos de un punto son cerrados, en consecuencia todos los conjuntos finitos son cerrados. Luego, si $\{x\}$ es cerrado, entonces $S \setminus \{x\}$ es abierto. Además, se puede verificar que este es un elemento máximo en $\mathcal{O}S$. También, los elementos de la forma $S \setminus \overline{\{x\}}$ son \wedge -irreducibles. Por lo tanto, lo anterior sería un esbozo de la prueba del siguiente resultado.

Proposition 2.1. *Decimos que un espacio S es T_1 si y solo si se cumple lo siguiente:*

(T_{1s}): *todo elemento \wedge -irreducible es máximo.*

Observemos que la Proposición 2.1 no esta escrita como tal en el lenguaje de la retícula de abiertos (no está escrita para cualquier elemento arbitrario de $\mathcal{O}S$). Esto podría motivarnos a pensar que la traducción no termina siendo una versión satisfactoria, pero por el momento la utilizaremos como un ejemplo que permita mostrar como las caracterizaciones espaciales pueden determinar una nueva caracterización para elementos de $\mathcal{O}S$.

2.3. Regularidad sin puntos. Para obtener la noción sin puntos de la regularidad necesitamos dar antes una definición.

Definición 2.2. Para $U, V \in \mathcal{O}S$ decimos que V está *bastante por debajo* de U , y lo denotamos por $V \prec U$, si $\overline{V} \subseteq U$.

Notemos que la definición anterior no está aun en el lenguaje de retículas de abiertos, pero hay una manera de arreglarla, pues en $\mathcal{O}S$ existen los pseudocomplementos, es decir, para todo $U \in \mathcal{O}S$ existe un mayor elemento $V \in \mathcal{O}S$ tal que $U \cap V = \emptyset$. De esta manera, para $V^* = S \setminus \overline{V}$, tenemos

$$V \prec U \Leftrightarrow \overline{V} \subseteq U \Leftrightarrow U \cup V^* = S.$$

Así, la noción de regularidad sin puntos está dada por lo siguiente.

Proposition 2.3. *Decimos que un espacio S es regular si y solo si se cumple lo siguiente:*

(regs): Para todo $U \in \mathcal{O}S$, $U = \bigcup \{V \mid V \prec U\}$.

Demostración. \Rightarrow): Supongamos que S es regular y sea $U \in \mathcal{O}S$. Para $x \in U$ consideramos $A = S \setminus U$ y por la regularidad tenemos que existe $V_x, W \in \mathcal{O}S$ tales que $x \in V_x$, $A \subseteq W$ y $V_x \cap W = \emptyset$. Como $A \subseteq W$, entonces $W \cup U = S$, de aquí que $x \in V_x \succ U$. Por lo tanto

$$U = \bigcup \{V_x \mid x \in S\} \subseteq \bigcup \{V \mid V \succ U\} \subseteq U$$

\Leftarrow): Supongamos que $U = \bigcup \{V \mid V \succ U\}$ y sea $x \notin U$ donde $U \in \mathcal{O}S$. De aquí que $x \in U = S \setminus A$ y por lo tanto $x \in V$ para algún $V \succ U$. De aquí que, para $W = S \setminus \overline{V}$, $A \subseteq W$ y $V \cap W = \emptyset$, es decir, se cumple la regularidad. \square

Equivalentemente a lo que hicimos en la sección anterior

$$T_{3s} = (\mathbf{regs}) + T_{1s}.$$

2.4. Completamente regular sin puntos. Recordemos que si S es un espacio completamente regular, entonces S es regular. Con esto en mente podríamos esperar que la traducción de completamente regular tenga relación con la noción bastante por debajo. La manera más natural de realizarlo sería interpolando \prec , es decir, si para U, V abiertos tales que $V \prec U$, existe W abierto para el cual $V \prec W \prec U$, pero eso no es del todo cierto.

Para reparar esto, consideremos el conjunto D de los racionales diádicos en el intervalo unitario cerrado $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, es decir,

$$D = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, 2^n \right\}.$$

Definición 2.4. Para $U, V \in \mathcal{O}S$, decimos que V está *completamente por debajo* de U , denotado por $V \prec\prec U$, si existen abiertos U_d , con $d \in D$, tales que

$$U_0 = V, \quad U_1 = U, \quad U_d \prec U_e,$$

es decir, $\overline{U_d} \subseteq U_e$ para $d < e$.

Notemos lo siguiente:

- Si $V' \subseteq V \prec\prec U \subseteq U'$, entonces $V' \prec\prec U'$.
- La relación $\prec\prec$ es interpolativa.
- Si W interpola $\prec\prec$, entonces W interpola \prec .

Recordemos que la noción de completamente regular realiza la separación entre un punto $x \in S$ y un subconjunto cerrado $A \subseteq S$ a través de una función continua. La función definida en el siguiente resultado es la que nos va a funcionar para nuestra próxima traducción.

Proposition 2.5. Para un espacio topológico S consideremos $U_d \in \mathcal{O}S$, con $d \in D$, tal que $U_0 = V$, $U_1 = U$ y $U_d \succ U_e$, para $d < e$. Definimos

$$\Phi(x) = \inf\{d \mid x \in U_d\}.$$

Entonces Φ es continua.

Así, usando la Definición 2.4 y la Proposición 2.5, tenemos

Proposition 2.6. Decimos que un espacio topológico S es *completamente regular* si y solo si se cumple lo siguiente:

(creg_S): para todo $U \in \mathcal{O}S$, $U = \bigcup\{V \mid V \prec\prec U\}$.

Demostración. \Rightarrow): Sea S completamente regular. Consideremos $U \in \mathcal{O}S$ y $x \in U$. Entonces $x \in S \setminus U$ y por lo tanto existe una función continua $f: S \rightarrow \mathbb{I}$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para $y \notin U$. Para $d \in D$ consideramos

$$U_d = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1+d}{2}\right)\right) \text{ y } B_d = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1+d}{2}\right]\right),$$

de aquí que $U_d \in \mathcal{O}S$ y $B_d \in \mathcal{C}S$ y para $d < e$, $B_d \subseteq U_e$. Así $B_d = \overline{U_d} \subseteq U_e$, es decir, $U_d \succ U_e$. Y por la Definición 2.4 tenemos que para $U(x) = U_0 \succ\prec U_1$. Como $x \in U(x)$ y $U_1 \subseteq U$, por la interpolatividad de $\succ\prec$, tenemos que $x \in U(x) \succ\prec U$. Por lo tanto

$$U = \bigcup\{U(x) \mid x \in S\} \subseteq \bigcup\{V \mid V \succ\prec U\} \subseteq U$$

\Leftarrow): Supongamos que $U = \bigcup\{V \mid V \succ U\}$ se cumple y consideremos $A \in \mathcal{C}S$ tal que $x \notin A$. Para $U = S \setminus A$, entonces $x \in U$ y por hipótesis tenemos $V \succ U$ tal que $x \in V$. Si tomamos un sistema $(U_d)_{d \in D}$ como testigo para $V = U_0 \succ U_1 = U$ y la función continua definida en la Proposición 2.5 vemos que $\Phi(x) = 0$, pues $x \in U_d$, para $d \in D$, en particular para U_0 y 0 es el menor de los d . Para $y \in A$,

$$\Phi(y) = \inf\{d \mid y \in U_d\},$$

pero $y \in A$, es decir, $y \notin U_d$ para $d \in D$, entonces $d \mid y \in U_d = \emptyset$, de aquí que $\Phi(y) = 1$ y se cumple la definición de completamente regular. \square

Por lo tanto

$$T_{3\frac{1}{2}S} = (\mathbf{creg}_S) + T_{1S}.$$

2.5. Normalidad sin puntos. La normalidad es una noción que está enunciada sin el uso de puntos. De esta manera su traducción al lenguaje de retículas de conjuntos abiertos es más sencilla. En la normalidad separamos cualesquiera dos conjuntos cerrados distintos por medio de dos abiertos disjuntos.

Para un espacio S , consideremos $A, B \in \mathcal{C}S$, entonces $X = S \setminus A$ y $Y = S \setminus B$ están en $\mathcal{O}S$. Además, $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, para abiertos U y V , si y solo si $X \cup U = Y \cup V = S$. Lo anterior nos proporciona la versión sin puntos de la normalidad.

Proposition 2.7. *Decimos que un espacio topológico S es normal si y solo si se cumple lo siguiente:*

(norm_S): Para $X, Y \in \mathcal{O}S$, con $X \cup Y = S$ existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$X \cup U = S, \quad Y \cup V = S, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Por lo tanto

$$T_{4S} = (\mathbf{norm}_S) + T_{1S}.$$

2.6. Axiomas de separación en la categoría Frm. Sabemos que si S es un espacio topológico, $\mathcal{O}S$ es un marco. Todo lo que hemos hecho en esta sección es dar la equivalencia de las propiedades de separación en términos de elementos en $\mathcal{O}S$, es decir, para un marco particular. En este punto debemos preguntarnos lo siguiente, ¿qué pasa para un marco A arbitrario?

Para responder la pregunta anterior lo único que necesitamos hacer es trasladar las nociones presentadas considerando elementos arbitrarios en un marco A en lugar de

conjuntos abiertos en $\mathcal{O}S$. La siguiente es la equivalencia de bastante por debajo en la teoría de marcos.

$$a < b \equiv_{dm} \exists c \in A \text{ tal que } a \wedge c = 0 \text{ y } b \vee c = 1$$

donde $a, b \in A$.

Con esto en mente, podemos dar la respectiva equivalencia para que un marco sea regular y completamente regular. Usaremos m como subíndice para indicar que las nociones están dadas en el lenguaje de marcos.

$$(\mathbf{reg}_m): \forall a \in A, a = \bigvee \{x \in A \mid x < a\}.$$

$$(\mathbf{creg}_m): \forall a \in A, a = \bigvee \{x \in A \mid x < < a\}.$$

Ahora damos la noción de normalidad para marcos.

$$(\mathbf{norm}_m): \forall a, b \in A, \text{ tales que } a \vee b = 1, \exists u, v \in A \text{ tales que}$$

$$a \vee u = b \vee v = 1 \text{ y } u \wedge v = 0$$

3. Las nociones de subajustado y ajustado

Estas nociones aparecieron en la literatura como propiedades bajas de separación, ideales para ser tratadas en el contexto sin puntos, subajustado fue la primera en ser enunciada. En 1938, Wallman la presento con el nombre de propiedad disyuntiva (ver [13]). Años más tarde se formula su noción dual, conocida como propiedad conjuntiva y es la manera en la que actualmente se trabaja con la propiedad de que un espacio sea subajustado. Con la intención de resolver algunos defectos categóricos que presentaba esta noción, se introduce la propiedad de espacio ajustado. Como veremos más adelante, esta última implica subajustado.

De manera similar a como presentamos los axiomas de separación, daremos dos versiones diferentes (pero equivalentes entre si), de subajustado y ajustado. A estas las llamaremos nociones de primer orden y segundo orden, según la forma en la que sean enunciada.

3.1. Subajustado. Para comenzar a hablar de esta noción consideremos un espacio S y $\mathcal{C}S$ su retícula de conjuntos cerrados. Wallman presenta la propiedad disyuntiva como

$$\text{Si } A \neq B, \exists C \subseteq S \text{ tal que } A \cap C \neq \emptyset = S \cap C$$

donde $A, B, C \in \mathcal{C}S$.

Notemos que para efectos de la teoría que nos interesa desarrollar, necesitamos la noción dual, que como mencionamos al principio de esta sección, fue presentada como propiedad conjuntiva, actualmente subajustado.

Definición 3.1. Diremos que un espacio S es *subajustado* si

(**saju**): para $A \not\subseteq B \exists C \subseteq S$ tal que $A \cup C = S \neq B \cup C$, donde $A, B, C \in \mathcal{O}S$.

A la forma en la que está enunciada esta noción la denominaremos como *de primer orden*. De manera similar a como trabajamos con los axiomas de separación, debemos notar que la definición anterior está dada únicamente para el marco $\mathcal{O}S$. Podemos obtener una definición más general si sustituimos $\mathcal{O}S$ por un marco arbitrario L y los conjuntos abiertos A, B, C por elementos en el marco a, b, c . Por último, debemos sustituir las operaciones *unión (intersección)*, por *supremo (ínfimo)*, respectivamente.

Teorema 3.2. *Un espacio es subajustado, es decir $\mathcal{O}S$ satisface (**saju**), si y solo si para cada $x \in S$ y cada abierto $U \in \mathcal{O}S$ existe $y \in S$ tal que $y \in \overline{\{x\}}$ con $\overline{\{y\}} \subseteq U$.*

Demostración. \Rightarrow : Supongamos que el espacio S es subajustado y sea $U \ni x$ un abierto. Como $U \not\subseteq U \setminus \overline{\{x\}}$, por (**saju**), existe $W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$U \cup W = S \quad \text{y} \quad (U \setminus \overline{\{x\}}) \cup W \neq S. \quad (3)$$

Tomando $y \notin (U \setminus \overline{\{x\}}) \cup W$. Entonces

$$y \notin U \setminus \overline{\{x\}}, \quad y \notin W, \quad y \in \overline{\{x\}}. \quad (4)$$

Sea $z \notin U$ para algún $z \in \overline{\{y\}}$, por 3, $z \in W$. Al ser W abierto, $y \in W$, lo cual contradice 4. Por lo tanto se debe cumplir que $\overline{\{y\}} \subseteq U$.

\Leftarrow : Consideremos $U \not\subseteq V$. Sean $x \in U \setminus V$ y $y \in S$ tal que $y \in \overline{\{x\}}$ con $\overline{\{y\}} \subseteq U$. Entonces para $W = S \setminus \overline{\{y\}}$ se cumple que $W \cup U = S$ y $y \notin W \cup V$, pues si $y \in V$, entonces $x \in V$, lo cual no ocurre. Por lo tanto $W \cup V \neq S$, es decir S es subajustado. \square

Subajustado resulta ser más débil que la propiedad T_1 . Por ejemplo, si consideramos el espacio $\omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\omega\}$ donde $U \in \mathcal{O}\omega + 1$ si $\omega \in U$ o $U = \emptyset$, este es un espacio que cumple (**saju**), pero no es T_1 .

Proposition 3.3. T_D y (**saju**) coinciden con T_1 .

Demostración. Sabemos que T_1 implica subajustado y T_D . Ahora consideremos un espacio S que es T_D y subajustado. Por T_D elegimos un abierto $U \ni x$ tal que $U \setminus \{x\}$ es abierto. Al ser subajustado tenemos que existe $W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$W \cup U = S \neq W \cup (U \setminus \{x\}).$$

Entonces $W \cup (U \setminus \{x\}) = (W \cup U) \cap (W \cup S \setminus \{x\}) = S \setminus \{x\}$ el cual es un conjunto abierto. Por lo tanto $\{x\}$ es cerrado, es decir, S es T_1 . \square

Corolario 3.4. T_D y (**saju**) son incomparables.

Notemos que la normalidad más T_0 no implican completamente regular (y en consecuencia no implican regularidad), para solucionar esto lo que hicimos en la Sección 1 fue pedir que los espacios fueran T_1 . Con la noción de subajustado podemos pedir menos que esto.

Proposition 3.5. *Un espacio subajustado y normal es regular.*

Demostración. Sea S un espacio normal y subajustado y supongamos que no se cumple

$$U \neq \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \succ U\}.$$

Por (**saju**) existe $W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$W \cup U = S \quad \text{y} \quad W \cup \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \succ U\} \neq S.$$

Por la normalidad existen $U_1, U_2 \in \mathcal{O}S$ tales que

$$U \cup U_1 = W \cup U_2 = S \quad \text{y} \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

De aquí que $\overline{U_2} \subseteq U$ lo cual implica que $U_2 \succ U$.

Así $U_2 \subseteq \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \succ U\}$. Luego $W \cup \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \succ U\} = S$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $U = \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \succ U\}$. \square

El resultado anterior es válido para la normalidad y la regularidad sin puntos.

Para establecer (**saju**) consideramos un elemento $b \neq 0$. Si quitamos esta restricción obtenemos la noción de *débilmente subajustado*.

(**dsaju**): para $a \neq 0 \exists c \neq 1$ tal que $a \vee c = 1$.

Para un espacio S , el marco $\mathcal{O}S$ es débilmente subajustado si y solo si cada conjunto abierto no vacío contiene un conjunto cerrado no vacío, en otras palabras,

$$\forall U \in \mathcal{O}S, \text{ con } U \neq \emptyset, \exists x \in U \text{ tal que } \overline{\{x\}} \subseteq U.$$

Como su nombre nos lo sugiere, débilmente subajustado es más débil que subajustado.

Ejemplo 3.6. Consideremos $S = \mathbb{N} \cup \{\omega_1, \omega_2\}$ dotado de la topología

$$\{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\} \cup \{A \cup \{\omega_1\} \mid A \subseteq \mathbb{N}\} \cup \{A \cup \{\omega_1, \omega_2\} \mid A \subseteq \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$$

con $\mathbb{N} \setminus A$ finito. Notemos que $\overline{\{n\}} = \{n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{\{\omega_1\}} = \{\omega_1, \omega_2\}$ y $\overline{\{\omega_2\}} = \{\omega_2\}$. $\mathcal{O}S$ es débilmente subajustado (ya que cada abierto no vacío contiene un conjunto cerrado $\{n\}$ para $n \in \mathbb{N}$), pero no es subajustado pues no satisface la condición del Teorema 3.2. Si consideramos $U = \mathbb{N} \cup \{\omega_1\}$ *in* $\mathcal{O}S$ y $x = \omega_1 \in U$ tenemos $\overline{\{x\}} = \{\omega_1, \omega_2\}$, pero

$$\overline{\{\omega_1\}}, \overline{\{\omega_1\}} \not\subseteq U.$$

Existe mucha información sobre la relación que existe entre (**saju**) y (**dsaju**). Nuestro objetivo no es abordar todo esto. Para quien este interesado en consultar más detalle, consultar [8]. Por el momento solo nos concentraremos en algunos detalles y caracterizaciones entre subajustado y ajustado.

3.2. Ajustado. Es el momento de analizar esta noción que fue dada por Isbell para solucionar los defectos categóricos que presentaba subajustado (ver [2]). Comenzaremos abordando nuevas caracterizaciones de marcos subajustados para después trasladarlas a los marcos ajustados.

A partir de este momento, comenzaremos a trabajar con cuestiones locales, por ende, comenzaremos a usar términos como “sublocal”, “sublocal abierto” y “sublocal cerrado” ($o(_)$ y $c(_)$, respectivamente), los anteriores fueron introducidos en 1.10. Para ver información sobre sublocales y su correspondencia con los núcleos, sugerimos consultar [5] o [14].

Proposition 3.7. *Sea L subajustado. Entonces para cada sublocal $S \neq L$ existe un sublocal cerrado no vacío $c(a)$ tal que $c(a) \cap S = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ es el sublocal correspondiente al elemento 1.*

Demostración. Por contrapositiva, consideremos $S \subseteq L$ disjunto de todo sublocal cerrado no vacío, es decir,

$$c(a) \cap S = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{0} = \{1\}$ es el sublocal correspondiente al elemento 1 y $c(a) \neq \mathbf{0}$. Sea j_s el núcleo asociado a S , es decir,

$$j_s(x) = \bigwedge \{s \in S \mid x \leq s\}.$$

Notemos que si $j_s(a) = 1$, entonces $a = 1$. Consideremos $x \in L$ arbitrario y sea $c \vee j_s(x) = 1$. Sabemos que $j_s(c \vee x) \leq c \vee j_s(x) = 1$. De aquí que $c \vee x = 1$. Por (**saju**), $c \vee x = 1 = c \vee j_s(x)$, entonces $j_s(x) \leq x$ y por lo tanto $j_s(x) = x$, es decir $x \in S$ y $L \subseteq S$. Por lo tanto $S = L$. \square

El siguiente resultado ejemplifica la cuestión que mencionamos al principio de esta sección en donde mencionamos que las nociones las distinguiremos como de primer orden y segundo orden.

Teorema 3.8. *Las siguientes afirmaciones sobre un marco L son equivalentes.*

1. L es subajustado.
2. El único sublocal de L que es disjunto de un sublocal cerrado no vacío es el mismo L .
3. Cada sublocal abierto en L es supremo de sublocales cerrados.

Demostración. 1) \Rightarrow 2): Es la prueba del Teorema 3.7.

2) \Rightarrow 3): Consideremos un sublocal abierto $o(a)$ y sea

$$S = \bigvee \{c(b) \mid c(b) \subseteq o(a)\}.$$

Sea $c(x)$ un sublocal cerrado disjunto de $c(a) \vee S$. De aquí que

$$c(x \vee a) = [x \vee a, 1] = [x, 1] \cap [a, 1] = c(x) \cap c(a)$$

Notemos que por la forma en que consideramos a $c(x)$ tenemos que $c(x) \vee c(a) = \mathbf{0}$. Así $c(x) \subseteq o(a)$ y $c(x) \subseteq S$. Además. $c(x) \cap S = \mathbf{0}$, entonces $c(x) = \mathbf{0}$. Luego, por hipótesis, al ser $c(a) \vee S$ un sublocal cerrado y disjunto de un sublocal cerrado no vacío tenemos que $c(a) \vee S = L$. De aquí que $o(a) \subseteq S$ y $S \subseteq o(a)$. Por lo tanto $S = o(a)$.

3) \Rightarrow 1): **Afirmación:**

$$c(a) \subseteq o(b) \Leftrightarrow a \vee b = 1 \tag{5}$$

Prueba de la afirmación: Supongamos que $c(a) \subseteq o(b)$. Notemos que

$$c(a \vee b) = c(a) \cap c(b) \subseteq o(a) \cap c(b) = \mathbf{0},$$

es decir, $a \vee b = 1$.

Recíprocamente, supongamos $a \vee b = 1$. Notemos que $c(a \vee b) = 0$ y $c(a \vee b) = c(a) \cap c(b) = 0$. Por lo tanto $c(a) \subseteq o(b)$.

Ahora, si $a \not\leq b$, entonces $o(a) \not\subseteq o(b)$ y así existe $x \in L$ tal que $c(x) \subseteq o(a)$ y $c(x) \not\subseteq o(b)$, *es decir*, $x \vee a = 1$ y $x \vee b \neq 1$. Por lo tanto L es subajustado \square

La equivalencia $1) \Leftrightarrow 3)$ es lo que denominaremos como noción de *segundo orden*. Para abreviarla únicamente nos referiremos a ella como **abierto como supremo**. Esta fue la forma en la que Isbell enunció subajustado, para la noción de ajustado tenemos

cada sublocal cerrado es ínfimo de sublocales abiertos

y de la misma manera que lo hicimos para subajustado, nos referiremos a ella como **cerrado como ínfimo**. Esta será nuestra noción de segundo orden para ajustado. La noción de primer orden vienen enunciada en el siguiente teorema.

Teorema 3.9. *Cada sublocal cerrado en L es ínfimo de abiertos si y solo si*

(aju): $\forall a, b \in L, a \not\leq b, \exists c \in L$ tal que $a \vee c = 1$ y $c \succ b \neq b$.

Demostración. Supongamos que $c(a) = \bigcap \{o(x) \mid x \in L\}$, por 5, es equivalente a

$$c(a) \subseteq \bigcap \{o(x) \mid x \in L\} \quad \text{y} \quad c(a) \supseteq \bigcap \{o(x) \mid x \in L\},$$

que por 5 es equivalente a

$$c(a) \subseteq \bigcap \{o(x) \mid x \vee a = 1\} \quad \text{y} \quad c(a) \supseteq \bigcap \{o(x) \mid x \vee a = 1\},$$

es decir, si $b \in \bigcap \{o(x) \mid x \vee a = 1\}$, entonces $b \in c(a)$. Todo lo anterior equivale a las afirmaciones

$$a \vee x = 1 \quad \text{y} \quad (x \prec b) = b \quad \Rightarrow \quad a \leq b$$

donde $(x \prec b) = b$ se cumple por la correspondencia del sublocal abierto con el núcleo $v_x(b)$. Así, considerando la negación de la implicación anterior obtenemos **(aju)**. \square

Veamos ahora que ajustado implica subajustado, para probar esto haremos uso de las nociones de primer orden. Supongamos que L es ajustado, entonces considerando el c de la fórmula tenemos que si $c \vee b = 1$, entonces

$$b = (1 \succ b) = ((c \vee b) \succ b) = (c \succ b) \wedge (b \succ b) = (c \succ b),$$

es decir, $b = (c \succ b)$, lo cual es equivalente a que si $b \neq (c \succ b)$, entonces $c \vee b \neq 1$ y recuperamos la fórmula de primer orden de **(saju)**.

Las afirmaciones abierto como supremo y cerrado como ínfimos podrían parecer duales entre sí, pero como vimos antes, ajustado es más fuerte. De hecho, como veremos más adelante, ajustado es equivalente a una afirmación más fuerte sobre sublocales arbitrarios.

Ejemplo 3.10. La topología cofinita proporciona el ejemplo de un espacio que es subajustado, pero no es ajustado. Para verificar lo anterior basta calcular la implicación para cualesquiera dos subconjuntos $U, V \in S$, donde S tiene la topología cofinita. Notemos que para este caso, S es T_1 y en consecuencia, S es subajustado. Con la información anterior y realizando los cálculos de la implicación podemos concluir que S no cumple con la fórmula de primer orden de (**aju**).

Observemos que las nociones de segundo orden están enunciadas para los sublocales de un local, al trasladarlas a los subespacios abiertos y cerrados de un espacio son diferentes a las de ajustado y subajustado.

Proposition 3.11. *Las siguientes afirmaciones sobre un espacio S son equivalentes.*

1. Cada subconjunto abierto $U \subseteq S$ es la unión de subconjuntos cerrados.
2. Cada subconjunto cerrado $A \subseteq S$ es la intersección de subconjuntos abiertos.
3. S es un espacio simétrico.

Demostración. 1) \Leftrightarrow 2): Sean U abierto y $A = U'$ cerrado. Si $U = \bigcup A_i$, con A_i cerrados

$$A = U' = \left(\bigcup A_i \right)' = \bigcap A_i'$$

donde A_i son subconjuntos abiertos.

1) \Rightarrow 3): Si $x \notin \overline{\{y\}}$, entonces $x \in S \setminus \overline{\{y\}}$ y por i) $\overline{\{x\}} \subseteq S \setminus \overline{\{y\}}$. Por lo tanto $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$ y $y \notin \overline{\{x\}}$.

3) \Rightarrow 1): Sea U abierto tal que $\overline{\{y\}} \subseteq U$, por la simetría $x \in \overline{\{y\}}$ si y solo si $y \in \overline{\{x\}}$. Ahora

$$U = \bigcup \{ \overline{\{x\}} \mid x \in U \}$$

y $\overline{\{x\}}$ es cerrado. □

Proposition 3.12. *Las siguientes afirmaciones sobre un espacio S son equivalentes.*

1. Cada subconjunto $M \subseteq S$ es la unión de subconjuntos cerrados.
2. Cada subconjunto $M \subseteq S$ es la intersección de subconjuntos abiertos.
3. S es un espacio T_1 .

Demostración. 1) \Leftrightarrow 2): De manera similar a la proposición anterior, hacemos uso de las leyes de De Morgan.

1) \Rightarrow 3): Consideremos $\{x\} \subseteq S$. Por hipótesis, $\{x\}$ es la unión de cerrados. Por lo tanto $\{x\}$ es cerrado.

3) \Rightarrow 1): Notemos que si S es T_1 , entonces $\{x\}$ es cerrado. Además

$$M = \bigcup \{\{x\} \mid x \in M\}.$$

□

3.3. Subajustado y ajustado en sublocales. Es momento de ver como se comportan estas nociones para los sublocales de un local. En esta subsección enunciaremos los resultados necesarios para identificar bajo que circunstancias estas propiedades son hereditarias o no.

Antes de comenzar, mostraremos primero una propiedad que cumple la implicación y el núcleo asociado a un sublocal.

Proposition 3.13. *Si $s \in S$ entonces para el núcleo asociado j_S y cualquier $a \in L$ se cumple que $a \succ s = j_S(a) \succ s$*

Demostración. Por propiedades de la implicación, $a \leq j_S(a)$ si y solo si $(j_S(a) \succ s) \leq (a \succ s)$. Para la otra desigualdad, sabemos que $a \leq ((a \succ s) \succ s)$. Además, $s \leq ((a \succ s) \succ s)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} j_S(a) \leq ((a \succ s) \succ s) &\Leftrightarrow (((a \succ s) \succ s) \succ s) \leq (j_S(a) \succ s) \\ &\Leftrightarrow (a \succ s) \leq (j_S(a) \succ s). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.14. *Cada sublocal de un marco ajustado es ajustado.*

Demostración. Sea L un marco ajustado y $S \subseteq L$ un sublocal. Si $a \not\leq b$ en S , entonces $a \not\leq b$ en L . Como L existe $c \in L$ tal que $c \vee a = 1$ y $(c \succ b) = b$. Consideremos $c' = j_S(c)$, entonces

$$c' \vee^S a \geq c' \vee a \geq c \vee a = 1,$$

es decir, $c' \vee^S a = 1$ y por la Proposición 3.13 tenemos que $(c' \succ b) \neq b$. Por lo tanto S es subajustado. □

Teorema 3.15. *Cada marco L es ajustado si y solo si cada uno de sus sublocales es subajustado.*

Demostración. \Rightarrow): Si L es ajustado, entonces por la Proposición 3.14 S es ajustado lo cual implica que S es subajustado.

\Leftarrow): Por contradicción, supongamos que S es subajustado y que L no es ajustado. Entonces existen $a \not\leq b$ tales que para cada $u \in L$ se cumple $a \vee u = 1$ y $(u \succ b) = b$. Consideremos el conjunto

$$S = \{x \mid a \vee u = 1 \Rightarrow (u \succ x) = x\}$$

Afirmación: S es un sublocal.

Prueba de la afirmación:

1. $1 \in S$, pues si $a \vee u = 1$, entonces $(u \succ 1) = 1$.
2. Si x_i y $a \vee u = 1$, entonces $(u \succ x_i) = x_i$ para todo i y por lo tanto

$$(u \succ \bigwedge x_i) = \bigwedge (u \succ x_i) = \bigwedge x_i,$$

de modo que $\bigwedge x_i \in S$.

3. Consideremos $x \in S$, $y \in L$ y $a \vee u = 1$. Luego

$$(u \succ (y \succ x)) = (y \succ (u \succ x)) = (y \succ x),$$

de aquí que $(y \succ x) \in S$. Por lo tanto S es un sublocal.

Así S es subajustado. Notemos que $a, b \in S$, pues si $a \vee u = 1$ entonces

$$a = ((a \vee u) \succ a) = (a \succ a) \wedge (u \succ a) = (u \succ a).$$

De esta manera, como $a \not\leq b$ existe $c \in S$ tal que $a \vee^S c = 1 \neq b \vee^S c$. Recordemos que, en general, el supremo en S puede ser más grande que cuando se toma en L . Sin embargo, si $a \vee u = 1$ entonces

$$(u \succ (a \vee c)) = \bigwedge \{x \in S \mid u \vee x = 1, x \geq a \vee c\} = a \vee c,$$

pues $u \vee a \vee c = 1$. Por lo tanto $a \vee c \in S$ y éste coincide con $a \vee^S c$. De aquí que $a \vee^S c = 1 = a \vee c$ y $1 = (c \succ c) = c$ lo cual es una contradicción. Así L es ajustado. \square

Corolario 3.16. *Subajustado no es una propiedad hereditaria.*

El Ejemplo 3.10 nos proporciona un espacio subajustado que no es ajustado. Para este caso particular, si consideramos el espacio S con la topología cofinita, el marco $\mathcal{O}S$ es subajustado. Además, $\mathcal{O}S$ tiene muchos sublocales que no son subajustados, usando las fórmulas para $U \succ V$, se puede comprobar que las 3-cadenas $S_x = \{\emptyset, S \setminus \{x\}, S\}$, donde x varía en S , no son subajustados. Por lo tanto $\mathcal{O}S$ es subajustado, pero S_x no lo es. Sin

embargo, subajustado se hereda en algunos casos importantes.

La prueba del siguiente resultado usa el hecho de que para cualquier $a \in L$ se cumple que

$$o(a) \cap S = o_S(j_S(a)) \quad \text{y} \quad c(a) \cap S = c_S(j_S(a)).$$

Por lo tanto, si $a \in S$ tenemos que $o_S(a) = o(a) \cap S$ y $c_S(a) = c(a) \cap S$.

Teorema 3.17. *Sea S un sublocal complementado de un marco L subajustado. Entonces S es subajustado.*

Demostración. Sea $o_S(a)$ un sublocal abierto en S , entonces $o_S(a) = o(a) \cap S$ con $o(a)$ abierto en L . Luego como L es subajustado se cumple que

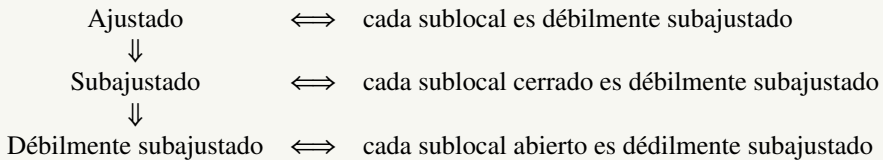
$$o(a) = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} c(b_i),$$

donde $c(b_i)$ son sublocales cerrados en L . Como S es complementado, podemos distribuir supremos arbitrarios con intersecciones finitas, es decir,

$$o_S(a) = o(a) \cap S = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} c(b_i) \cap S = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} (c(b_i) \cap S) = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} c_S(j_S(b_i)).$$

Por lo tanto cada sublocal abierto en S se puede ver como supremo de cerrados en S , es decir, S es subajustado. \square

Para terminar esta sección mostramos un diagrama en el que se recopilan caracterizaciones para las nociones (**aju**), (**saju**) y (**dsaju**). Para consultar las pruebas de todas estas, consultar [8].



4. Axiomas tipo Hausdorff

Para el análisis sin puntos de los axiomas de separación, la propiedad de que un espacio sea Hausdorff (o T_2), necesita ser tratada con mayor detalle. Esto debido a que no existe solo una manera de que esta propiedad sea abordada, dependiendo el enfoque o el objeto

de estudio, puede ser utilizada una “traducción” u otra.

En esta sección presentamos las distintas nociones sin puntos tipo Hausdorff que existen hasta el momento. Cabe mencionar que estas fueron enunciadas por diferentes matemáticos y algunas de ellas salieron a la luz casi al mismo tiempo. Cada una de las subsecciones posteriores serán dedicadas a presentarlas. Anexamos a las referencias bibliográficas los artículos originales donde estas se enunciaron. Sin embargo, de manera alternativa se puede consultar [8], donde su Capítulo 3 muestra gran parte de la información aquí contenida. También, aclaramos que los diferentes resultados que abordaremos serán presentados sin prueba, pero todos estos pueden encontrarse en las mismas referencias.

La razón por la cual se trabaja con diferentes nociones de que un marco sea Hausdorff se debe al comportamiento de cada una de ellas. Algunas son propiedades *conservativas* e incluso equivalentes entre si. En otras existe un buen comportamiento espacial. Dependiendo el uso que se les quiera dar podemos encontrar diferentes aplicaciones. Parte de nuestra análisis consiste en decidir (en caso de que se pueda), cual es la mejor de todas ellas y hacer uso de estas para caracterizar un fenómeno topológico que tiene relación con algo que se le conoce como “espacio de parches”. Esto podría ser presentado para futuras notas.

Antes de entrar en detalles, necesitamos una definición fundamental para las comparaciones entre los diferentes nociones que aquí serán presentadas.

Definición 4.1. Consideremos $A \in \mathbf{Frm}$. Para $S \in \mathbf{Top}$ decimos que una propiedad en marcos es *conservativa* si la propiedad vista en el marco de abiertos coincide con la noción espacial.

Un ejemplo de propiedad conservativa es la regularidad. Lo que probamos en la Proposición 2.3 es precisamente el argumento de que una propiedad sea conservativa

$$\text{Propiedad espacial en } S \Leftrightarrow \text{Propiedad}_S \text{ en } \mathcal{O}S$$

donde Propiedad_S hace referencia a propiedad sin puntos.

4.1. Marcos débilmente Hausdorff. Esta noción fue enunciada por Dowker y Papert Strauss (ver [1]). Esta viene motivada por el hecho de ver la propiedad de ser Hausdorff como algo más fuerte que ser T_1 . En la sección anterior se probó que $(\mathbf{saju}) + T_D = T_1$, el axioma *débilmente Hausdorff* (y que denotaremos por \mathbf{dH}), hace algo similar. Unas ligeras modificaciones de esta propiedad dan origen a cierta jerarquía, que al juntarlas con

subajustado, resultan ser una equivalencia.

(dH): Si $a \vee b = 1$ y $a, b \neq 1$, entonces existen u, v tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.

La siguiente noción es ligeramente más fuerte que **(dH)**.

(dH'): Si $a \not\leq b$ y $b \not\leq a$, entonces existen u, v tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.

Esta última es la más fuerte de esta jerarquía

(dH''): Si $a \not\leq b$ y $b \not\leq a$, entonces existe u, v tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$, $u \leq b$, $v \leq a$ y $u \wedge v = 0$.

De esta manera tenemos lo siguiente

$$(\mathbf{dH}'') \Rightarrow (\mathbf{dH}') \Rightarrow (\mathbf{dH}).$$

Estas tres condiciones no son conservativas y sin **(saju)** no son suficientemente Hausdorff. Por ello, Dowker y Papert Strauss sugirieron como un axioma tipo Hausdorff conveniente la combinación **(dH)** + **(saju)**. De hecho, esta propiedad es conservativa.

Proposition 4.2. *Para un marco subajustado las condiciones **(dH)**, **(dH')** y **(dH'')** son equivalentes.*

4.2. Marcos Hausdorff. La noción que ahora veremos es presentada por Paseka y Smarda quienes observaron la propiedad de Hausdorff como una regularidad débil (ver [6]). Con esto en mente, ellos sugieren una modificación de la relación mostrada en la Definición 2.2 dada por “ \prec ” y reemplazándola por una un poco más débil, denotada por “ \sqsubset ”.

Definición 4.3. Para un espacio topológico S y cualesquiera $U, V \in \mathcal{O}S$ decimos que U se relaciona con V por medio de \sqsubset , denotado por $U \sqsubset V$, si y solo si

$$U \subseteq V \quad \text{y} \quad \overline{U} \cup V \neq S.$$

Proposition 4.4. *Un espacio S que es T_0 es Hausdorff (T_2) si y solo si para todo $V \in \mathcal{O}S$, con $V \neq S$, tenemos que*

$$V = \bigcup \{U \mid U \sqsubset V\}$$

donde $U \in \mathcal{O}S$.

Notemos que en la condición $\overline{U} \cup V \neq S$ se cumple si y solo si $S \setminus \overline{U} \not\subseteq V$. De esta manera, podemos reescribir la Definición 4.3 como

$$U \sqsubset V \Leftrightarrow U \subseteq V \quad \text{y} \quad U^* \not\subseteq V$$

De esta manera, para un marco L podemos escribir la siguiente noción sin puntos de T_2 .

(T_{2_s}): Si para $a \in L$, con $a \neq 1$, entonces $a = \bigvee \{u \in L \mid u \sqsubset a\}$, donde $u \sqsubset a$ si y solo si $u \leq a$ y $u^* \not\leq a$.

Notemos que $\bigvee \{u \in L \mid u \sqsubset a\} \leq a$ de esta manera T_{2_s} es equivalente a afirmar que si $1 \neq a \not\leq b$ entonces existe un $v \sqsubset a$ tal que $v \not\leq b$. Sustituyendo u por v^* obtenemos la siguiente modificación.

(T_{2_s}): Si $1 \neq a \not\leq b$, entonces existen $u, v \in L$ tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$, $v \leq a$ y $u \wedge v = 0$.

En 1987 Johnstone y Shu-Hao (ver [4]), enunciaron la siguiente noción tipo Hausdorff y observaron que es equivalente a T_{2_s} .

(S_2): Si $1 \neq a \not\leq b$, entonces existen $u, v \in L$ tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.

Proposition 4.5. (S_2) y (T_{2_s}) son equivalentes.

De esta manera tenemos dos nociones que son equivalentes y que fueran motivadas por direcciones muy diferentes. Así, podemos convenir en considerar la noción de Johnstone y Shu-Hao como la conveniente para decir que un marco es Hausdorff.

Definición 4.6. Decimos que un marco L es un *marco Hausdorff* si cumple la siguiente propiedad

(H): Para cualquier $1 \neq a \not\leq b \in L$ existen $u, v \in L$ tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.

En otras palabras, tenemos que un marco es Hausdorff si

(H): Para cualquier $1 \neq a \not\leq b \in L$ existe $u \in L$ tales que $u \not\leq a$ y $u^* \not\leq b$.

Se puede verificar que, efectivamente, pedir que un marco sea Hausdorff es algo más fuerte que débilmente Hausdorff.

Observación 4.7. Los marcos Hausdorff tienen un buen comportamiento conservativo, es decir, S es un espacio Hausdorff si y solo si $\emptyset S$ es un marco Hausdorff. Además, esta propiedad se hereda para sublocales y productos.

Proposition 4.8. 1. Un sublocal de un local Hausdorff es Hausdorff.
2. Un producto de locales Hausdorff es Hausdorff

4.3. Marcos Hausdorff basados. La motivación de la siguiente noción viene dada por la equivalente noción sin puntos de que un marco sea T_1 . Recordemos que un marco cumple T_{1_s} si todo elemento \wedge -irreducible (o elemento primo), es máximo. Veamos que algo

similar pasa para lo que definiremos como marcos Hausdorff basados. Antes de hacer eso necesitamos un poco de información.

Definición 4.9. Para un marco L decimos que un elemento $p \in L$ es semiprimo si $a \wedge b = 0$ implica que $a \leq p$ o $b \leq p$.

Obviamente cada elemento \wedge -irreducible es semiprimo.

Proposition 4.10. *Un espacio S que es T_0 es Hausdorff si y solo si todos los elementos semiprimos $P \in \mathcal{O}S$ son maximales.*

Este análisis fue hecho por Rosicky y Smarda (ver [9]). Ellos introducen la siguiente noción.

Definición 4.11. Decimos que un marco L es *Hausdorff basado* si cumple la siguiente propiedad

(Hb): cada elemento semiprimo en L es máximo.

De esta manera, como asumimos que se cumple T_0 , por la Proposición 4.10, **(Hb)** es conservativa.

Proposition 4.12. *Cada marco Hausdorff es Hausdorff basado.*

Los marcos Hausdorff basados tienen un buen comportamiento categórico, lamentablemente no hay mucha información sobre estos marcos en la literatura.

Considerando la siguiente relajación de **(Hb)** podemos ver que **(H)** y **(T_{1s})** tienen un comportamiento similar que sus variantes sensibles a puntos.

Definición 4.13. Decimos que un marco L es *débilmente Hausdorff basado* si cumple la siguiente propiedad

(dHb): cada elemento semiprimo en L es \wedge -irreducible.

Por lo tanto, tenemos las siguientes implicaciones

$$(\mathbf{H}) \Rightarrow (\mathbf{Hb}) \Rightarrow (\mathbf{dHb}) \Rightarrow (\mathbf{T}_{1s}).$$

4.4. Marcos fuertemente Hausdorff. Los espacios T_2 cumplen lo siguiente: *Un espacio S es T_2 si y solo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) \in S \times S \mid x \in S\}$ es un subconjunto cerrado en $S \times S$.*

Con esto en mente, Isbell da su noción tipo Hausdorff sin puntos, enunciada para el producto binario de sublocales (ver [2]). La desventaja de la variante presentada por Isbell es que esta propiedad no es conservativa, pero esto es compensado por otros méritos.

Para un local L consideramos el coproducto binario $L \oplus L$. En particular, tomemos las inyecciones al coproducto

$$\iota_1 = (a \mapsto a \oplus 1): L \rightarrow L \oplus L \quad \text{y} \quad \iota_2 = (b \mapsto 1 \oplus b): L \rightarrow L \oplus L.$$

El morfismo codiagonal Δ^* que satisface $\Delta^* \iota_i = id$ está dado por

$$\Delta^*(U) = \bigvee \{a \wedge b \mid a \oplus b \subseteq U\} = \bigvee \{a \wedge b \mid (a, b) \in U\}.$$

Consideremos la adjunción

$$L \oplus L \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta^*} \\ \xleftarrow{\Delta} \end{array} L$$

con Δ el morfismo diagonal locálico asociado. Además,

$$\Delta(a) = \{(x, y) \mid x \wedge y \leq a\}.$$

Por lo tanto tenemos $U \subseteq \Delta(\Delta^*(U))$ y $\Delta^* \Delta = id$, donde el sublocal diagonal $\Delta[L]$ corresponde al subespacio diagonal clásico.

Definición 4.14. Decimos que un marco es *fuertemente Hausdorff* si y solo si el sublocal diagonal $\Delta[L]$ es cerrado en $L \oplus L$.

La propiedad enunciada en la Definición 4.14 puede ser reescrita de la siguiente manera.

$$(\mathbf{fH}): \Delta[L] = \uparrow d_L,$$

donde d_L es el menor elemento de $\Delta[L]$, es decir,

$$d_L = \Delta(0) = \{(x, y) \mid x \wedge y \leq 0\} = \downarrow \{(x, x^*) \mid x \in L\}.$$

Existen diferentes caracterizaciones para los marcos fuertemente Hausdorff. Por el momento solo haremos mención a sus propiedades más importantes.

Proposition 4.15. *Cada sublocal de un marco fuertemente Hausdorff es fuertemente Hausdorff.*

Proposition 4.16. *Un marco fuertemente Hausdorff es Hausdorff.*

Proposition 4.17. *Sean S un espacio T_0 y $\emptyset S$ un marco fuertemente Hausdorff. Entonces S es Hausdorff.*

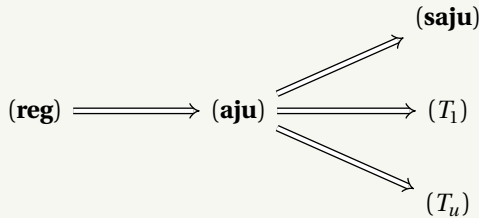
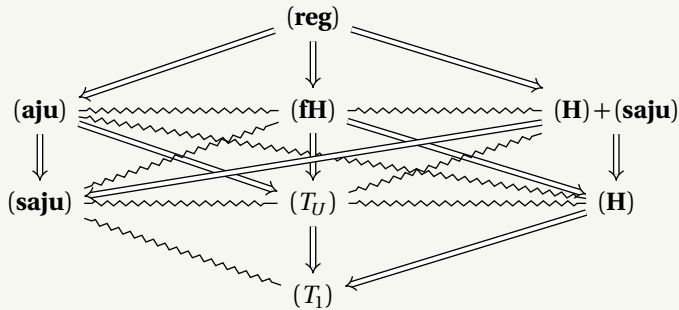
El marco $\mathcal{O}S$ de un espacio S que es Hausdorff no necesariamente es fuertemente Hausdorff. Así, la propiedad **(fH)** no es conservativa. Lo anterior queda ilustrado en el siguiente diagrama.

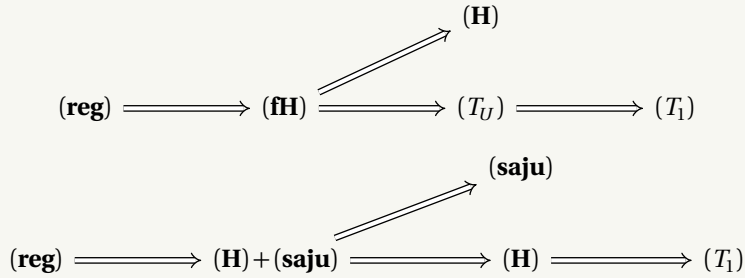
$$\begin{array}{ccc}
 \text{(fH)} & \xrightarrow{4.17} & T_2 \\
 & \searrow 4.16 & \updownarrow 4.7 \\
 & & \text{(H)}
 \end{array}$$

Podemos tratar de extender la propiedad de simetría (presentada también en la Sección 1 como R_0), que por la Proposición 1.20, bajo T_0 es equivalente a T_1 . Para este caso, si h_1 y h_2 son dos morfismos de marcos, decimos que $h_1 \leq h_2$ si $h_1(a) \leq h_2(a)$ para todo $a \in A$, donde A es el dominio de los respectivos morfismos. De esta manera diremos que un espacio es T_U si se cumple

$$\text{(T}_U\text{)} \quad \forall h_1, h_2: A \rightarrow B, \text{ con } h_1, h_2 \in \text{Frm}, \text{ si } h_1 \leq h_2, \text{ tenemos que } h_1 = h_2$$

Introducimos aquí este axioma de separación para poder presentar los siguientes diagramas.





Con todo esto, podemos terminar estas notas con una serie de preguntas, que esperamos sean resueltas en trabajos futuros.

1. De todos los axiomas tipo Hausdorff aquí presentados, ¿podemos decir que uno de ellos es el mejor? De ser así, ¿qué es lo que lo hace el mejor?
2. ¿Qué relación existe entre los axiomas tipo Hausdorff en la teoría de marcos y las caracterizaciones que ya existen en la topología clásica?
3. ¿Se pueden encontrar ejemplos en la topología clásica (“ejemplos de carne y hueso”), donde se muestren las diferentes construcciones y propiedades que aquí mencionamos?

Referencias

- [1] C. H. Dowker; D. Strauss, *Separation axioms for frames*, Topics in Topology, pp. 223–240. Proc. Colloq., Keszthely, 1972. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, vol. 8, North-Holland, Amsterdam, 1974.
- [2] J. R. Isbell, *Atomless parts of spaces*, Math. Scand. 31 (1972) 5–32.
- [3] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
- [4] P. T. Johnstone; S.-H. Sun, *Weak products and Hausdorff locales*, Categorical Algebra and its Applications, pp. 173–193. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1348. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [5] J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque localico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.
- [6] J. Paseka; B. Šmarda, *T2-frames and almost compact frames*, Czechoslovak Math. J. 42 (1992) 297–313.
- [7] J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.
- [8] J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.

- [9] J. Rosický; B. Šmarda, *T1-locales*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 98 (1985) 81–86.
- [10] RA. Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
- [11] RA. Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.
- [12] H. Simmons, *The assembly of a frame*, University of Manchester (2006).
- [13] H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, Ann. Math. 39 (1938) 112–126.
- [14] A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2024. Universidad de Guadalajara.

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad de Guadalajara, Blvd Gral. Marcelino García Barragán 1421, Olímpica, 44430 Guadalajara, Jalisco
E-mail address: luis.zaldivar@academicos.udg.mx

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad de Guadalajara, Blvd Gral. Marcelino García Barragán 1421, Olímpica, 44430 Guadalajara, Jalisco
E-mail address: juan.monter2902@alumnos.udg.mx

TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

RICARDO ÁGUILA GÓMEZ, MARTÍN MUÑOZ CHÁVEZ,
ALEJANDRO CRISTOPHER NAVA TÉLLEZ, MARÍA ELENA OLIVARES PÉREZ,
ERNESTO URENDA CAZARES

RESUMEN. La Transformada de Fourier Discreta (DFT) es una herramienta fundamental en el análisis de señales digitales y procesamiento de datos. Permite descomponer una señal discreta en sus componentes frecuenciales, facilitando la comprensión de su estructura y comportamiento. La DFT transforma una secuencia de N muestras en otra secuencia de N coeficientes complejos, que representan la amplitud y la fase de cada frecuencia presente en la señal original. Este método es esencial en diversas aplicaciones, como la compresión de audio, la imagen digital y la comunicación. Además, algoritmos eficientes como la transformada rápida de Fourier (FFT) han permitido la implementación práctica de la DFT en tiempo real, haciendo posible su uso en sistemas complejos. Este trabajo explora los fundamentos teóricos de la DFT y su implementación práctica en dos casos de estudio.

1. INTRODUCCIÓN

La Transformada de Fourier Discreta (DFT) es una herramienta esencial en el campo del procesamiento de señales y análisis de datos. A medida que el mundo se vuelve cada vez más digital, la necesidad de entender y manipular señales en su forma discreta se ha vuelto crítica en diversas aplicaciones, que van desde la compresión de audio y video hasta la comunicación y la imagen digital. La DFT permite descomponer una señal discreta en sus componentes de frecuencia, revelando patrones y características que pueden no ser evidentes en el dominio del tiempo.

A diferencia de la Transformada de Fourier Continua, la DFT se centra en secuencias finitas y discretas. Esto la hace especialmente útil en contextos computacionales,

2000 *Mathematics Subject Classification.* 82B44.

Palabras Claves. Transformada de Fourier Discreta, Transformada Rápida de Fourier.

donde los datos se manejan en formatos digitales. Además, la eficiencia de la DFT ha sido mejorada notablemente con algoritmos como la transformada rápida de Fourier (FFT), que reduce el tiempo de cálculo, haciendo factible el procesamiento en tiempo real.

Este trabajo explora los fundamentos teóricos de la DFT, sus propiedades y aplicaciones prácticas. A través de casos de estudio, se demostrará su relevancia en la transformación y análisis de señales.

2. MUESTREO EN EL DOMINIO DE FRECUENCIA Y RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES DISCRETAS EN EL TIEMPO

El análisis en frecuencia de señales discretas en el tiempo suele realizarse donde es más adecuado, en un procesador digital de señales, que puede ser una computadora digital de propósito general o sobre un hardware digital especialmente diseñado. Para realizar el análisis en frecuencia de una señal discreta en el tiempo $\{x(n)\}$, convertimos la secuencia en el dominio del tiempo en una representación equivalente en el dominio de la frecuencia. Sabemos que tal representación está dada por la transformada de Fourier $X(\omega)$ de la secuencia $\{x(n)\}$. Sin embargo, $X(\omega)$ es una función continua de la frecuencia y, por tanto, no es una representación adecuada computacionalmente de la secuencia $\{x(n)\}$.

En este capítulo consideramos la representación de una secuencia $\{x(n)\}$ mediante muestras de su espectro $X(\omega)$. Una representación en el dominio de la frecuencia como ésta nos lleva a la transformada discreta de Fourier (DFT, discrete Fourier transform), la cual es una potente herramienta de cálculo para llevar a cabo el análisis en frecuencia de señales discretas en el tiempo.

Antes de comenzar con la DFT, consideremos el muestreo de la transformada de Fourier de una secuencia aperiódica discreta en el tiempo. Así, establecemos las relaciones entre la transformada de Fourier muestreada y la DFT.

Recordemos que las señales aperiódicas de energía finita tienen espectros continuos. Consideremos una señal aperiódica discreta en el tiempo $x(n)$ cuya transformada de Fourier es

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (1)$$

Suponga que muestreamos $X(\omega)$ periódicamente en frecuencias espaciadas $\delta\omega$ radianes entre muestras sucesivas. Como $X(\omega)$ es periódica de período 2π , sólo son

necesarias las muestras que se encuentran dentro del rango de frecuencias fundamental. Por comodidad, tomamos N muestras equidistantes en el intervalo $0 \leq \omega < 2\pi$ con un espaciado $\delta\omega = 2\pi/N$, como se muestra en la Figura 1. Consideremos en primer lugar la selección de N , el número de muestras en el dominio de la frecuencia.

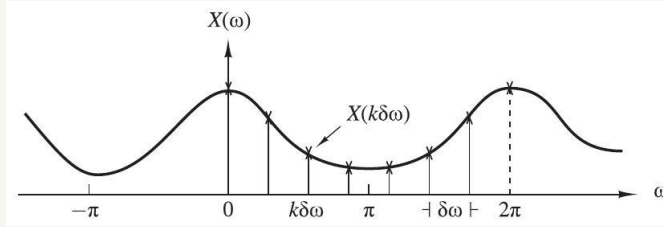


FIGURA 1. Muestreo en el dominio de la frecuencia de la transformada de Fourier.

Si evaluamos (1) en $\omega = 2\pi k/N$, obtenemos

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

La suma de (2) puede subdividirse en un número infinito de sumas, donde cada suma consta de N términos. Por tanto,

$$\begin{aligned} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) &= \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \\ &\quad + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \dots \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}. \end{aligned}$$

Si cambiamos el índice interno de la suma de n a $n-lN$ e intercambiamos el orden de las sumas, obtenemos el resultado

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \right] e^{-j2\pi kn/N} \quad (3)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

La señal

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \quad (4)$$

obtenida por la repetición periódica de $x(n)$ cada N muestras, es claramente periódica de período fundamental N . En consecuencia, puede expandirse en serie de Fourier como

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (5)$$

con coeficientes de Fourier

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6)$$

Comparando (3) con (6), concluimos que

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (7)$$

Por tanto,

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (8)$$

La relación dada en (8) proporciona la reconstrucción de la señal periódica $x_p(n)$ a partir de las muestras del espectro $X(\omega)$. Sin embargo, no implica que podamos recuperar $X(\omega)$ o $x(n)$ a partir de las muestras. Para conseguir esto, tenemos que considerar la relación entre $x_p(n)$ y $x(n)$.

Dado que $x_p(n)$ es la extensión periódica de $x(n)$, como se expresa en (4), es evidente que $x(n)$ puede recuperarse a partir de $x_p(n)$ si no existe aliasing en el dominio del tiempo; es decir, si $x(n)$ está limitada en el tiempo por un período menor que N de $x_p(n)$.

Esta situación se ilustra en la Figura 2, donde sin perder generalidad, consideramos una secuencia de duración finita $x(n)$, que es distinta de cero en el intervalo $0 \leq n \leq L - 1$. Observe que cuando $N \geq L$,

$$x(n) = x_p(n), \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

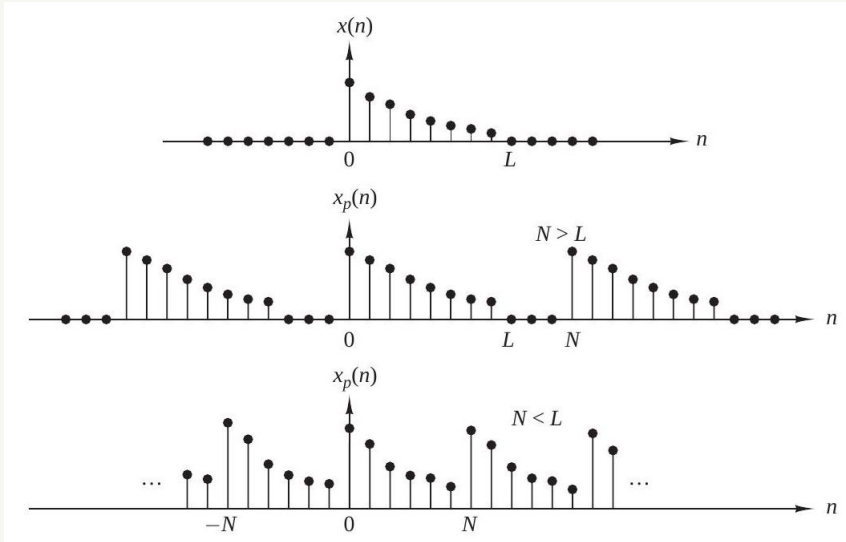


FIGURA 2. Secuencia aperiódica $x(n)$ de longitud L y su extensión periódica para $N \geq L$ (sin aliasing) y $N < L$ (aliasing)

de modo que $x(n)$ se puede recuperar a partir de $x_p(n)$ sin ambigüedades. Por el contrario, si $N < L$, no es posible recuperar $x(n)$ a partir de su extensión periódica debido al aliasing en el dominio del tiempo. Por tanto, concluimos que el espectro de una señal discreta en el tiempo aperiódica con duración finita L puede recuperarse de forma exacta a partir de sus muestras en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, si $N \geq L$. El procedimiento consiste en calcular $x_p(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ de acuerdo con (8); luego

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (9)$$

y, por último, $X(\omega)$ se puede calcular aplicando (1).

Como en el caso de las señales continuas en el tiempo, es posible expresar el espectro $X(\omega)$ directamente en función de sus muestras $X(2\pi k/N)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Para obtener esta fórmula de interpolación para $X(\omega)$, suponemos que $N \geq L$ y utilizamos

(8). Dado que $x(n) = x_p(n)$ para $0 \leq n \leq N-1$,

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (10)$$

Si empleamos (1) y sustituimos para $x(n)$, obtenemos

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N} \right] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega - 2\pi k/N)n} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

La suma interna entre corchetes de (11) representa la función de interpolación básica desplazada en la frecuencia $2\pi k/N$. Si definimos

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{\text{sen}(\omega N/2)}{N \text{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2} \end{aligned} \quad (12)$$

entonces (11) se puede expresar como

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) P\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right), \quad N \geq L \quad (13)$$

La función de interpolación $P(\omega)$ no es la familiar $(\text{sen } \theta)/\theta$, sino que en su lugar es una contrapartida periódica de ella, y se debe a la naturaleza periódica de $X(\omega)$. El desplazamiento de fase en (12) refleja el hecho de que la señal $x(n)$ es una secuencia causal de duración finita y longitud N . La función $(\text{sen } \omega N/2)/(N \text{sen}(\omega/2))$ se ha representado en la Figura 3 para $N = 5$.

Observe que la función $P(\omega)$ tiene la propiedad

$$P\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (14)$$

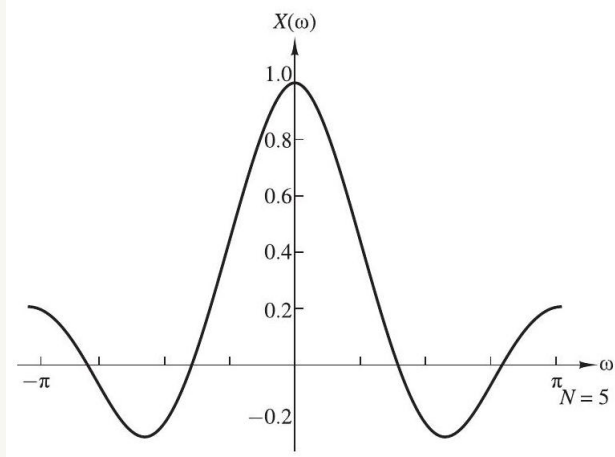


FIGURA 3. Representación de la función $[\text{sen}(\omega N/2)]/[N \text{sen}(\omega/2)]$

En consecuencia, la fórmula de interpolación dada en (13) proporciona de forma exacta los valores de las muestras $X(2\pi k/N)$ para $\omega = 2\pi k/N$. En las restantes frecuencias, la fórmula proporciona una combinación lineal ponderada apropiadamente de las muestras espectrales originales.

3. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

El desarrollo en la sección anterior está relacionado con el muestreo en el dominio de la frecuencia de una secuencia aperiódica de energía finita $x(n)$. En general, las muestras en frecuencia igualmente espaciadas $X(2\pi k/N)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, no representan de forma unívoca la secuencia original $x(n)$, cuando $x(n)$ tiene duración infinita. En su lugar, las muestras en frecuencia $X(2\pi k/N)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, corresponden a una secuencia periódica $x_p(n)$ de período N , donde $x_p(n)$ es una versión con aliasing de $x(n)$, como se indica mediante la relación dada en (4), es decir,

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \tag{15}$$

Cuando la secuencia $x(n)$ tiene una duración finita de longitud $L \leq N$, entonces $x_p(n)$ es simplemente una repetición periódica de $x(n)$, donde $x_p(n)$ sobre un solo

período está dada por

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & L \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (16)$$

En consecuencia, las muestras en frecuencia $X(2\pi k/N)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, representan de forma unívoca la secuencia de duración finita $x(n)$. Puesto que $x(n) \equiv x_p(n)$ en un solo período (rellenado por $N-L$ ceros), la secuencia de duración finita original $x(n)$ puede obtenerse a partir de las muestras en frecuencia $\{X(2\pi k/N)\}$ por medio de la fórmula (8).

Es importante destacar que el relleno con ceros no proporciona ninguna información adicional acerca del espectro $X(\omega)$ de la señal $\{x(n)\}$. Las L muestras equidistantes de $X(\omega)$ son suficientes para reconstruir $X(\omega)$ utilizando la fórmula de reconstrucción (13). Sin embargo, rellenar la secuencia $\{x(n)\}$ con $N-L$ ceros y calcular una DFT de N puntos proporciona una "mejor representación" de la transformada de Fourier $X(\omega)$.

En resumen, una secuencia de duración finita $x(n)$ de longitud L [es decir, $x(n) = 0$ para $n < 0$ y $n \geq L$] tiene una transformada de Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega n}, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi \quad (17)$$

donde los índices superior e inferior de la suma reflejan el hecho de que $x(n) = 0$ fuera del rango $0 \leq n \leq L-1$. Si muestreamos $X(\omega)$ en frecuencias igualmente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, donde $N \geq L$, las muestras resultantes son

$$X(k) \equiv X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (18)$$

donde, por conveniencia, el índice superior de la suma se ha incrementado de $L-1$ a $N-1$, ya que $x(n) = 0$ para $n \geq L$.

La relación dada por (18) es una fórmula que permite transformar una secuencia $\{x(n)\}$ de longitud $L \leq N$ en una secuencia de muestras en frecuencia $\{X(k)\}$ de longitud N . Puesto que las muestras de frecuencia se obtienen evaluando la transformada de Fourier $X(\omega)$ en un conjunto de N frecuencias discretas (igualmente espaciadas), la relación dada en (18) se denomina transformada discreta de Fourier (DFT) de $x(n)$. A

su vez, la relación dada en (10), que nos permite recuperar la secuencia $x(n)$ a partir de las muestras de frecuencia

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (19)$$

se denomina DFT inversa (IDFT). Evidentemente, cuando $x(n)$ tiene una longitud $L < N$, la IDFT de N puntos da $x(n) = 0$ para $L \leq n \leq N-1$. Resumiendo, las fórmulas para la DFT y la IDFT son:

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (20)$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (21)$$

4. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA COMO UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Las fórmulas para la DFT y la IDFT dadas por (18) y (19) se pueden expresar como

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (22)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (23)$$

donde, por definición,

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (24)$$

que es la raíz N -ésima de valor unidad.

Observe que el cálculo de cada punto de la DFT se puede llevar a cabo realizando N multiplicaciones complejas y $(N-1)$ sumas complejas. Luego los valores de la DFT de N puntos pueden calcularse realizando un total de N^2 multiplicaciones complejas y $N(N-1)$ sumas complejas.

Es interesante ver la DFT y la IDFT como transformaciones lineales de las secuencias $\{x(n)\}$ y $\{X(k)\}$, respectivamente. Definamos un vector de N puntos \mathbf{x}_N de la secuencia $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, un vector de N puntos \mathbf{X}_N de muestras en frecuencia y una matriz $N \times N$ \mathbf{W}_N como sigue

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Con estas definiciones, la DFT de N puntos se puede expresar en forma matricial como

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N \quad (26)$$

donde \mathbf{W}_N es la matriz de la transformación lineal. Observe que \mathbf{W}_N es una matriz simétrica. Si suponemos que existe la inversa de \mathbf{W}_N , entonces (26) se puede invertir premultiplicando ambos lados de la ecuación por \mathbf{W}_N^{-1} . Así obtenemos

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}_N \quad (27)$$

pero ésta es sólo una expresión para la IDFT.

De hecho, la IDFT dada por (23) se puede expresar en forma matricial como

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}_N \quad (28)$$

donde \mathbf{W}_N^* designa el conjugado complejo de la matriz \mathbf{W}_N . Comparando (27) con (28) concluimos que

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \quad (29)$$

lo que a su vez implica que

$$\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^* = N \mathbf{I}_N \quad (30)$$

donde \mathbf{I}_N es una matriz identidad $N \times N$. Por tanto, la matriz \mathbf{W}_N de la transformación es una matriz ortogonal (unitaria). Además, existe su inversa y está dada por \mathbf{W}_N^*/N . Por supuesto, la existencia de la inversa de \mathbf{W}_N se ha establecido anteriormente a partir de la deducción de la IDFT.

Ejercicio 4.1. Calcule la DFT de la secuencia de cuatro puntos

$$x(n) = (0 \quad 1 \quad 2 \quad 3)$$

Solución 4.2. El primer paso consiste en determinar la matriz \mathbf{W}_4 . Aplicando la propiedad de periodicidad de \mathbf{W}_4 y la propiedad de simetría

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

la matriz \mathbf{W}_4 se puede expresar como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_4 &= \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{X}_4 = \mathbf{W}_4 \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 + 2j \\ -2 \\ -2 - 2j \end{bmatrix}$$

La IDFT de \mathbf{X}_4 puede determinarse conjugando los elementos de \mathbf{W}_4 para obtener \mathbf{W}_4^* y aplicando a continuación la fórmula (28).

La DFT y la IDFT son herramientas de cálculo que desarrollan un importante papel en muchas aplicaciones de tratamiento digital de la señal, como por ejemplo en el análisis en frecuencia (análisis de espectros) de señales, en la estimación del espectro de potencia y en el filtrado lineal. La importancia de la DFT y la IDFT en tales aplicaciones prácticas se debe a la existencia de algoritmos de cálculo eficientes, conocidos colectivamente como algoritmos de la transformada rápida de Fourier (FFT, fast Fourier transform), que permiten calcular dichas transformadas DFT e IDFT.

5. RELACIÓN DE LA DFT CON OTRAS TRANSFORMADAS

Ya hemos mencionada que la DFT es una importante herramienta de cálculo para el análisis en frecuencia de señales utilizando procesadores digitales de señal. Teniendo en cuenta las otras herramientas y transformadas para el análisis en frecuencia que hemos desarrollado, es importante establecer las relaciones de la DFT con estas otras transformadas.

5.1. Relación con los coeficientes de la serie de Fourier de una secuencia periódica.

Una secuencia periódica $\{x_p(n)\}$ de período fundamental N se puede representar en una serie de Fourier de la forma

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}, \quad -\infty < n < \infty \quad (31)$$

donde los coeficientes de la serie de Fourier están dados por la expresión

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (32)$$

Si comparamos (31) y (32) con (18) y (19), observamos que la fórmula para los coeficientes de la serie de Fourier tiene la forma de una DFT. De hecho, si definimos una secuencia $x(n) = x_p(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, la DFT de esta señal es simplemente

$$X(k) = N c_k \quad (33)$$

Además, (31) tiene la forma de una IDFT. Así, la DFT de N puntos proporciona el espectro de líneas exacto de una secuencia periódica de período fundamental N .

Relación con la transformada de Fourier de una secuencia aperiódica. Ya hemos demostrado que si $x(n)$ es una secuencia aperiódica de energía finita con la transformada de Fourier $X(\omega)$, la cual se muestrea a N frecuencias igualmente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, las componentes espectrales

$$X(k) = X(\omega)|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (34)$$

son los coeficientes de la DFT de la secuencia periódica de período N , dada por

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \quad (35)$$

Así, $x_p(n)$ queda determinada por el aliasing $\{x(n)\}$ en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$. La secuencia de duración finita

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (36)$$

no se parece a la secuencia original $\{x(n)\}$, a menos que $x(n)$ sea de duración finita y longitud $L \leq N$, en cuyo caso

$$x(n) = \hat{x}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (37)$$

Sólo en este caso la IDFT de $\{X(k)\}$ proporcionará la secuencia original $\{x(n)\}$.

5.2. Relación con la transformada z . Consideremos una secuencia $x(n)$ con la transformada z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (38)$$

y una región de convergencia que incluye la circunferencia unidad. Si $X(z)$ se muestrea en N puntos igualmente espaciados sobre la circunferencia unidad $z_k = e^{j2\pi k/N}$, $0, 1, 2, \dots, N-1$, obtenemos

$$\begin{aligned} X(k) &\equiv X(z)|_{z=e^{j2\pi k/N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi nk/N} \end{aligned} \quad (39)$$

La expresión dada en (38) es idéntica a la transformada de Fourier $X(\omega)$ evaluada en las N frecuencias igualmente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Si la secuencia $x(n)$ tiene duración finita de longitud N o menor, la secuencia puede recuperarse a partir de su DFT de N puntos. Por tanto, su transformada z queda determinada de forma unívoca por su DFT de N puntos. En consecuencia, $X(z)$

se puede expresar como una función de la DFT $\{X(k)\}$ como sigue:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \\
 X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N} \right] z^{-n} \\
 X(z) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j2\pi k/N} Z^{-1})^n \\
 X(z) &= \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-e^{j2\pi k/N} Z^{-1}}
 \end{aligned} \tag{40}$$

Si se evalúa sobre la circunferencia unidad, (40) proporciona la transformada de Fourier de la secuencia de duración finita en función de su DFT, en la forma

$$X(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-e^{-j(\omega-2\pi k/N)}} \tag{41}$$

Esta expresión para la transformada de Fourier es una fórmula de interpolación polinómica (Lagrange) para $X(\omega)$ expresada en función de los valores $\{X(k)\}$ del polinomio en un conjunto de frecuencias discretas igualmente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Realizando algunas manipulaciones algebraicas, podemos reducir la expresión (41) a la fórmula de interpolación dada anteriormente en (13).

5.3. Relación con los coeficientes de la serie de Fourier de una señal continua en el tiempo. Supongamos que $x_a(t)$ es una señal periódica continua en el tiempo de período fundamental $T_p = 1/F_0$. La señal puede expresarse como la serie de Fourier

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k t F_0} \tag{42}$$

donde $\{c_k\}$ son los coeficientes de Fourier. Si muestreamos $x_a(t)$ a una tasa uniforme $F_s = N/T_p = 1/T$, obtenemos la secuencia discreta en el tiempo

$$\begin{aligned} x(n) \equiv x_a(nT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 n T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k n / N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k-lN} \right] e^{j2\pi k n / N} \end{aligned} \quad (43)$$

Evidentemente, la expresión (43) tiene la forma de una IDFT, donde

$$X(k) = N \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k-lN} \equiv N \tilde{c}_k \quad (44)$$

y

$$\tilde{c}_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k-lN} \quad (45)$$

Así, la secuencia $\{\tilde{c}_k\}$ es una versión con aliasing de la secuencia $\{c_k\}$.

6. PROPIEDADES DE LA DFT

En la sección 3 hemos presentado la DFT como un conjunto de N muestras $\{X(k)\}$ de la transformada de Fourier $X(\omega)$ para una secuencia de duración finita $\{x(n)\}$ de longitud $L \leq N$. El muestreo de $X(\omega)$ se hace en N frecuencias igualmente espaciadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Hemos demostrado que las N muestras $\{X(k)\}$ representan de forma unívoca la secuencia $\{x(n)\}$ en el dominio de la frecuencia. Recuerde que la DFT y la DFT inversa (IDFT) para la secuencia de N puntos $\{x(n)\}$ se definen como

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (46)$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (47)$$

donde W_N se define como

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (48)$$

En esta sección presentamos las propiedades más importantes de la DFT. Teniendo en cuenta las relaciones establecidas en la sección 5 entre la DFT y la serie de Fourier, y las transformadas de Fourier y las transformadas z de las señales discretas en el tiempo,

es de esperar que las propiedades de la DFT sean parecidas a las propiedades de estas otras transformadas y series. Sin embargo, existen algunas diferencias importantes, siendo una de ellas la propiedad de la convolución circular. Un buen conocimiento de estas propiedades resulta extremadamente útil en la aplicación de la DFT a los problemas prácticos.

La notación que usamos a continuación designa la pareja de transformadas DFT de N puntos $x(n)$ y $X(k)$

$$x(n) \xrightarrow[N]{\text{DFT}} X(k)$$

6.1. Propiedades de periodicidad, linealidad y simetría.

6.1.1. *Periodicidad.* Si $x(n)$ y $X(k)$ son una pareja de transformada DFT de N puntos, entonces

$$x(n + N) = x(n) \quad \text{para todo } n \quad (49)$$

$$X(k + N) = X(k) \quad \text{para todo } k \quad (50)$$

Estas periodicidades de $x(n)$ y $X(k)$ se obtienen de forma inmediata de las fórmulas (46) y (47) para la DFT y la IDFT, respectivamente.

Anteriormente hemos explicado la propiedad de periodicidad de la secuencia $x(n)$ para una DFT dada. Sin embargo, anteriormente no hemos visto la DFT $X(k)$ como una secuencia periódica. En algunas aplicaciones hacer esto resulta ventajoso.

6.1.2. *Linealidad.* Si

$$x_1(n) \xrightarrow[N]{\text{DFT}} X_1(k)$$

y

$$x_2(n) \xrightarrow[N]{\text{DFT}} X_2(k)$$

entonces para cualesquiera constantes reales o complejas a_1 y a_2 ,

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xrightarrow[N]{\text{DFT}} a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k) \quad (51)$$

Esta propiedad se deduce fácilmente a partir de la definición de la DFT dada en (46).

6.1.3. *Simetría.* Simetría circular de una secuencia. Como hemos visto, la DFT de N puntos de una secuencia de duración finita $x(n)$ de longitud $L \leq N$ es equivalente a la DFT de N puntos de una secuencia periódica $x_p(n)$ de período N , la cual se obtiene expandiendo periódicamente $x(n)$, es decir,

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN). \quad (52)$$

Suponga ahora que desplazamos k unidades hacia la derecha la secuencia periódica $x_p(n)$. Así obtenemos otra secuencia periódica

$$x'_p(n) = x_p(n - k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - k - lN). \quad (53)$$

La secuencia de duración finita

$$x'(n) = \begin{cases} x'_p(n), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (54)$$

está relacionada con la secuencia original $x(n)$ por un desplazamiento circular. Esta relación se ilustra en la Figura 4 para $N = 4$.

En general, el desplazamiento circular de la secuencia se puede representar como el índice de módulo N . Así, podemos escribir

$$\begin{aligned} x'(n) &= x(n - k, \text{ módulo } N) \\ &\equiv x((n - k))_N \end{aligned} \quad (55)$$

Por ejemplo, si $k = 2$ y $N = 4$, tenemos

$$x'(n) = x((n - 2))_4 \quad (56)$$

lo que implica que

$$x'(0) = x((-2))_4 = x(2)$$

$$x'(1) = x((-1))_4 = x(3)$$

$$x'(2) = x((0))_4 = x(0)$$

$$x'(3) = x((1))_4 = x(1)$$

Por tanto, $x'(n)$ es simplemente $x(n)$ desplazada circularmente dos unidades de tiempo, donde se ha seleccionado arbitrariamente la dirección antihoraria como la

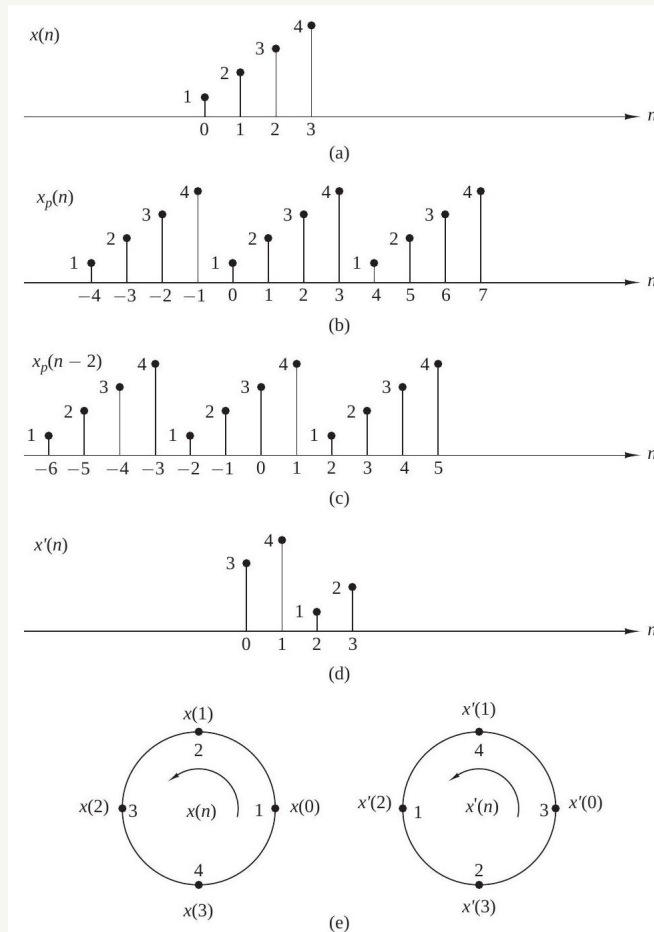


FIGURA 4. Desplazamiento circular de una secuencia.

dirección positiva. Por tanto, concluimos que un desplazamiento circular de una secuencia de N puntos es equivalente a un desplazamiento lineal de su extensión periódica, y viceversa.

La periodicidad inherente que resulta de la disposición de la secuencia de N puntos sobre la circunferencia impone una definición diferente de la simetría par e impar y la inversión temporal de una secuencia.

Una secuencia de N puntos se dice que es circularmente par si es simétrica respecto del punto cero de la circunferencia. Esto implica que

$$x(N-n) = x(n), \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (57)$$

Se dice que una secuencia de N puntos es circularmente impar si es antisimétrica con respecto al punto cero de la circunferencia. Esto implica que

$$x(N-n) = -x(n), \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (58)$$

La inversión temporal de una secuencia de N puntos se consigue invirtiendo sus muestras respecto del punto cero de la circunferencia. Luego la secuencia $x((-n))_N$ queda determinada por

$$x((-n))_N = x(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Esta inversión temporal es equivalente a representar $x(n)$ en el sentido horario sobre una circunferencia.

Una definición equivalente para las secuencias par e impar de la secuencia periódica asociada $x_p(n)$ es la siguiente

$$\begin{aligned} \text{par:} \quad & x_p(n) = x_p(-n) = x_p(N-n) \\ \text{impar:} \quad & x_p(n) = -x_p(-n) = -x_p(N-n) \end{aligned} \quad (59)$$

Si la secuencia periódica es compleja, tenemos

$$\begin{aligned} \text{par conjugada:} \quad & x_p(n) = x_p^*(N-n) \\ \text{impar conjugada:} \quad & x_p(n) = -x_p^*(N-n) \end{aligned} \quad (60)$$

Estas relaciones sugieren la descomposición de la secuencia $x_p(n)$ como sigue

$$x_p(n) = x_{pe}(n) + x_{po}(n) \quad (61)$$

donde

$$\begin{aligned} x_{pe}(n) &= \frac{1}{2} [x_p(n) + x_p^*(N-n)] \\ x_{po}(n) &= \frac{1}{2} [x_p(n) - x_p^*(N-n)] \end{aligned} \quad (62)$$

6.1.4. Propiedades de simetría de la DFT. Las propiedades de simetría para la DFT pueden obtenerse aplicando la metodología empleada anteriormente para la transformada de Fourier. Supongamos que la secuencia de N puntos $x(n)$ y su DFT son complejas. Entonces las secuencias se pueden expresar como

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (63)$$

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (64)$$

Sustituyendo (63) en la expresión para la DFT dada por (46), obtenemos

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} + x_I(n) \sen \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad (65)$$

$$X_I(k) = - \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \sen \frac{2\pi kn}{N} - x_I(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad (66)$$

Del mismo modo, sustituyendo (64) en la expresión de la IDFT dada por (47), obtenemos

$$x_R(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k) \cos \frac{2\pi kn}{N} - X_I(k) \sen \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad (67)$$

$$x_I(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k) \sen \frac{2\pi kn}{N} + X_I(k) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad (68)$$

Se tienen los siguientes casos

- (a) **Secuencias reales.** Si la secuencia $x(n)$ es real, se deduce directamente a partir de (46) que

$$X(N-k) = X^*(k) = X(-k) \quad (69)$$

En consecuencia, $|X(N-k)| = |X(k)|$ y $\angle X(N-k) = -\angle X(k)$. Además, $x_I(n) = 0$ y, por tanto, $x(n)$ se puede determinar a partir de (67), que es otra forma de la IDFT.

- (b) **Secuencias reales pares.** Si $x(n)$ es real y par, es decir,

$$x(n) = x(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

entonces (66) proporciona $X_I(k) = 0$. Por tanto, la DFT se reduce a

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (70)$$

que es real y par. Además, como $X_I(k) = 0$, la IDFT se reduce a

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cos \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (71)$$

(c) **Secuencias reales impares.** Si $x(n)$ es real e impar, es decir,

$$x(n) = -x(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

entonces (65) proporciona $X_R(k) = 0$. Por tanto,

$$X(k) = -j \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (72)$$

que es impar e imaginaria pura. Como $X_R(k) = 0$, la IDFT se reduce a

$$x(n) = j \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sin \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (73)$$

(d) **Secuencias imaginarias puras.** En este caso, $x(n) = jx_I(n)$. Por tanto, (65) y (66) se reducen a

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n) \sin \frac{2\pi kn}{N} \quad (74)$$

$$X_I(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} \quad (75)$$

Observe que $X_R(k)$ es impar y $X_I(k)$ es par.

Si $X_I(n)$ es impar, entonces $X_I(k) = 0$, por tanto, $X(k)$ es real pura. Por el contrario, si $X_I(n)$ es par, entonces $X_R(k) = 0$, por tanto, $X(k)$ es imaginaria pura.

6.2. Propiedades adicionales de la DFT.

6.2.1. *Inversión temporal de una secuencia.* Si

$$x(n) \xrightarrow[N]{\text{DFT}} X(k)$$

entonces

$$x((-n))_N = x(N-n) \xrightarrow[N]{\text{DFT}} X((-k))_N = X(N-k) \quad (76)$$

ya que invertir la secuencia de N puntos en el tiempo es equivalente a invertir los valores de la DFT. La inversión temporal de una secuencia $x(n)$ se ilustra en la Figura 5.

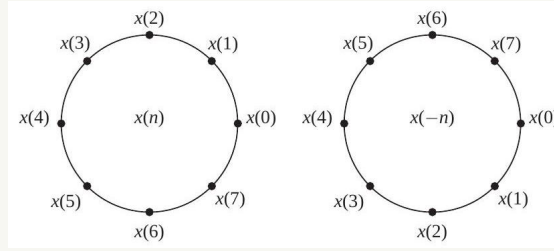


FIGURA 5. Inversión temporal de una secuencia.

Demostración. A partir de la definición de la DFT dada por (46), tenemos

Observe que $X(N - k) = X((-k))_N, 0 \leq k \leq N - 1$. $\text{DFT}\{x(N - n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(N - n)e^{-j2\pi kn/N}$

Si cambiamos el índice de n a $m = N - n$, entonces

$$\begin{aligned} \text{DFT}\{x(N - n)\} &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j2\pi k(N-m)/N} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{j2\pi km/N} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j2\pi m(N-k)/N} = X(N - k) \end{aligned}$$

□

6.2.2. *Desplazamiento temporal circular de una secuencia.* Si

$$x(n) \stackrel{\text{DFT}}{\Leftrightarrow} X(k)$$

entonces

$$x((n - l))_N \stackrel{\text{DFT}}{\Leftrightarrow} X(k)e^{-j2\pi kl/N} \quad (77)$$

Demostración. A partir de la definición de la DFT tenemos

$$\begin{aligned} \text{DFT}\{x((n-l))_N\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n-l))_N e^{-j2\pi kn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{l-1} x((n-l))_N e^{-j2\pi kn/N} \\ &\quad + \sum_{n=l}^{N-1} x(n-l) e^{-j2\pi kn/N} \end{aligned}$$

Pero $x((n-l))_N = x(N-l+n)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{l-1} x((n-l))_N e^{-j2\pi kn/N} &= \sum_{n=0}^{l-1} x(N-l+n) e^{-j2\pi kn/N} \\ &= \sum_{m=N-l}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi k(m+l)/N} \end{aligned}$$

Además,

$$\sum_{n=l}^{N-1} x(n-l) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{m=0}^{N-1-l} x(m) e^{-j2\pi k(m+l)/N}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{DFT}\{x((n-l))\} &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi k(m+l)/N} \\ &= X(k) e^{-j2\pi kl/N} \end{aligned}$$

□

6.2.3. *Desplazamiento en frecuencia circular.* Si

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{\text{PFT}} X(k)$$

entonces

$$x(n) e^{\frac{j2\pi ln}{N}} \xleftrightarrow[N]{\text{PFT}} X((k-l))_N$$

Por tanto, la multiplicación de la secuencia $x(n)$ por la secuencia exponencial compleja $e^{j2\pi kn/N}$ es equivalente al desplazamiento circular de la DFT l unidades en frecuencia. Ésta es la propiedad dual de la propiedad de desplazamiento temporal circular y su demostración es similar a la misma.

6.2.4. *Propiedades conjugadas complejas.* Si

$$x(n) \xrightarrow[N]{\text{PFT}} X(k)$$

entonces

$$x^*(n) \xrightarrow[N]{\text{DFT}} X^*((-k))_N = X^*(N-k) \quad (78)$$

La demostración de esta propiedad es similar a las anteriores. La IDFT de $X^*(k)$ es

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) e^{j2\pi kn/N} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi k(N-n)/N} \right] \quad (79)$$

Por tanto,

$$x^*((-n))_N = x^*(N-n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} NX^*(k) \quad (80)$$

6.2.5. *Correlación circular.* En general, para secuencias complejas $x(n)$ e $y(n)$, si

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X(k)$$

y

$$y(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} Y(k) \quad (81)$$

entonces

$$\tilde{r}_{xy}(l) \xrightarrow[N]{\text{DFT}} \tilde{R}_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$$

donde $\tilde{r}_{xy}(l)$ es la correlación cruzada circular (no normalizada), definida como

$$\tilde{r}_{xy}(l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-l))_N$$

6.2.6. *Teorema de Parseval.* En general, para secuencias complejas $x(n)$ e $y(n)$, si

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X(k)$$

y

$$y(n) \xrightarrow[N]{\text{DFT}} Y(k)$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \quad (82)$$

Demostración. La propiedad se obtiene de forma inmediata a partir de la propiedad de correlación circular dada en (6.2.5). Tenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \tilde{r}_{xy}(0)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{xy}(l) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{R}_{xy}(k) e^{j2\pi kl/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k) e^{j2\pi kl/N} \end{aligned}$$

Por tanto, (82) se obtiene evaluando la IDFT en $l = 0$. □

La expresión dada en (82) es la forma general del teorema de Parseval. En el caso especial en que $y(n) = x(n)$, (82) se reduce a

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

que expresa la energía de la secuencia de duración finita $x(n)$ en función de las componentes de frecuencia $\{X(k)\}$.

7. TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER Y CASOS DE ESTUDIO

La transformada de Fourier discreta es una herramienta poderosa para aproximar coeficientes de Fourier, sumas parciales de la serie de Fourier y transformadas de Fourier. Sin embargo tal herramienta solamente es útil si hay técnicas de cálculo eficientes para llevar a cabo gran número de cálculos involucrados en las aplicaciones típicas. Aquí es donde aparece la transformada rápida de Fourier o FFT. La FFT no es en sí una transformación, es más bien un procedimiento eficiente para calcular las transformadas de Fourier discretas.

En esta sección, utilizaremos MATLAB como herramienta para el análisis de señales mediante la Transformada Rápida de Fourier (FFT). En el primer caso, descompondremos una señal en sus componentes más simples. En el segundo caso, analizaremos un archivo de audio y aplicaremos filtros para mejorar su calidad. Esta metodología nos permitirá comprender mejor la estructura de las señales y optimizar su procesamiento.

7.1. Primer caso de estudio. Para este caso de estudio, generaremos tres señales con diferentes frecuencias y amplitudes. Estas tres señales se suman en una sola, como se observa en la parte superior de la figura 6. A esta señal se le aplica una señal de ruido gaussiano. El objetivo de aplicarle este ruido es que, al aplicar la Transformada Rápida de Fourier, no analicemos la señal original, la cual representaría un caso ideal. Por lo tanto, la señal con ruido se puede observar en la misma figura 6 en la parte inferior.

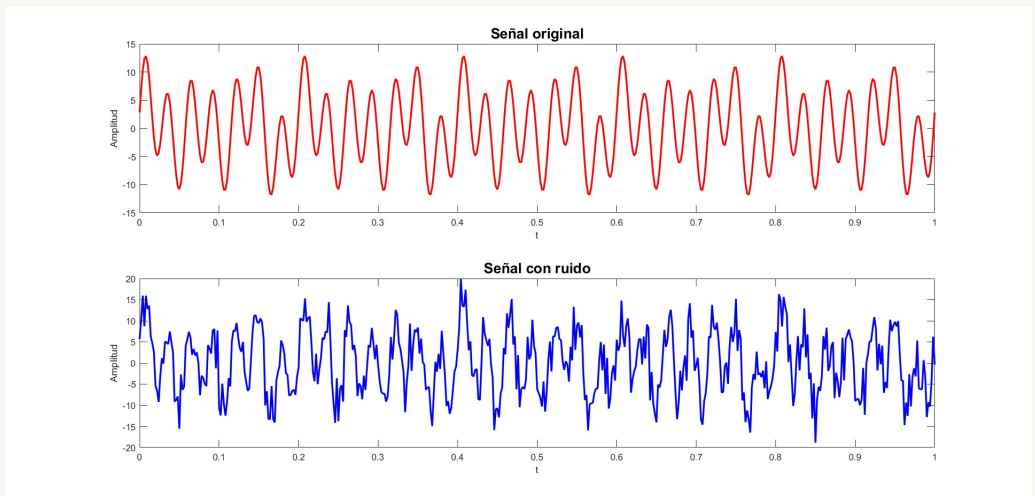


FIGURA 6. Señales de estudio

Al aplicar la FFT, podemos observar la amplitud y la frecuencia de cada una de las señales que conforman la señal compuesta en la figura 7. Este proceso es fundamental en el análisis de señales, ya que permite descomponer una señal compleja en sus componentes fundamentales.

La FFT tiene múltiples aplicaciones en diversos campos, entre las cuales destacan:

- **Procesamiento de señales:** Utilizada para filtrar ruido y mejorar la calidad de las señales.
- **Análisis espectral:** Permite identificar las frecuencias presentes en una señal, fundamental en telecomunicaciones.

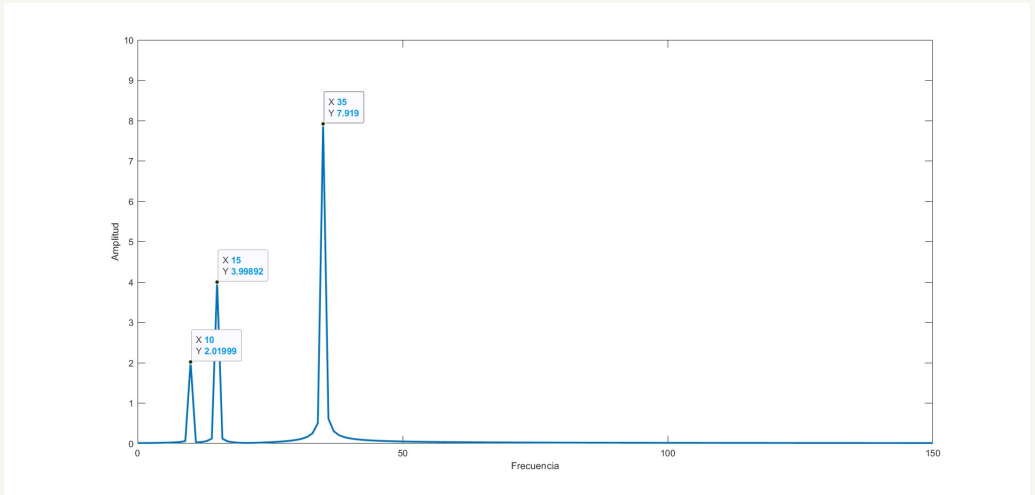


FIGURA 7. Señales de estudio

- **Compresión de datos:** Empleada en formatos como JPEG para imágenes y MP3 para audio.
- **Análisis de vibraciones:** Utilizada en ingeniería para monitorear el estado de maquinaria y estructuras.

El código de Matlab para llevar a cabo la simulación del proceso se presenta a continuación.

```
function Analisis
clc, close all
wm=500; %frecuencia de muestro
n=0:1/wm:1; %tiempo/unidad de muestras
```

```
A1=2; w1=10; phi1=0;
F1=Senal(A1,w1,phi1,n);
```

```
A2=4; w2=15; phi2=pi/4;
F2=Senal(A2,w2,phi2,n);
```

```

A3=8; w3=35; phi3=0;
F3=Senal(A3,w3,phi3,n);

x=F1+F2+F3;

xr=awgn(x,5,'measured');

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(n,x,'r','LineWidth',2)
title('Señal original','FontSize',16)
xlabel('t'), ylabel('Amplitud')
subplot(2,1,2)
plot(n,xr,'b','LineWidth',2)
title('Señal con ruido','FontSize',16)
xlabel('t'), ylabel('Amplitud')

[n,Y]=FFT(n,x);
figure(2)
plot(n*wm,Y,'LineWidth',2)
axis([0,150,0,10])
xlabel('Frecuencia'), ylabel('Amplitud')
end
function F=Senal(A,w,phi,n)
F=A*sin(2*pi*w*n+phi);
end
function [n,Y]=FFT(n,F)
Y=fft(F);
Y=abs(Y);
m=length(Y);
Y=Y/(m/2);
Y=Y(1:floor((m+1)/2));
n=n(1:floor((m+1)/2));
end

```

7.2. Segundo caso de estudio. El siguiente código de MATLAB está diseñado para llevar a cabo un análisis de audio que incluye la lectura, reproducción, visualización y filtrado de una señal de audio.

```

function Audio
clc, close all
[a,ws]=audioread('Sonido.wav');
N=length(a);
T=N/ws;
t=linspace(0,T,N);
t=t';
sound(a,ws)
pause(T+1)
x=fftshift(fft(a));
w=linspace(-ws/2,ws/2,N);
figure(1)
plot(w,abs(x).^2)
xlabel('Frecuencia'), ylabel('Amplitud')
ax=gca;
ax.XAxis.Exponent=3;
wc=650;
[B,A] = butter(10,wc/(ws/2),'low');
af=filter(B,A,a);
figure(2)
plot(t,a,'b',t,af,'r')
axis([0,T,-0.5,0.5])
xlabel('tiempo'), ylabel('Amplitud')
legend('Audio_original','','Audio_Filtrado')
grid on
sound(af,ws)
end

```

A continuación, se describen en detalle cada una de las etapas del proceso:

- El código comienza con la lectura de un archivo de audio llamado “Sonido.wav” que se puede descargar en el siguiente enlace <https://n9.cl/4zoz7x>. Utiliza la función “audioread” para cargar los datos de audio y la frecuencia de muestreo. Esto permite que el programa no solo procese el audio, sino que también lo

reproduzca. La función “sound” se emplea para reproducir la señal de audio en tiempo real

- El siguiente paso es realizar un análisis en el dominio de frecuencia utilizando la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Este análisis permite descomponer la señal de audio en sus componentes frecuenciales.
- El uso de “fft” seguido por “fftshift” permite centrar el espectro alrededor de cero, lo que facilita la visualización.
- Se gráfica la magnitud al cuadrado del espectro como se observa en la figura 8 en función de la frecuencia. Esto proporciona información sobre qué frecuencias están presentes en la señal y con qué amplitud.

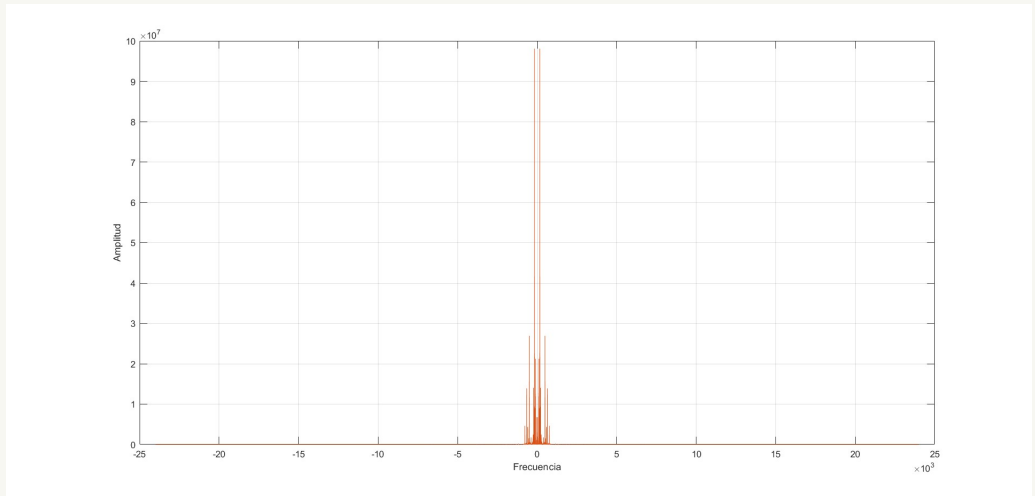


FIGURA 8. Espectro

- El código implementa un filtro pasabajo Butterworth con una frecuencia de corte definida (650 Hz). Este tipo de filtro es útil para eliminar componentes de alta frecuencia que pueden ser ruido o interferencias no deseadas.
- La función “butter” se utiliza para diseñar el filtro pasabajo, donde el orden del filtro (10) determina cuán abrupto es el corte entre las frecuencias permitidas y las bloqueadas.

- La función “filter” aplica este filtro a la señal original, generando una nueva señal filtrada. Esto permite suavizar la señal y reducir el ruido.
- Las dos señales se grafican en la figura 9, donde la señal original se muestra en azul y la filtrada en rojo. Esta comparación es esencial para entender cómo el filtrado ha afectado a la señal.

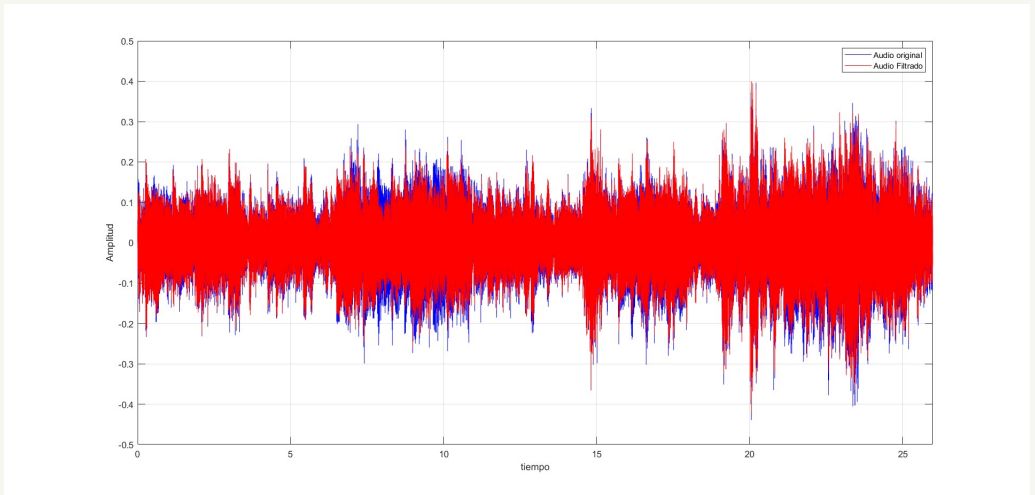


FIGURA 9. Audio

- Finalmente, el código reproduce la señal filtrada utilizando nuevamente la función “sound”. Esto permite al usuario escuchar cómo suena el audio después de haber sido procesado por el filtro pasabajo.

En resumen, este código es un ejemplo práctico y efectivo de cómo utilizar la transformada rápida de Fourier en MATLAB para realizar un análisis completo de señales de audio. Desde la lectura y reproducción hasta la transformación en el dominio de frecuencia y aplicación de filtros, cada paso está diseñado para proporcionar información valiosa sobre las características del sonido.

REFERENCIAS

- [1] Pittol, JA, Peña, A. y Mirena, J. (2018). Integración entre MATLAB y STARDOM FCN-RTU para la simulación de algoritmos de control de procesos MATLAB-STARDOM FCN-RTU integración para la simulación de algoritmos de control de procesos.
- [2] Seborg, D. E., Edgar, T. F., Mellichamp, D. A., and Doyle III, F. J. (2016). Process dynamics and control. John Wiley and Sons.
- [3] González, KG (2017). Conversión del Dominio Discreto en Dominio Continuo: Otro Enfoque De Aprendizaje.
- [4] Bencomo, SD, Parte, MD y García, HR (1980). Compensacion de sistemas discretos variando el periodo de prueba.
- [5] Torres-Sospedra, J., Richter, P, Moreira, A.J., Mendoza-Silva, G.M., Lohan, E.S., Trilles, S., Matey-Sanz, M., and Huerta, J. (2022). A Comprehensive and Reproducible Comparison of Clustering and Optimization Rules in Wi-Fi Fingerprinting. IEEE Transactions on Mobile Computing, 21, 769-782.
- [6] Churchill, R. V., Ward Brown, J. (2009). Complex Variables and Applicatios. New York: McGraw-Hill, ISBN: 978-0-07-305194-9.
- [7] Jerrold E. Marsden, M. J. Hoffman (1998). Basic Complex Analysis. New York: W. H. Freeman, ISBN: 978-1464152191.
- [8] James, G. (2002). Matemáticas avanzadas para ingeniería. México: Prentice Hall, ISBN: 9789702602095.
- [9] Jhon G. Proakis. Dimitris G. Manolakis (2007). Tratamiento digital de señales. México: Pearson Education, ISBN: 9788483223475.
- [10] D. Sundararajan. (2001). Discrete Fourier Transform, The: Theory, Algorithms And Applications. World Scientific Publishing Company, ISBN: 9789814491723.
- [11] José Humberto Serrano Devia. (2019). Análisis de Fourier. Teoría y aplicaciones. Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, ISBN: 9789587873412.
- [12] Peter, V. O'Neil (2007). Matemáticas avanzadas para ingeniería. México: Cengage Learning, ISBN: 9786074814576.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. GRAL. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN 1421, OLÍMPICA, 44430, GUADALAJARA JALISCO

E-mail address: ricardo.aguila@academicos.udg.mx

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. GRAL. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN 1421, OLÍMPICA, 44430, GUADALAJARA JALISCO

E-mail address: alejandro.navat@academicos.udg.mx

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. GRAL. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN 1421, OLÍMPICA, 44430, GUADALAJARA JALISCO

E-mail address: martin.munoz@academicos.udg.mx

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. GRAL. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN 1421, OLÍMPICA, 44430, GUADALAJARA JALISCO

E-mail address: maria.olivares@academicos.udg.mx

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. GRAL. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN 1421, OLÍMPICA, 44430, GUADALAJARA JALISCO

E-mail address: ernesto.urenda@academicos.udg.mx



Instituto de
Matemáticas UNAM

Aportaciones matemáticas
electrónicas 2