







## **Comité Editorial**

Marcelo Aguilar González de la Vega *IM, UNAM*

José Luis Cisneros-Molina *IM, UNAM*

José Ma. González Barrios Murguía *IIMAS, UNAM*

Jesús González Espino Barros *CINVESTAV*

Luis Hernández Lamonedá *CIMAT*

Jorge León Vázquez *CINVESTAV*

Max Neumann Coto *IM, UNAM*

Laura Ortiz Bobadilla *IM, UNAM*

Sergio Rajsbaum Gorodezky *IM, UNAM*

Jorge X. Velasco Hernández *IM, UNAM*

## **Editores Ejecutivos**

Juan José Montellano Ballesteros

*Instituto de Matemáticas, UNAM*

juancho@im.unam.mx

José Luis Cisneros-Molina

*Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, UNAM*

j lcm@matcuer.unam.mx

jlcisneros@im.unam.mx

**Aportaciones Matemáticas**

**Textos**

# Ecuaciones diferenciales



## SOLUCIONES INVARIANTES DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

ALEXANDER YAKHNO, LILIYA YAKHNO  
ELBA LILIA DE LA CRUZ GARCÍA, MTRO. LUIS MANUEL PIÑUELAS CASTRO

RESUMEN. El material publicado son las notas del mini-curso que dieron los autores durante la VII Escuela de Verano en Matemáticas (CUCEI, UdeG). La mayor parte de ese material se encuentra en el libro [1], en la tesis [2] y en los artículos [3], [4].

ABSTRACT. The published material is the notes of the mini-course given by the authors during the VII Summer School in Mathematics (CUCEI, UdeG). Most of this material is found in the book [1], in the thesis [2] and in the articles [3], [4].

### 1. BASES TEÓRICAS

**1.1. Soluciones invariantes de las ecuaciones diferenciales.** Consideremos un sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales  $F = (F^1, \dots, F^m)$  para  $m$  funciones incógnitas  $u = (u^1, \dots, u^m)$  (variables dependientes) de  $n$  variables independientes  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de orden  $s$

$$F(x, u, p_1, \dots, p_s) = 0, \quad (1)$$

el cual admite un grupo de transformaciones puntuales  $G_r$  (grupo de simetrías):

$$x' = f(x, u, a), \quad u' = g(x, u, a), \quad a \in \mathbb{R}^r. \quad (2)$$

Aquí  $p_1$  representa el conjunto de las derivadas parciales de primer orden, y  $p_s$  es el conjunto de las derivadas parciales de orden  $s$ . El algoritmo de la búsqueda de simetrías puntuales para un sistema de ecuaciones diferenciales está descrito brevemente en el punto 2.2. Recordaremos [1], que al grupo (2) le corresponde el álgebra de Lie de

---

*Palabras Claves.* Simetrías. Soluciones invariantes. Ecuaciones diferenciales.

los generadores (operadores infinitesimales)  $L_r = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$  de la forma  $X = \xi \partial_x + \eta \partial_u$ , relacionados con el grupo por las ecuaciones de Lie:

$$\left. \frac{df}{da} \right|_{a=0} = \xi, \quad \left. \frac{dg}{da} \right|_{a=0} = \eta. \quad (3)$$

Sea  $u = \varphi(x)$  una solución del sistema (1). Actuaremos con la transformación  $T_a \in G_r$  a la variedad  $u = \varphi(x)$ . Como resultado obtendremos una nueva variedad  $u' = \varphi(x', a)$ , la cual es también la solución del sistema (1). Efectivamente, prolongaremos la solución  $u = \varphi(x)$  en el espacio de las variables  $\{x, u, p_1, \dots, p_s\}$ . Fijando el punto  $x_0$ , obtendremos el punto  $(x_0, u_0, \dots, p_{s_0})$ , que pertenece a la variedad definida por la ecuación (1). Consideremos el grupo  $G_r$  llamado la  $s$ -íma prolongación del grupo  $G_r$ :

$$x' = f(x, u, a), \quad u' = g(x, u, a), \quad p'_1 = h^1(x, u, p_1, a), \quad \dots, \quad p'_s = h^s(x, u, p_1, p_2, \dots, p_s, a). \quad (4)$$

Bajo la transformación prolongada  $T_a \in G_r$ , este punto se moverá al punto  $(x'_0, u'_0, \dots, p'_{s_0})$ , que también pertenece a la misma variedad. De aquí se sigue que  $u' = \varphi(x', a)$  es la solución de la ecuación (1). Así, el grupo  $G_r$  actúa sobre el conjunto de las soluciones de manera transitiva, es decir, bajo la acción de las transformaciones admitidas, la solución del sistema inicial de ecuaciones se mueve en la solución del mismo sistema. En lo anterior está basado el método de reproducción de las soluciones de una solución dada (vea un ejemplo en la sección 4.2).

Entre todas las soluciones, se pueden encontrar aquellas que bajo algunas transformaciones, se transforman a sí mismas, es decir  $u = \phi(x) = \phi(x')$ . Estas soluciones, en algún sentido, son más fáciles de construir que las demás del sistema inicial. Dichas soluciones, las cuales son puntos "no movibles" con respecto a la acción del grupo, se llaman *soluciones invariantes*.

Sea  $H$  un subgrupo del grupo  $G_r$ , admitido por la ecuación (1).

**Definición 1.1.** Una solución de la ecuación (1)  $u = \varphi(x)$  se llama la solución invariante con respecto al subgrupo  $H$  (o la  $H$ -solución invariante) si la variedad que le corresponde es una variedad invariante del grupo  $H$ .

**Ejemplo 1.2.** Consideremos la ecuación Eikonal  $u_x^2 + u_y^2 = 1$ , que tiene la solución trivial  $u = x$ . A esta solución le corresponde la variedad  $u - x = 0$ , la cual es invariante con respecto al grupo de translaciones  $y' = y + a$ . Por lo tanto  $u = x$  es una solución invariante con respecto a la acción de este grupo.



En relación con el concepto de la solución invariante, aparece el problema de la búsqueda de todas las soluciones invariantes del sistema dado de ecuaciones (1). Este problema incluye las siguientes etapas:

1. La condición necesaria para la existencia de la  $H$ -solución invariante.
2. El algoritmo de la búsqueda de las  $H$ -soluciones invariantes.
3. La clasificación de las soluciones invariantes.

**1.2. Condición necesaria para la existencia de una  $H$ -solución invariante.** Sean  $J_1, \dots, J_t$  el conjunto completo de los invariantes funcionalmente independientes del grupo  $H$ . Consideremos la matriz  $\left(\frac{\partial J_i}{\partial u^k}\right)$ , denotamos su rango por  $l$ .

**Teorema 1.3.** *Para la existencia de las  $H$ -soluciones invariantes es necesario que  $l = m$ , donde  $m$  es el número de las variables dependientes.*

**Ejemplo 1.4.** La ecuación  $u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = 1$  admite los operadores (entre otros):

$$X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

Sea  $H$  el subgrupo generado por  $X_1$ . Verificaremos la condición necesaria de la existencia de la  $H$ -solución invariante. Los invariantes se determinan de la ecuación

$$x_1 \frac{\partial}{\partial u} J + u \frac{\partial}{\partial x_1} J = 0.$$

Esta ecuación nos da dos invariantes  $J_1 = u^2 - x_1^2$ ,  $J_2 = x_2$ . En este caso  $l = 1$ , por lo tanto, la condición necesaria de la existencia de la  $H$ -solución se cumple. Para el subgrupo generado por  $X_2$ , se obtienen  $J_1 = x_2$ ,  $J_2 = u$  y otra vez la condición se cumple. Para  $X_3$ , tenemos  $J_1 = x_1$ ,  $J_2 = x_2$ , el rango es 0 y para el grupo correspondiente la condición necesaria no se cumple.

**1.3. El algoritmo de búsqueda de  $H$ -soluciones invariantes.** Sea  $J_1, J_2, \dots, J_t$  el conjunto completo de los invariantes funcionalmente independientes, entonces, según la igualdad  $\text{rank}\left(\frac{\partial J_i}{\partial u^k}\right) = m$ , se sigue que existen con exactitud  $m$  invariantes funcionalmente independientes  $J_1, \dots, J_m$ , los cuales dependen de las funciones buscadas  $u^1, \dots, u^m$ . Los demás invariantes  $J_{m+1}, \dots, J_t$  dependen sólo de las variables independientes.

Superponemos los invariantes  $J_1, \dots, J_m$  como las funciones de las invariantes  $J_{m+1}, \dots, J_t$ :

$$J_k = \Phi_k(J_{m+1}, \dots, J_t). \quad (5)$$

La variedad definida por las ecuaciones (5) es evidentemente invariante con respecto al grupo  $H$ . De (5) se puede expresar  $u^1, \dots, u^m$  como funciones de las otras variables, y debemos determinar las funciones  $\Phi_k (k = 1, \dots, m)$ . Sustituiremos estas relaciones en el sistema inicial (1), como resultado obtendremos un sistema nuevo, que se llama sistema-factor  $S/H$ . Este sistema en cierto sentido es más simple que el sistema inicial (1), porque depende de un número menor de variables. Efectivamente, sea  $r'$  la dimensión del álgebra de Lie, que corresponde al grupo  $H$ , entonces  $t = m + n - r'$ . De aquí se sigue que el número de las variables independientes en el sistema  $S/H$  es igual a  $n - r'$ . Este número se llama el *rango de la solución invariante* y se denota por  $\rho = n - r'$ .

**Ejemplo 1.5.** Consideramos el subgrupo generado  $X_1$  del Ejemplo 1.4. Según lo anterior, tenemos  $J_1 = \Phi(J_2)$ , es decir,  $u^2 - x_1^2 = \Phi(x_2) \neq 0$ . De aquí  $u = \pm \sqrt{x_1^2 + \Phi(x_2)}$ . Para determinar la función  $\Phi$  sustituiremos esta relación a la ecuación  $u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = 1$ . Así, el sistema  $S/H$  tendrá la forma

$$x_1^2 + \frac{1}{4}\Phi'^2 = x_1^2 + \Phi \Rightarrow \frac{1}{4}\Phi'^2 = \Phi.$$

La solución invariante es igual a  $u = \pm \sqrt{x_1^2 + (x_2 + c)^2}$ .

Si consideremos el grupo  $H$  para  $X_2$ , entonces el sistema  $S/H$  tiene la forma  $\Phi'(x_2) = \pm 1$ . Una solución no tan trivial se obtiene para el subgrupo que corresponde a

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u \frac{\partial}{\partial u}.$$

La condición necesaria se cumple, porque  $J_1 = x_1/x_2$ ,  $J_2 = u/x_1$ . Buscamos la solución invariante en la forma  $u = x_1\Phi(z)$ , donde  $z = J_1$ . En este caso el sistema  $S/H$  es una ecuación diferencial ordinaria

$$(\Phi + z\Phi')^2 + z^4\Phi'^2 = 1,$$

para la cual las funciones  $\Phi(z) = \pm \sqrt{z^2 + 1}/z$  y  $\Phi(z) = c/z + \sqrt{1 - c^2}$  son soluciones. Algunos ejemplos no triviales de los sistemas  $S/H$  serán considerados más adelante.

Otra clase muy importante de las soluciones invariantes son soluciones *autosimilares*. Estas soluciones se usan para modelar diferentes procesos. Para construir las se han creado diferentes metodologías, basadas en el análisis de las dimensiones de los valores, los cuales están incluidos en la ecuación. Ahora es conocido, que las soluciones automodelos es una clase muy especial de las soluciones invariantes, que corresponde al grupo de estiramiento (escalamiento).

**1.4. Clasificación de soluciones invariantes.** Naturalmente es posible clasificar las soluciones invariantes por su rango. Pero en este caso entre las soluciones del mismo rango, puede existir soluciones "iguales" en el sentido que una solución puede ser obtenida a partir de otra por la transformación correspondiente al grupo admitido.

**Ejemplo 1.6.** La solución invariante de la ecuación  $u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = 1$  en la subálgebra  $X = \partial/\partial x_1$  tiene la forma  $u = f(x_2)$ , y en la subálgebra  $Y = \partial/\partial x_2$  tiene la forma  $u = g(x_1)$ . Estas dos soluciones son "iguales", porque la transformación  $x'_1 = x_2, x'_2 = x_1$  mueve una solución a la otra.

De este ejemplo es claro que las soluciones "iguales" en el sentido del análisis grupal, se obtienen en la base de las subálgebras semejantes. Por lo tanto, para describir todas las diferentes soluciones invariantes, es necesario primeramente construir el sistema óptimo de subálgebras y después construir las soluciones en la base de las subálgebras de este sistema.

**Ejemplo 1.7.** Determinaremos la forma de todas las soluciones invariantes, las cuales se pueden construir en subálgebras unidimensionales para las ecuaciones de Tresca. Este sistema describe el estado plástico de un cuerpo sólido bajo la condición de plasticidad (criterio) de Tresca:

$$\begin{aligned} \nabla p + v \cdot \nabla v + v \operatorname{div} v &= 0, \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= 1, \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $v = (v_1, v_2, v_3), \nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$

El sistema (6) admite el álgebra de Lie  $L_8$  con la base:

$$\begin{aligned} X_0 &= \partial_p, & X_i &= \partial_{x_i}, & X_4 &= x_i \partial_{x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \\ Z_1 &= x_2 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_2} + v_2 \partial_{v_3} - v_3 \partial_{v_2}, \\ Z_2 &= x_3 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_3} + v_3 \partial_{v_1} - v_1 \partial_{v_3}, \\ Z_3 &= x_1 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_1} + v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}. \end{aligned}$$

La tabla de los conmutadores tiene la forma

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$X_0$
$X_1$	0	0	0	$X_1$	0	$-X_3$	$X_2$	0
$X_2$	0	0	0	$X_2$	$X_3$	0	$-X_1$	0
$X_3$	0	0	0	$X_3$	$-X_2$	$X_1$	0	0
$X_4$	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	0	0	0	0	0
$Z_1$	0	$-X_3$	$X_2$	0	0	$-Z_3$	$Z_2$	0
$Z_2$	$X_3$	0	$-X_1$	0	$Z_3$	0	$-Z_1$	0
$Z_3$	$-X_2$	$X_1$	0	0	$-Z_2$	$Z_1$	0	0
$X_0$	0	0	0	0	0	0	0	0

De esta tabla se sigue que el operador  $X_0$  es el centro del álgebra de Lie  $L_8$  y esta álgebra no es resoluble. Escribiremos los automorfismos básicos. El primer grupo de automorfismos que se genera por los operadores  $X_1, X_2, X_3$ , es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 X'_4 &= X_4 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3, \\
 A_1 : \quad Z'_1 &= Z_1 + a_2 X_3 - a_3 X_2, \\
 Z'_2 &= Z_2 - a_1 X_3 + a_3 X_1, \\
 Z'_3 &= Z_3 + a_1 X_2 - a_2 X_1.
 \end{aligned}$$

El segundo grupo se genera por el operador  $X_4$ :

$$A_2 : \quad X'_i = X_i \exp(-a_4), \quad i = 1, 2, 3.$$

El tercer grupo se genera por  $Z_1, Z_2, Z_3$ :

$$\begin{aligned}
 X'_2 &= X_2 \cos \alpha - X_3 \sin \alpha, & Z'_2 &= Z_2 \cos \alpha - Z_3 \sin \alpha, \\
 X'_3 &= X_2 \sin \alpha + X_3 \cos \alpha, & Z'_3 &= Z_2 \sin \alpha + Z_3 \cos \alpha, \\
 A_3 : \quad X'_1 &= X_1 \cos \beta + X_3 \sin \beta, & Z'_1 &= Z_1 \cos \beta + Z_3 \sin \beta, \\
 X'_3 &= -X_1 \sin \beta + X_3 \cos \beta, & Z'_3 &= -Z_1 \sin \beta + Z_3 \cos \beta, \\
 X'_1 &= X_1 \cos \gamma - X_2 \sin \gamma, & Z'_1 &= Z_1 \cos \gamma - Z_2 \sin \gamma, \\
 X'_2 &= X_1 \sin \gamma + X_2 \cos \gamma, & Z'_2 &= Z_1 \sin \gamma + Z_2 \cos \gamma.
 \end{aligned}$$

Además de estos automorfismos internos, se admiten dos automorfismos externos  $E_1: x_i \rightarrow -x_i$ ,  $E_2: v_i \rightarrow -v_i$ .

Ahora comenzamos la construcción de las subálgebras no semejantes. Consideremos el operador general unidimensional

$$X = k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3 + k_4 X_4 + k_5 Z_1 + k_6 Z_2 + k_7 Z_3.$$

Sean todos los  $k_i \neq 0$ . Usando el grupo de automorfismos  $A_3$ , se pueden hallar los ángulos  $\alpha$  y  $\gamma$ , tales que  $X'_2$  y  $X'_3$  se reducen a cero, es decir, el vector  $X$  en el caso general es semejante al vector

$$X = k_1 X_1 + k_4 X_4 + k_5 Z_1 + k_6 Z_2 + k_7 Z_3,$$

donde  $k_i \neq 0$ . Ahora, usando los automorfismos del grupo  $A_1$ , reduciremos el vector  $X$  al vector  $X = k_1 X_1 + k_5 Z_1$  o bien  $X = \delta X_1 + Z_1$ . Si  $\delta \neq 0$ , por medio de  $A_2$  se obtiene el operador  $Z_1 \pm X_1$ , luego usamos el automorfismo  $E_1$  y obtenemos  $X_1 + Z_1$ .

Resumiendo: en el caso general, el operador  $X$  es semejante a  $\langle X_1 \rangle$ , o a  $\langle X_1 + Z_1 \rangle$ .

Ahora sean  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ . En este caso funciona sólo el tercer grupo de los automorfismos y obtenemos dos casos: o  $\langle X_4 + \delta Z_1 \rangle$ , o  $\langle Z_1 \rangle$ .

Así, la clasificación de subálgebras unidimensionales es finalizada. Se tienen cuatro clases de subálgebras no semejantes:

$$\langle X_1 \rangle, \langle X_1 + Z_1 \rangle, \langle X_4 + \delta Z_1 \rangle, \langle Z_1 \rangle.$$

El operador  $X_0$  es el centro de  $L_8$  y no puede ser modificado por ningún automorfismo, por lo tanto tenemos que agregarlo a todas las clases de las subálgebras no semejantes. Finalmente el sistema óptimo  $\Theta_1$  tiene la forma:

1.  $\langle X_1 + \zeta X_0 \rangle$ ,
2.  $\langle X_1 + Z_1 + \zeta X_0 \rangle$ ,
3.  $\langle X_4 + \delta Z_1 + \zeta X_0 \rangle$ ,
4.  $\langle Z_1 + \zeta X_0 \rangle$ ,
5.  $\langle X_0 \rangle$ ,

donde  $\delta, \zeta$  son constantes arbitrarias reales.

Las soluciones invariantes, según la condición necesaria de la existencia, pueden ser construidas en las subálgebras 1-4. Sus formas son:

1.  $v_1 = v_1(x_2, x_3)$ ,  $v_2 = v_2(x_2, x_3)$ ,  $v_3 = v_3(x_2, x_3)$ ,  $p = \omega x_1 + p(x_2, x_3)$ ;
2.  $u = u(r, z + \theta)$ ,  $v = v(r, z + \theta)$ ,  $\omega = \omega(r, z + \theta)$ ,  $p = \zeta z + p(r, z + \theta)$ ;
3.  $u = u(z, \delta \ln r + \theta)$ ,  $v = v(z, \delta \ln r + \theta)$ ,  $\omega = \omega(z, \delta \ln r + \theta)$ ,  
 $p = \zeta \ln r + p(z, \delta \ln r + \theta)$ ;

$$4. \quad u = u(r, z), \quad v = v(r, z), \quad \omega = \omega(r, z), \quad p = \zeta\theta + p(r, z),$$

donde  $\{r, z, \theta\}$  es el sistema de las coordenadas cilindricas y

$$u = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta, \quad v = -v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta, \quad \omega = v_3.$$

Para determinar cada una de estas soluciones hay que sustituir su forma al sistema inicial de Tresca (6). Finalmente obtendremos el sistema  $S/H$ , el cual sirve para la determinación de las funciones buscadas y ahora tiene sólo dos variables independientes.

## 2. OSCILACIONES DE UNA CUERDA ELÁSTICA CON CORRIENTE ELÉCTRICA EN UN CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

**2.1. Sistema de ecuaciones.** Se buscan las formas de la solución invariante del sistema de ecuaciones no homogéneas en derivadas parciales de segundo orden para tres funciones incógnitas  $u^x(x, t)$ ,  $u^y(x, t)$ ,  $u^z(x, t)$  que dependen de dos variables independientes  $x$  distancia y  $t$  tiempo, el cual describe el movimiento de una cuerda elástica con corriente eléctrica en un campo magnético permanente.

Las ecuaciones de movimiento transversal y longitudinal con una fuerza externa se expresan como:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u^{y,z}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T(x) \frac{\partial u^{y,z}}{\partial x} \right) + f_L^{y,z}(x, t), \quad (7)$$

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u^x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (T(x) + \lambda(x)) \frac{\partial u^x}{\partial x} \right] + f_L^x(x, t), \quad (8)$$

donde  $T(x)$  es la tensión de la cuerda,  $\lambda(x)$  es el módulo de elasticidad,  $\rho(x)$  es la densidad lineal de la cuerda y  $f^{x,y,z}(x, t)$  son las fuerzas externas de Lorentz.

El caso particular a analizar es cuando las fuerzas externas de Lorentz son las siguientes:

$$f_L^x(x, t) = 0, \quad f_L^y(x, t) = I(t)H^x(x) \frac{\partial u^z}{\partial x}, \quad f_L^z(x, t) = -I(t)H^x(x) \frac{\partial u^y}{\partial x},$$

donde  $I(t)$  es la corriente eléctrica y  $H^x(x)$  el campo magnético. Para este caso las funciones  $\rho(x)$ ,  $\lambda(x)$ ,  $T(x)$  son constantes (caso de una cuerda homogénea). Por lo

tanto, el sistema se reescribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u^x}{\partial t^2} &= (\tilde{T} + \tilde{\lambda}) \frac{\partial^2 u^x}{\partial x^2}, \\ \rho \frac{\partial^2 u^y}{\partial t^2} &= \tilde{T} \frac{\partial^2 u^y}{\partial x^2} + I(\tilde{t})H^x(x) \frac{\partial u^z}{\partial x}, \\ \rho \frac{\partial^2 u^z}{\partial t^2} &= \tilde{T} \frac{\partial^2 u^z}{\partial x^2} - I(\tilde{t})H^x(x) \frac{\partial u^y}{\partial x}.\end{aligned}$$

Haciendo los cambios  $\frac{\tilde{t} + \tilde{\lambda}}{\rho} = T_1$ ,  $\frac{\tilde{T}}{\rho} = T_2$  y  $\frac{I(\tilde{t})}{\rho} = I(t)$ ,  $H^x(x) = H(x)$  y reescribiendo las variables independientes como  $t = x_1$ ,  $x = x_2$  y las dependientes de la forma  $u^x = u^1$ ,  $u^y = u^2$ ,  $u^z = u^3$ , el sistema queda descrito como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^1}{\partial x_1^2} &= T_1 \frac{\partial^2 u^1}{\partial x_2^2}, \\ \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_1^2} &= T_2 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2} + I(x_1)H(x_2) \frac{\partial u^3}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 u^3}{\partial x_1^2} &= T_2 \frac{\partial^2 u^3}{\partial x_2^2} - I(x_1)H(x_2) \frac{\partial u^2}{\partial x_2}.\end{aligned}\tag{9}$$

Realizando el cambio de notación siguiente en las derivadas  $u_j^k = p_j^k$ ,  $u_{ij}^k = p_{ij}^k$ , el sistema (9) queda de la forma:

$$\begin{aligned}p_{11}^1 &= T_1 p_{22}^1, \\ p_{11}^2 &= T p_{22}^2 + I(x_1)H(x_2)p_2^3, \\ p_{11}^3 &= T p_{22}^3 - I(x_1)H(x_2)p_2^2.\end{aligned}$$

Igualando a cero el sistema, se obtiene:

$$\begin{aligned}p_{11}^1 - T_1 p_{22}^1 &= 0, \\ p_{11}^2 - T p_{22}^2 - I(x_1)H(x_2)p_2^3 &= 0, \\ p_{11}^3 - T p_{22}^3 + I(x_1)H(x_2)p_2^2 &= 0.\end{aligned}\tag{10}$$

**2.2. Algoritmo de búsqueda de simetrías.** Buscamos el operador admitido por la ecuación (10) de la forma

$$X = \sum_{i=1}^2 \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k},$$

donde  $\xi^i, \eta^k$  son funciones de  $x_i, u^k$  a encontrar.

Ya que el sistema es de segundo orden, para encontrar los coeficientes  $\xi^i, \eta^k$  se necesitará la segunda prolongación del operador  $X$ , el operador prolongado es

$$X_2 = X + \xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} + \xi_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial p_{ij}^\alpha},$$

con  $\xi_j^i = D_j(\eta^i) - p_\beta D_j(\xi^\beta)$ ,  $\xi_{kj}^i = D_j(\xi_k^i) - p_{k\beta}^i D_j(\xi^\beta)$ , donde  $D_j$  son los operadores de derivada total dados por las siguientes fórmulas:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + p_1^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + p_{11}^\alpha \frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} + p_{12}^\alpha \frac{\partial}{\partial p_2^\alpha},$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + p_2^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + p_{21}^\alpha \frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} + p_{22}^\alpha \frac{\partial}{\partial p_2^\alpha}.$$

Se aplica el operador  $X_2$  sobre el sistema (10), pasamos a la variedad dada por el sistema y se iguala a cero (criterio de invarianza)

$$X_2(\vec{F}) \Big|_{\vec{F}=0} = 0, \quad (11)$$

donde  $\vec{F}$  es el sistema (10). Como resultado, obtenemos un sistema de ecuaciones definitivas, el cual se divide por las variables  $p_{ij}^k, p_i^k$  y sus potencias, en un sistema sobre-determinado de ecuaciones diferenciales lineales en las funciones  $\xi^i$  y  $\eta^k$ .

Debido a la presencia de las funciones-parámetros, este problema se convierte en un problema conocido como clasificación grupal. Primero se determina el grupo de transformaciones que se admite por (9) para cualquier forma de las funciones-parámetros involucradas:  $I(x_1), H(x_2)$  al cual llamaremos núcleo de la transformación. Luego se buscan las formas específicas de estas funciones, de tal manera que el grupo de simetrías tenga la mayor dimensión posible. Esos casos especiales son de mayor interés, porque pueden producir un mayor número de las formas de soluciones invariantes. Aplicando el algoritmo de la búsqueda del grupo de transformaciones, se construyen las formas de soluciones invariantes, estas formas de solución reducen el número de variables independientes, por lo que en este caso, el sistema factor resultante es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.



**2.3. Núcleo de la transformación.** La base del álgebra de las simetrías admitidas para cualquier forma de  $I(x_1)$  y  $H(x_2)$  tiene la forma:

$$X_1 = u^1 \partial_{u^1}, \quad X_2 = u^2 \partial_{u^2} + u^3 \partial_{u^3}, \quad X_3 = u^3 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^3},$$

$$X_+ = f^1(x_1, x_2) \partial_{u^1} + f^2(x_1, x_2) \partial_{u^2} + f^3(x_1, x_2) \partial_{u^3},$$

donde  $f^1(x_1, x_2), f^2(x_1, x_2), f^3(x_1, x_2)$  son soluciones arbitrarias del sistema (9).

Los generadores infinitesimales del núcleo tienen la siguiente tabla de conmutadores

[ , ]	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$X_1$	0	0	0
$X_2$	0	0	0
$X_3$	0	0	0

donde los operadores  $X_1, X_2$  y  $X_3$  forman un álgebra de Lie abeliana y los operadores  $X_+$  y forma un ideal en el álgebra de Lie.

Finalmente obtenemos, que  $L = L_3 \oplus L_\infty$ , donde  $L_\infty$  se genera por los operadores  $X_+$  y forma un ideal en el álgebra de Lie  $L$ . Ya que los operadores infinitesimales del núcleo no contienen derivadas respecto a las variables independientes, no es posible construir formas de soluciones invariantes a partir de ellos.

**2.4. Funciones-parámetros potenciales.** Un caso que se obtiene al resolver (11), donde el álgebra de simetrías admisible es más amplia, es cuando se tienen la siguientes funciones parámetros:

$$I(x_1) = m_1(x_1 + r_1)^{m-1}, \quad H(x_2) = m_2(x_2 + r_2)^{-m}.$$

La base del álgebra de simetrías admitida para las formas de las funciones parámetros potenciales, es:

$$Y_p = (x_1 + r_1) \partial_{x_1} + (x_2 + r_2) \partial_{x_2},$$

$$X_1 = u^1 \partial_{u^1}, \quad X_2 = u^2 \partial_{u^2} + u^3 \partial_{u^3}, \quad X_3 = u^3 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^3},$$

$$X_+ = f^1(x_1, x_2) \partial_{u^1} + f^2(x_1, x_2) \partial_{u^2} + f^3(x_1, x_2) \partial_{u^3},$$

donde  $f^1(x_1, x_2), f^2(x_1, x_2), f^3(x_1, x_2)$  son soluciones arbitrarias del sistema (9).

Los generadores infinitesimales para el caso de funciones-parámetros exponenciales tienen la siguiente tabla de conmutadores

[ , ]	$Y_p$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$Y_p$	0	0	0	0
$X_1$	0	0	0	0
$X_2$	0	0	0	0
$X_3$	0	0	0	0

donde los operadores  $Y_p$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  forman un álgebra de Lie abeliana y los operadores  $X_+$  forman un ideal en el álgebra de Lie. Finalmente obtenemos, que  $L = L_4 \oplus L_\infty$ , donde  $L_\infty$  se genera por los operadores  $X_+$  y forma un ideal en el álgebra de Lie  $L$ .

El sistema óptimo de subálgebras no equivalentes, es el siguiente:

$$\langle Y_p \rangle, \langle Y_p + \alpha X_1 \rangle, \langle Y_p + \alpha X_1 + \beta X_2 \rangle, \langle Y_p + \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 \rangle,$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

De la subálgebra  $\theta_1 = \langle X_1 \rangle$ , se obtiene la siguiente forma de solución invariante

$$u^a = u^a(J), \quad J = \frac{x_2 + r_2}{x_1 + r_1}, \quad a = \overline{1, 3}.$$

Al sustituir la forma de solución obtenida a partir del subálgebra  $Y_p$  y las formas de las funciones  $I$  y  $H$  potenciales en el sistema, se obtiene el sistema factor:

$$\begin{aligned} ((J^2 - T_1)u^{1'})' &= 0, \\ ((J^2 - T_2)u^{2'})' &= m_1 m_2 J^{-m} u^{3'}, \\ ((J^2 - T_2)u^{3'})' &= -m_1 m_2 J^{-m} u^{2'}. \end{aligned}$$

La solución del sistema factor está dada por las siguiente expresiones:

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{k_1}{2\sqrt{T_1}} \ln \left| \frac{J - \sqrt{T_1}}{J + \sqrt{T_1}} \right| + k_2, \\ u^2 &= r_0 \int \frac{\sin MF(J)}{J^2 - T_2} dJ, \\ u^3 &= r_0 \int \frac{\cos MF(J)}{J^2 - T_2} dJ, \end{aligned}$$

donde  $M = m_1 m_2 \neq 0$ ,  $F(J) = \int \frac{dJ}{J^m(J^2 - T_2)}$ , y  $k_1, k_2, r_0$  son constantes arbitrarias. En el caso particular cuando  $m = 0$ ,  $M = 1$  ( $m_1 = \frac{1}{m_2}$ ) y regresando a las variables  $x$  y  $t$ , se

obtienen las siguientes soluciones:

$$u^x = \frac{k_1}{\sqrt{T_1}} \tanh^{-1} \sqrt{T_1} \frac{t+r_1}{x+r_2} + k_2,$$

$$u^y = r_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{T_2}} \tanh^{-1} \sqrt{T_2} \frac{t+r_1}{x+r_2}\right) + A_1,$$

$$u^z = r_0 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{T_2}} \tanh^{-1} \sqrt{T_2} \frac{t+r_1}{x+r_2}\right) + A_2,$$

donde las funciones parámetros están dadas por  $I(t) = m_2^{-1}(t+r_1)^{-1}$  y  $H(x) = m_2$ .

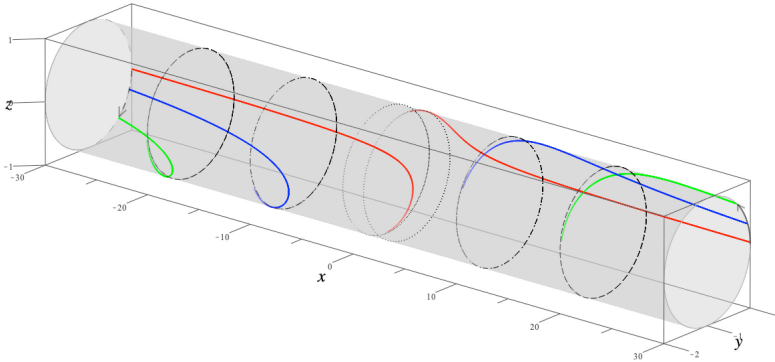


FIGURA 1. Configuración de la cuerda, descrita por la solución invariante para  $I = 1/(t+1)$ ,  $H = 1$  en diferentes momentos del tiempo:  $t = 0$  (rojo),  $t = 9$  (azul),  $t = 19$  (verde); trayectorias para los puntos:  $x = \pm 1$  (punteado),  $x = \pm 10$  (líneas y puntos) y  $x = \pm 20$  (líneas punteadas).

**2.5. Funciones-parámetros exponenciales.** Otro caso particular para las funciones parámetros donde el álgebra de simetrías admisibles por el sistema es más amplia, es cuando se tienen las funciones parámetros en forma exponencial  $I = a_1 \exp\left(\frac{mx_1}{m_1}\right)$ ,  $H = a_2 \exp\left(-\frac{mx_2}{m_2}\right)$ ,  $m \neq 0$ . La base del álgebra de simetrías admitida para las formas de las funciones parámetros potenciales es la siguiente:

$$Y_e = m_1 \partial_{x_1} + m_2 \partial_{x_2}, \quad X_1 = u^1 \partial_{u^1}, \quad X_2 = u^2 \partial_{u^2} + u^3 \partial_{u^3}, \quad X_3 = u^3 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^3},$$

$$X_+ = f^1(x_1, x_2) \partial_{u^1} + f^2(x_1, x_2) \partial_{u^2} + f^3(x_1, x_2) \partial_{u^3}.$$

Los generadores infinitesimales para el caso con funciones parámetros exponenciales tienen la siguiente tabla de conmutadores

$[ , ]$	$Y_e$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$Y_e$	0	0	0	0
$X_1$	0	0	0	0
$X_2$	0	0	0	0
$X_3$	0	0	0	0

donde los operadores  $Y_e, X_1, X_2$  y  $X_3$  forman un álgebra de Lie abeliana y los operadores  $X_+$  forman un ideal en el álgebra de Lie. El sistema óptimo de subálgebras no equivalente para el caso de las funciones parámetros potenciales, es el siguiente:

$$\langle Y_e \rangle, \langle Y_e + \alpha X_1 \rangle, \langle Y_e + \alpha X_1 + \beta X_2 \rangle, \langle Y_e + \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 \rangle,$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . A partir de la subálgebra  $\langle Y_e \rangle$ , se obtiene la siguiente forma de solución invariante

$$u^a = u^a(Z), \quad Z = \frac{x_1}{m_1} - \frac{x_2}{m_2}, \quad a = \overline{1, 3}.$$

Sustituyendo la forma de solución invariante y las funciones parámetros de forma exponencial en el sistema, se obtiene el sistema factor:

$$\begin{aligned} u^{1''} &= 0, \\ \left( \frac{1}{m_1^2} - \frac{T_2}{m_2^2} \right) u^{2''} &= -\frac{a_1 a_2}{m_2} \exp(mJ) u^{3'}, \\ \left( \frac{1}{m_1^2} - \frac{T_2}{m_2^2} \right) u^{3''} &= \frac{a_1 a_2}{m_2} \exp(mJ) u^{2'}. \end{aligned}$$

La solución general del sistema factor, en términos de las variables  $x$  y  $t$  está dada por las expresiones:

$$u^x = c_1 \left( \frac{t}{m_1} - \frac{x}{m_2} \right) + c_2, \quad (12)$$

$$u^y = r_0 \operatorname{Si} \left\{ r_1 \exp \left( \frac{m}{m_1} t - \frac{m}{m_2} x \right) \right\} + A_1, \quad (12)$$

$$u^z = r_0 \operatorname{Ci} \left\{ r_1 \exp \left( \frac{m}{m_1} t - \frac{m}{m_2} x \right) \right\} + A_2, \quad (13)$$

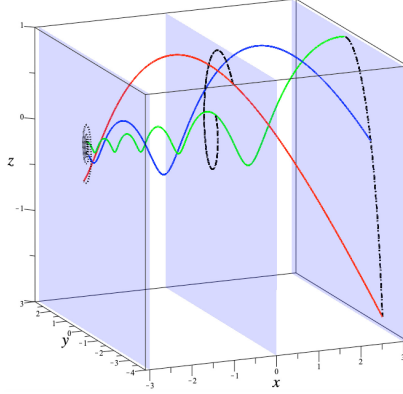


FIGURA 2. Configuración de la cuerda para la solución invariante obtenida a partir de la subálgebra  $\langle Y_3 \rangle$  con las funciones parámetros dadas por  $I = e^t$ ,  $H = e^{-\frac{x}{2}}$  en los diferentes tiempos dados por:  $t = 0$  (rojo);  $t = 1$  (azul);  $t = 2$  (verde).

donde  $r_1 = a_1 a_2 m_1^2 m_2 / [m (T_2 m_1^2 - m_2^2)]$ , además, hacemos  $r_0 = 0$ , si  $m_2^2 = T_2 m_1^2$ . Las funciones Si, Ci son las funciones seno y coseno integral ( $\gamma_E$  es la constante de Euler-Mascheroni):

$$\text{Si } z = \int_0^z \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{Ci } z = \gamma_E + \ln z + \int_0^z \frac{\cos x - 1}{x} dx.$$

### 3. ANÁLISIS DE LAS SIMETRÍAS DE UN SISTEMA DE PLASTICIDAD ANISÓTropa

**3.1. Simetrías.** Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} - 2k(\theta) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \sin 2\theta \right) &= k'(\theta) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \cos 2\theta \right), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} - 2k(\theta) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \cos 2\theta \right) &= k'(\theta) \left( -\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \cos 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \sin 2\theta \right) \end{aligned} \quad (14)$$

el cual puede escribirse en forma equivalente como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} - (k \sin 2\theta)' \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + (k \cos 2\theta)' \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + (k \cos 2\theta)' \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + (k \sin 2\theta)' \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Las curvas características del sistema (15) son:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{(k \sin 2\theta)'}{(k \cos 2\theta)'} \pm \frac{\sqrt{4k^2 + (k')^2}}{(k \cos 2\theta)'}. \quad (16)$$

Las condiciones de compatibilidad que solo contienen términos de  $k$  y sus derivadas, son llamadas ecuaciones de clasificación. Al resolver estas ecuaciones, con la finalidad de obtener formas concretas para  $k$ , se tienen los siguientes resultados:

**Teorema 3.1.** *El sistema (14), si  $k$  es solución de la ecuación  $w' + \frac{k'}{k}(2w - 1) = 0$ , donde  $w = \frac{4k^2 + (k')^2}{4k^2 + 2(k')^2 - kk''}$ , admite el álgebra de Lie con las bases:*

$$\begin{aligned} X_1 = & \left[ -\frac{1}{2} w (k \sin 2\theta)' x_1 + \left( -\sigma + \frac{1}{2} w (k \cos 2\theta)' \right) x_2 \right] \partial_{x_1} + \\ & + \left[ \left( \sigma + \frac{1}{2} w (k \cos 2\theta)' \right) x_1 + \frac{1}{2} w (k \sin 2\theta)' x_2 \right] \partial_{x_2} + \\ & + \left[ L \int \frac{d\theta}{w} \right] \partial_\sigma + \sigma w \partial_\theta, \quad L = w^2 [4k^2 + (k')^2] > 0, \end{aligned}$$

$$X_2 = -x_2 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2} + w \partial_\theta,$$

$$X_3 = x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2},$$

$$X_4 = \partial_\sigma,$$

$$X_\infty = h^1(\sigma, \theta) \partial_{x_1} + h^2(\sigma, \theta) \partial_{x_2}.$$

**Teorema 3.2.** *El sistema (14), si  $k$  es solución de la ecuación  $w' + \frac{k'}{k}(2w - 1) = \text{cte} \neq 0$  donde  $w = \frac{4k^2 + (k')^2}{4k^2 + 2(k')^2 - k k''}$ , admite el álgebra de Lie con las bases:*

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \left[ \left( -\frac{1}{2} w(k \sin 2\theta)' - \frac{1}{2} A \sigma \right) x_1 + \left( -\sigma + \frac{1}{2} w(k \cos 2\theta)' \right) x_2 \right] \partial_{x_1} + \\
 &+ \left[ \left( \sigma + \frac{1}{2} w(k \cos 2\theta)' \right) x_1 + \left( \frac{1}{2} w(k \sin 2\theta)' - \frac{1}{2} A \sigma \right) x_2 \right] \partial_{x_2} + \\
 &+ \left[ A \frac{\sigma^2}{2} + \frac{w^2 [4k^2 + (k')^2]}{2A} \right] \partial_\sigma + \sigma w \partial_\theta, \\
 X_2 &= -x_2 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2} + A \sigma \partial_\sigma + w \partial_\theta, \\
 X_3 &= x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2}, \\
 X_4 &= A \partial_\sigma, \\
 X_\infty &= h^1(\sigma, \theta) \partial_{x_1} + h^2(\sigma, \theta) \partial_{x_2}.
 \end{aligned}$$

Para simplificar la notación, sea  $A = w' + \frac{k'}{k}(2w - 1)$ . Con las álgebras de Lie admitidas para diferentes formas de  $A = 0$  y  $A \neq 0$ , podemos determinar las tablas de conmutadores.

Para el caso de  $A = 0$ , la forma de la tabla de conmutadores queda como:

$[X_i, X_j]$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_{h^1, h^2}$
$X_1$	0	$-L X_4$	0	$-X_2$	$X_{h_1^1, h_1^2}$
$X_2$	$L X_4$	0	0	0	$X_{h_2^1, h_2^2}$
$X_3$	0	0	0	0	$-X_{h^1, h^2}$
$X_4$	$X_2$	0	0	0	$X_{h_\sigma^1, h_\theta^2}$
$X_{h^1, h^2}$	$-X_{h_1^1, h_1^2}$	$-X_{h_2^1, h_2^2}$	$X_{h^1, h^2}$	$-X_{h_\sigma^1, h_\theta^2}$	0

Análogamente, para el caso en que  $A \neq 0$ , la tabla de conmutadores tiene la forma:

$[X_i, X_j]$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_{h^1, h^2}$
$X_1$	0	$-AX_1$	0	$-AX_2 + \frac{A^2}{2}X_3$	$X_{h_1^1, h_1^2}$
$X_2$	$AX_1$	0	0	$-AX_4$	$X_{h_2^1, h_2^2}$
$X_3$	0	0	0	0	$-X_{h^1, h^2}$
$X_4$	$AX_2 - \frac{A^2}{2}X_3$	$AX_4$	0	0	$AX_{h_\sigma^1, h_\sigma^2}$
$X_{h^1, h^2}$	$-X_{h_1^1, h_1^2}$	$-X_{h_2^1, h_2^2}$	$X_{h^1, h^2}$	$-AX_{h_\sigma^1, h_\sigma^2}$	0

Cuando  $A = 0$ , el sistema óptimo de subálgebras de dimensión 1 es:

$$\begin{aligned}\Theta_1 : H_1 &= \langle X_1 + \alpha X_3 \rangle, \alpha = \text{ctte}, \\ H_2 &= \langle X_2 + \beta X_4 + \alpha X_3 \rangle, \alpha = \text{ctte}, \beta^2 = \{L, 0\}, \\ H_3 &= \langle X_4 + \alpha X_3 \rangle, \alpha = \text{ctte}, \\ H_4 &= \langle X_3 \rangle.\end{aligned}$$

Consideremos el sistema inicial (15) con  $k = C \cos 2\theta$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} - (C \cos 2\theta \sin 2\theta)' \theta_{x_1} + (C \cos^2 2\theta)' \theta_{x_2} &= 0 \\ \sigma_{x_2} + (C \cos^2 2\theta)' \theta_{x_1} + (C \cos 2\theta \sin 2\theta)' \theta_{x_2} &= 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Las relaciones sobre las características (16) del sistema (17) tienen la forma:

$$\begin{aligned}R_{1,2} &= \frac{(C \cos 2\theta \sin 2\theta)'}{(C \cos^2 2\theta)'} \pm \frac{\sqrt{4(C \cos 2\theta)^2 + (-2C \sin 2\theta)^2}}{(C \cos^2 2\theta)'} \\ &= \frac{(-\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) \pm 1}{-2 \cos 2\theta \sin 2\theta}, \\ R_1 &= -\cot 2\theta, R_2 = \tan 2\theta,\end{aligned}$$

en las nuevas variables  $\xi$  y  $\eta$  tienen la forma:

$$\begin{aligned}\xi &= \sigma - \int \sqrt{4(C \cos 2\theta)^2 + (-2C \sin 2\theta)^2} d\theta = \sigma - 2C\theta, \\ \eta &= \sigma + \int \sqrt{4(C \cos 2\theta)^2 + (-2C \sin 2\theta)^2} d\theta = \sigma + 2C\theta,\end{aligned}$$



entonces:

$$\sigma = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \theta = \frac{\eta - \xi}{4C}.$$

En las nuevas variables  $\xi, \eta$  que se llaman las coordenadas características, el sistema (17) tendrá la siguiente forma:

$$\xi_{x_1} + R_2 \xi_{x_2} = 0, \quad \eta_{x_1} + R_1 \eta_{x_2} = 0,$$

el cual es un sistema de ecuaciones homogéneas no lineal, cuyos coeficientes son funciones de  $\xi$  y  $\eta$ . Este tipo de sistemas pueden reducirse a un sistema lineal de ecuaciones haciendo un cambio de roles de las variables dependientes e independientes (transformación de hodógrafo). Sean  $x_1 = x_1(\xi, \eta)$ ,  $x_2 = x_2(\xi, \eta)$ , entonces el sistema (5) tiene la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} - R_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - R_2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta} &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

que en nuestro caso es equivalente a:

$$\begin{aligned} \sin 2\theta \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \cos 2\theta \frac{\partial x_1}{\partial \xi} &= 0, \\ \cos 2\theta \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \sin 2\theta \frac{\partial x_1}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned}$$

Hagamos el cambio de variables:

$$\begin{aligned} u &= x_1 \cos 2\theta + x_2 \sin 2\theta, \\ v &= -x_1 \sin 2\theta + x_2 \cos 2\theta, \end{aligned} \tag{19}$$

derivando  $u$  y  $v$ :

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \cos 2\theta - 2x_1 \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \sin 2\theta + 2x_2 \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ &= -2x_1 \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + 2x_2 \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 2v \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 2v \left( -\frac{1}{4C} \right), \\ v_\eta &= -\frac{\partial x_1}{\partial \eta} \sin 2\theta - 2x_1 \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \cos 2\theta - 2x_2 \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ &= -2x_1 \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - 2x_2 \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 2u \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -2u \left( \frac{1}{4C} \right). \end{aligned}$$

Finalmente tenemos el sistema lineal:

$$u_\xi + \frac{v}{2C} = 0, \quad v_\eta + \frac{u}{2C} = 0. \quad (20)$$

**3.2. Soluciones invariantes.** A continuación se determinan las bases del álgebra de Lie admitidas por el sistema (20), para ello, pasaremos las bases del álgebra de Lie que aparecen en el Teorema 3.1 en términos de las nuevas variables  $\xi, \eta, u, v$ , en la forma:

$$\tilde{X}_i = X_i(\xi)\partial_\xi + X_i(\eta)\partial_\eta + X_i(u)\partial_u + X_i(v)\partial_v, \quad i = 1, \dots, 4,$$

quedando:

$$\tilde{X}_1 = \xi\partial_\xi - \eta\partial_\eta + \frac{u}{2}\partial_u - \frac{v}{2}\partial_v,$$

$$\tilde{X}_2 = \partial_\xi - \partial_\eta,$$

$$\tilde{X}_3 = u\partial_u + v\partial_v,$$

$$\tilde{X}_4 = \partial_\xi + \partial_\eta.$$

$$\tilde{X}_\infty = h^1(\xi, \eta)\partial_\xi + h^2(\xi, \eta)\partial_\eta,$$

donde  $h^1$  y  $h^2$  son soluciones del sistema:

$$h_\xi^1 = -\frac{h^2}{2C}, \quad h_\eta^2 = -\frac{h^1}{2C}.$$

Ahora, con ayuda de los generadores aceptados por el sistema (14), para formas específicas de  $k$ , determinaremos las formas de algunas soluciones invariantes particulares de dichas subálgebras, cuando  $A = 0$ .

Para la función  $k = C \cos 2\theta$ , anteriormente se determinó que el sistema inicial (14) puede reducirse al sistema (20) y la subálgebra  $H_1$  de  $\Theta_1$  tiene la forma:  $\Theta_1 : H_1 = \langle X_1 + \alpha X_3 \rangle, \alpha = \text{cte}$ , entonces:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left\langle \xi\partial_\xi - \eta\partial_\eta + \frac{u}{2}\partial_u - \frac{v}{2}\partial_v + \alpha u\partial_u + \alpha v\partial_v \right\rangle \\ &= \left\langle \xi\partial_\xi - \eta\partial_\eta + u\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\partial_u + v\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\partial_v \right\rangle, \end{aligned}$$

de aquí tenemos las ecuaciones:

$$\frac{d\xi}{\xi} = -\frac{d\eta}{\eta} = \frac{du}{u\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)} = \frac{dv}{v\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)},$$

entonces los invariantes son:

$$J_1 = \xi\eta, \quad J_2 = \frac{\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}}{u}, \quad J_3 = \frac{\eta^{\frac{1}{2}-\alpha}}{v},$$

así, las formas de las soluciones invariantes son:

$$\begin{aligned} u &= f(J_1)\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}, \\ v &= g(J_1)\eta^{\frac{1}{2}-\alpha}. \end{aligned} \quad (21)$$

Del sistema (20) podemos obtener:

$$u_{\xi\eta} - \frac{u}{4C^2} = 0, \quad (22)$$

derivando  $u = f(J)\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}$ , donde  $J = \xi\eta$ , respecto a  $\xi$ , se tiene:

$$u_{\xi} = f'\eta\xi^{\frac{1}{2}+\alpha} + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)f\xi^{\alpha-\frac{1}{2}} = -\frac{v}{2C}, \quad (23)$$

entonces

$$u_{\xi\eta} = f''\xi\eta\xi^{\frac{1}{2}+\alpha} + f'\xi^{\frac{1}{2}+\alpha} + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)f'\xi^{\frac{1}{2}+\alpha},$$

sustituyendo en la ecuación (22):

$$\xi^{\frac{1}{2}+\alpha} \left[ f''J + \left(\alpha + \frac{3}{2}\right)f' \right] - \frac{f\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}}{4C^2} = 0,$$

dividiendo esta última ecuación por  $\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}$  se obtiene:

$$f''J + \left(\alpha + \frac{3}{2}\right)f' - \frac{f}{4C^2} = 0. \quad (24)$$

Introduciendo una nueva función  $Z$ , la solución de la ecuación anterior tiene la forma:

$$f = J^{\gamma} Z_{2\gamma} \left( \frac{i}{C} \sqrt{J} \right), \quad \gamma = -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}, \quad (25)$$

donde  $Z_{2\gamma}(x)$  es solución de la ecuación de Bessel:

$$x^2 Z'' + xZ' + (x^2 - (2\gamma)^2)Z = 0 \quad (26)$$

con  $x = \frac{i}{C} \sqrt{J}$ .

Si  $\alpha$  es un número entero, entonces la solución (27) puede ser expresada en términos de funciones elementales. Por ejemplo, si  $\alpha = 1$ ,  $C = 1$ , se tiene la solución:

$$f(J) = J^{-\frac{3}{2}} \left[ C_1 e^{-\sqrt{J}} (\sqrt{J} + 1) + C_2 (\cosh \sqrt{J} - \sinh \sqrt{J}) \right] \quad (27)$$

y al sustituirla en la ecuación que tenemos para  $u$  en (21), queda:

$$u = \xi^{\alpha-1} \eta^{-\frac{3}{2}} \left[ C_1 e^{-\sqrt{\xi\eta}} (\sqrt{\xi\eta} + 1) + C_2 (\cosh \sqrt{\xi\eta} - \sinh \sqrt{\xi\eta}) \right]. \quad (28)$$

Ahora, de la primera ecuación del sistema (20) podemos despejar  $v = -2C u_\xi$ , derivemos (28) respecto a  $\xi$  para obtener  $v$ :

$$\begin{aligned} u_\xi &= (\alpha-1) \xi^{\alpha-2} \eta^{-\frac{3}{2}} \left[ C_1 e^{-\sqrt{\xi\eta}} (\sqrt{\xi\eta} + 1) + C_2 (\cosh \sqrt{\xi\eta} - \sinh \sqrt{\xi\eta}) \right] + \\ &+ \xi^{\alpha-1} \eta^{-\frac{3}{2}} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} C_1 e^{-\sqrt{\xi\eta}} (\sqrt{\xi\eta} + 1) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} C_1 e^{-\sqrt{\xi\eta}} + \right. \\ &\left. + C_2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} (\sinh \sqrt{\xi\eta} - \cosh \sqrt{\xi\eta}) \right] \end{aligned}$$

y multiplicando el resultado anterior por  $-2C$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} v &= -2C (\alpha-1) \xi^{\alpha-2} \eta^{-\frac{3}{2}} \left[ C_1 e^{-\sqrt{\xi\eta}} (\sqrt{\xi\eta} + 1) + C_2 (\cosh \sqrt{\xi\eta} - \sinh \sqrt{\xi\eta}) \right] + \\ &+ C \xi^{\alpha-1} \eta^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \left[ C_1 \sqrt{\xi\eta} e^{-\sqrt{\xi\eta}} - C_2 (\sinh \sqrt{\xi\eta} - \cosh \sqrt{\xi\eta}) \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, al tener  $u$  y  $v$ , podemos regresar al cambio de variables realizado en (19) para obtener luego  $\theta$  y  $\sigma$ , las cuales eran las funciones del sistema original (14).

#### 4. REPRODUCCIÓN DE SOLUCIONES

**4.1. Homotopía de soluciones.** Se considera el sistema clásico del ideal de plasticidad en el plano

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 &= 4k^2, \end{aligned} \quad (29)$$

el cual contiene dos ecuaciones de equilibrio y una condición de plasticidad. Este sistema describe el estado de tensión de un cuerpo de material plástico deformable. La interpretación de este proceso físico es aplicado para hacer detalles de estampados en metal.

En otras variables, el sistema mencionado tiene la forma más sencilla:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) &= 0,\end{aligned}\tag{30}$$

donde  $\sigma$  es la presión hidrostática y  $\theta + \frac{\pi}{4}$  es ángulo entre dirección principal del tensor de tensión y eje  $Ox$ .

Es conocido que la base del álgebra de Lie de las simetrías puntuales del sistema (30) contiene los siguientes operadores:

$$\begin{aligned}X_1 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ X_4 &= \xi_1(x, y, \sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x, y, \sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial y} - 4k\theta \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ X_5 &= x_0(\sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial x} + y_0(\sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}\tag{31}$$

donde:

$$\xi_1 = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta + y \frac{\sigma}{k}, \quad \xi_2 = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta - x \frac{\sigma}{k},$$

y  $(x = x_0, y = y_0)$  es una solución arbitraria del sistema lineal

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \theta} - 2k \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma} \cos 2\theta + \frac{\partial y}{\partial \sigma} \sin 2\theta \right) &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} - 2k \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma} \sin 2\theta - \frac{\partial y}{\partial \sigma} \cos 2\theta \right) &= 0,\end{aligned}\tag{32}$$

que se obtiene del sistema (30) por la transformación de hodógrafo

$$x = x(\sigma, \theta), \quad y = y(\sigma, \theta).\tag{33}$$

**Teorema 4.1.** *Las transformaciones puntuales, correspondientes al operador  $X_5$  que transforman cualquier solución exacta no singular  $(x, y)$  del sistema (30) en la solución  $(\bar{x}, \bar{y})$  del mismo sistema, tienen la forma:*

$$\bar{x} = x + a x_0, \quad \bar{y} = y + a y_0,\tag{34}$$

donde  $a$  es el parámetro grupal,  $(x = x_0, y = y_0)$  es una solución arbitraria del sistema lineal (32).

Consideremos dos soluciones exactas

$$\chi_1 = (x_1(\sigma, \theta), y_1(\sigma, \theta)), \chi_2 = (x_2(\sigma, \theta), y_2(\sigma, \theta))$$

del sistema lineal (32), que determinan en la forma implícita las soluciones  $U_1$  y  $U_2$  del sistema (30). Debido a la linealidad del sistema (32) cualquier combinación lineal de las soluciones también es una solución, por eso, para los coeficientes del operador  $X_5$  es posible usar las siguientes expresiones:

$$x_0(\sigma, \theta) = x_1 - x_2, y_0(\sigma, \theta) = y_1 - y_2. \quad (35)$$

Transformamos la solución  $\chi_2 = (x_2(\sigma, \theta), y_2(\sigma, \theta))$  por el operador  $X_5$  tomando sus coeficientes en la forma (35). De (34) se obtiene la nueva solución del sistema (32):

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}(\sigma, \theta) = x_2 + a x_0 = x_2 + a(x_1 - x_2) = a x_1 + (1 - a)x_2, \\ y &= \bar{y}(\sigma, \theta) = y_2 + a y_0 = y_2 + a(y_1 - y_2) = a y_1 + (1 - a)y_2. \end{aligned} \quad (36)$$

Las expresiones (36) determinan en forma implícita la solución del sistema (30). A este tipo de procedimiento es posible llamarle *el principio de superposición de soluciones* del sistema de plasticidad ideal (30). En virtud de este principio es posible combinar cualquier solución no singular del sistema (30) con su otra solución no singular.

A las expresiones (36) es posible llamarles *homotopía de las soluciones*  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , ya que para  $a = 0$  las fórmulas (36) determinan la solución que coincide con  $(x_2, y_2)$ , y para  $a = 1$  determinan la solución  $(x_1, y_1)$ . Para valores del parámetro grupal del intervalo  $a \in (0, 1)$ , las fórmulas (36) determinan una familia de nuevas soluciones que depende del parámetro grupal  $a$ .

Consideremos dos soluciones conocidas del sistema (32). Una de las soluciones es la solución de Nadaí

$$\begin{aligned} x &= \pm \exp\left(\frac{A - \sigma}{2kc}\right) S^{-1}(\theta), \quad y = x T(\theta), \\ T(\theta) &= \tan\left[\theta + \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \tan\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{c}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right]\right)\right], \\ S(\theta) &= \sqrt{c + c T^2(\theta) + \sin 2\theta [1 - T^2(\theta)] - 2T(\theta) \cos 2\theta}. \end{aligned} \quad (37)$$

Esta solución describe el movimiento del material plástico presionado dentro del canal de la forma angular (vea la Fig. 3).

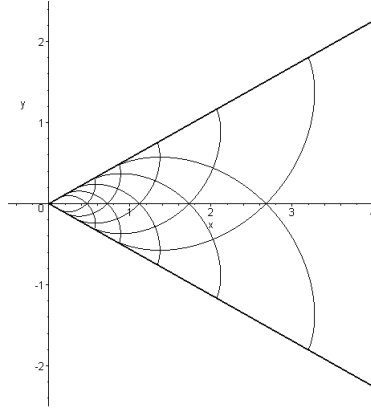


FIGURA 3. La solución de Nadaí para el canal de la forma angular.

Otra solución conocida del sistema (32) es la solución de Prandtl

$$x = -\sigma \frac{h}{k} - p_1 \frac{h}{k} - h \sin 2\theta, \quad y = h \cos 2\theta. \tag{38}$$

Esta solución describe la conducta del material plástico presionado por dos láminas rígidas paralelas (vea la Fig. 4). Se supone que el ancho del material es mucho menor que su longitud.

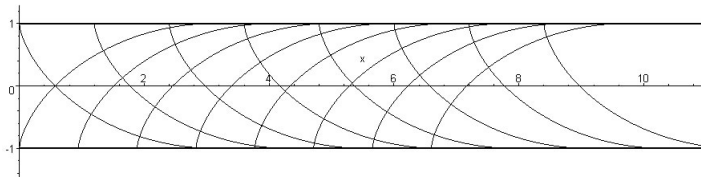


FIGURA 4. La solución de Prandtl.

Para construir nuevas soluciones del sistema (32) en la fórmula (36) tomaremos la solución de Nadaí como  $(x_1, y_1)$  y la solución de Prandtl como  $(x_2, y_2)$ . Entonces el

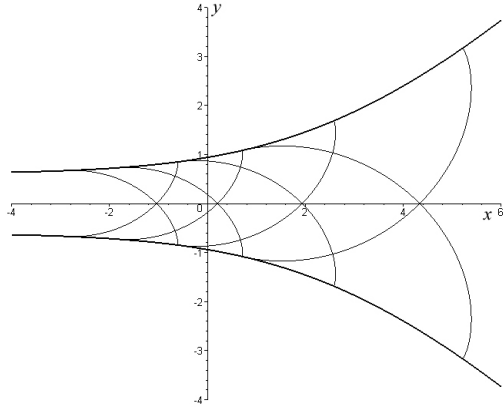


FIGURA 5. La nueva solución es el resultado de la homotopía de las soluciones Prandtl y Nadaí.

resultado de homotopía es la siguiente solución:

$$\begin{aligned} x &= \pm a \exp\left(\frac{A-\sigma}{2kc}\right) S^{-1}(\theta) + (1-a) \left(-\sigma \frac{h}{k} - p_1 \frac{h}{k} - h \sin 2\theta\right), \\ y &= \pm a \exp\left(\frac{A-\sigma}{2kc}\right) S^{-1}(\theta) T(\theta) + (1-a) h \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (39)$$

donde

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4} - \arctan\left[\sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \tan \frac{\sqrt{c^2-1}}{c} \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right]\right), \\ S(\theta) &= \sqrt{c + c T^2(\theta) + (1 - T^2(\theta)) \sin 2\theta - 2T(\theta) \cos 2\theta}. \end{aligned} \quad (40)$$

Esta solución describe la conducta del material plástico presionado dentro del canal por láminas de la forma dibujada en Figura 5, la cual describe la solución y sus envolventes de los siguientes valores de parámetros de la solución (39):

$$a = 0.4, \quad c = 1.4, \quad A = 0, \quad h = p_1 = k = 1.$$



**4.2. Acción de un subgrupo sobre una solución invariante.** Anteriormente dijimos que entre los operadores de simetría del sistema (30) hay un operador

$$X_4 = \xi_1(x, y, \sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x, y, \sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial y} - 4k\theta \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\sigma}{k} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

donde

$$\xi_1 = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta + y \frac{\sigma}{k}, \quad \xi_2 = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta - x \frac{\sigma}{k}.$$

**Teorema 4.2.** *El grupo de transformaciones puntuales correspondientes al operador  $X_4$ , tiene la forma:*

$$\begin{aligned} \bar{x} &= ue^a \cos \bar{\theta} - ve^{-a} \sin \bar{\theta}, \\ \bar{y} &= ue^a \sin \bar{\theta} + ve^{-a} \cos \bar{\theta}, \\ \bar{\sigma} &= 2k \left( \frac{\sigma}{2k} \cosh 2a - \theta \sinh 2a \right), \\ \bar{\theta} &= - \left( \frac{\sigma}{2k} \sinh 2a - \theta \cosh 2a \right), \end{aligned} \quad (41)$$

donde  $u$  y  $v$  son las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ v &= -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned} \quad (42)$$

Transformando la solución de Prandtl del sistema (32) por el grupo de transformaciones puntuales correspondientes al operador  $X_4$ , se obtiene una nueva solución del sistema de plasticidad:

$$\begin{aligned} x &= -h(e^a \sin \theta \cos \bar{\theta} + e^{-a} \cos \theta \sin \bar{\theta}) - \frac{h}{k}(\bar{\sigma} + p_1)(e^a \sin \theta \sin \bar{\theta} + \\ &+ e^{-a} \cos \theta \cos \bar{\theta}), \\ y &= h(e^a \cos \theta \cos \bar{\theta} - e^{-a} \sin \theta \sin \bar{\theta}) + \frac{h}{k}(\bar{\sigma} + p_1)(e^a \cos \theta \sin \bar{\theta} - \\ &- e^{-a} \sin \theta \cos \bar{\theta}), \end{aligned} \quad (43)$$

donde:

$$\bar{\sigma} = \sigma \cosh 2a - 2k\theta \sinh 2a, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta - \frac{\sigma}{2k} \sinh 2a}{\cosh 2a}.$$

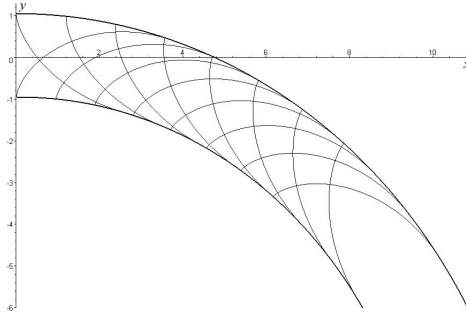


FIGURA 6. La nueva solución es el resultado de la aplicación del operador  $X_4$  a la solución de Prandtl (parámetro grupal  $a = 0.05$ ).

Esta solución describe la conducta del material plástico presionado dentro del canal por láminas de forma parecida a espirales logarítmicas (vea la Figura 6).

#### REFERENCIAS

- [1] SENASHOV SI, YAKHNO A. (2008) *Aplicación de simetrías y leyes de conservación a la resolución de ecuaciones diferenciales de mecánica*, Guadalajara, Universidad de Guadalajara.
- [2] DE LA CRUZ GARCÍA, EL. (2005) *Análisis de las simetrías de un sistema de plasticidad bidimensional anisótropa* (Maestría). Universidad de Guadalajara.
- [3] KURMYSHEV E, PIÑUELAS CASTRO LM, YAKHNO A, YAKHNO L. Invariant analytical solutions for the motion of an elastic string with electric current in a static magnetic field. *Math Meth Appl Sci.* 2021;1–20. <https://doi.org/10.1002/mma.7399>
- [4] YAKHNO A, YAKHNO L. ‘Homotopy’ of Prandtl and Nadai solutions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45(8), 2010, 793-799, <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.06.001>.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CUCEI, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, JALISCO, MÉXICO

E-mail address: alexander.yakhno@academicos.udg.mx

E-mail address: liliya.y@academicos.udg.mx

E-mail address: elba.delacruz@academicos.udg.mx

E-mail address: luis.pinuelas@alumno.udg.mx

## LA ECUACIÓN DEL CALOR

CELIA AVALOS RAMOS, ISIDRO HUMBERTO MUNIVE LIMA,  
SOFÍA ORTEGA CASTILLO

RESUMEN. La ecuación del calor es una de las ecuaciones en derivadas parciales más famosas. Esta ecuación se encuentra en la intersección del análisis, la geometría y la probabilidad. En estas notas demostraremos, entre otras cosas, que la ecuación del calor genera un semigrupo continuo, cuyo generador infinitesimal es el operador de Laplace. Además, veremos que está ecuación genera un proceso estocástico llamado movimiento browniano. Estas notas fueron creadas para la Escuela de Verano del Departamento de Matemáticas del 2023 (CUCEI, UdeG) y están dirigidas a estudiantes con conocimientos básicos de análisis matemático y ecuaciones diferenciales parciales.

### 1. ECUACIÓN DEL CALOR

En estas notas estudiaremos la ecuación de calor en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ :

$$\begin{cases} \Delta u(x, t) - \partial_t u(x, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (1)$$

Aquí,  $u = u(x, t)$  es una función que va de  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  a  $\mathbb{R}$  y el laplaciano  $\Delta$  se toma respecto a la variable espacial, es decir,  $\Delta u = \partial_x^2 u$ . Además, la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es dada.

Recordemos que si  $g$  tiene dos derivadas en  $\mathbb{R}$ , entonces para toda  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2}. \quad (2)$$

---

*Palabras Claves.* Ecuación del Calor. Semigrupos.

Consideremos el siguiente **operador de promediación**:

$$\mathcal{A}_h g(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} g(y) dy.$$

Entonces, usando la regla de l'Hôpital la fórmula (2) puede escribirse como

$$g''(x) = 6 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}_h g(x) - g(x)}{h^2}. \quad (3)$$

Ahora, si  $u(x, t)$  es solución de la ecuación de calor (1), entonces de (3) obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= \Delta u(x, t) \\ &= 6 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}_h u(x, t) - u(x, t)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6}{h^2} \left( \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} [u(y, t) - u(x, t)] dy \right). \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la ecuación de calor mueve el valor de  $u(x, t)$  al valor promedio de sus puntos cercanos. Notemos que si la solución  $u$  sólo depende de la variable espacial  $x \in \mathbb{R}$ , es decir  $u(x, t) \equiv u(x)$ , entonces  $\Delta u = 0$ . En otras palabras,  $u$  es armónica.

Definamos  $H \doteq \Delta - \partial_t$  y consideremos las dilataciones

$$\delta_\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda^2 t), \quad \lambda > 0.$$

Las trayectorias de  $\delta_\lambda(x, t)$  como función de  $\lambda$ , para  $(x, t) \in \mathbb{R}^{1+1}$  fijo, son parábolas. No es difícil ver que

$$H(u \circ \delta_\lambda)(x, t) = \lambda^2 (Hu) \circ \delta_\lambda(x, t), \quad \text{for } u \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+1}).$$

Notemos que para una función  $v: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$v(x, t) = v\left(\sqrt{t} \frac{x}{\sqrt{t}}, t \cdot 1\right) = (v \circ \delta_{\sqrt{t}})\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Esto sugiere en buscar soluciones de la forma

$$u(x, t) = t^{-\alpha} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Más aún, usando que  $\Delta$  es invariante bajo *isometrías*, podemos buscar soluciones de la forma

$$u(x, t) \doteq t^{-\alpha} f\left(\frac{r^2}{2t}\right), \quad r = |x|, t > 0. \quad (4)$$

Por lo tanto, si  $u$  es como en (4), tenemos

$$\partial_x u(x, t) = t^{-\alpha} \frac{x}{t} f' \left( \frac{r^2}{2t} \right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \Delta u(x, t) &= t^{-\alpha} \frac{1}{t} f' \left( \frac{r^2}{2t} \right) + t^{-\alpha-1} f'' \left( \frac{r^2}{2t} \right) \frac{x^2}{t} \\ &= \frac{n}{t^{1+\alpha}} f' \left( \frac{r^2}{2t} \right) + \frac{r^2}{t^{2+\alpha}} f'' \left( \frac{r^2}{2t} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

También tenemos

$$\partial_t u(x, t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} f \left( \frac{r^2}{2t} \right) - \frac{r^2}{2t^{\alpha+2}} f' \left( \frac{r^2}{2t} \right) \quad (6)$$

De (5) y (6), se obtiene

$$Hu(x, t) = \frac{r^2}{t^{\alpha+2}} \left\{ f'' \left( \frac{r^2}{2t} \right) + \frac{t}{r^2} f' \left( \frac{r^2}{2t} \right) + \frac{1}{2} f' \left( \frac{r^2}{2t} \right) + \frac{\alpha t}{r^2} f \left( \frac{r^2}{2t} \right) \right\}.$$

Sea  $s \doteq \frac{r^2}{2t}$ , entonces

$$\begin{aligned} Hu(x, t) &= \frac{r^2}{t^{\alpha+2}} \left\{ f''(s) + \frac{1}{2s} f'(s) + \frac{1}{2} f'(s) + \frac{\alpha}{2s} f(s) \right\} \\ &= \frac{r^2}{t^{\alpha+2}} \left\{ s^{-\frac{1}{2}} \left( s^{\frac{1}{2}} f'(s) \right)' + \frac{1}{2} s^{-\alpha} \left( s^{\alpha} f(s) \right)' \right\}. \end{aligned}$$

Necesitamos

$$s^{-\frac{1}{2}} \left( s^{\frac{1}{2}} f'(s) \right)' = -\frac{1}{2} s^{-\alpha} \left( s^{\alpha} f(s) \right)'.$$

Sea  $\alpha = \frac{1}{2}$ , por lo que  $\left( s^{\frac{1}{2}} f'(s) + \frac{1}{2} s^{\frac{1}{2}} f(s) \right)' = 0$ . En consecuencia,

$$s^{\frac{1}{2}} f'(s) + \frac{1}{2} s^{\frac{1}{2}} f(s) = C,$$

para alguna  $C \in \mathbb{R}$ . Tomemos  $C = 0$ , entonces

$$f'(s) + \frac{1}{2} f(s) = 0.$$

Por lo que  $f(s) = Ae^{-s/2}$ , para algún  $A \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$u(x, t) = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad t > 0. \quad (7)$$

En resumen, hemos demostrado la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.** *Para  $A \in \mathbb{R}$ , la función  $u$  dada por (7) cumple  $Hu = 0$  en  $\mathbb{R}_+^{1+1}$ , donde  $\mathbb{R}_+^{1+1} = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ .*

**Definición 1.2.** *La función*

$$p(x, y, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

*es llamado núcleo Gauss-Weierstrass o la solución fundamental de la ecuación de calor en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .*

Ahora demostraremos una de las propiedades más importantes de la solución fundamental. La siguiente propiedad nos dice que  $p(\cdot, y, t)$  es una densidad de probabilidad para cada  $y \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$ .

**Proposición 1.3.** *Para toda  $y \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}} p(x, y, t) dx = 1.$$

*Demostración.* Recordemos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} p(x, y, t) dx &= (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|^2} dy \quad \left( \frac{x}{\sqrt{4t}} = y, dx = \sqrt{4t} dy \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

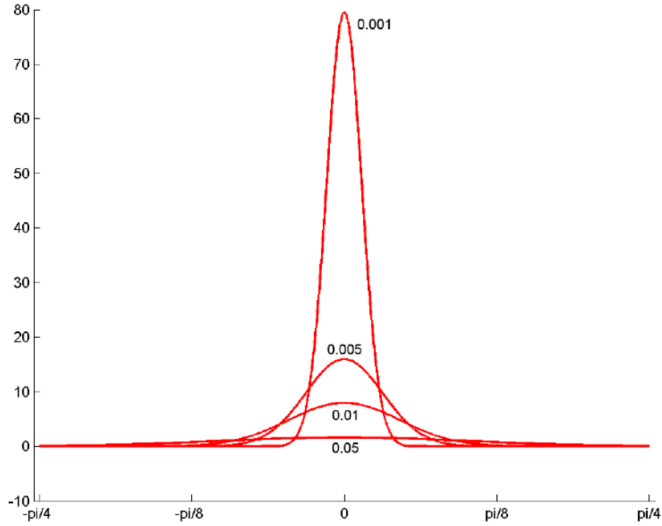


FIGURA 1. Núcleo de calor en diferentes tiempos

A continuación nos enfocaremos en resolver el problema

$$\begin{cases} \Delta u - \partial_t u = 0 & x \in \mathbb{R} \quad \& \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8)$$

**Teorema 1.4.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada. Entonces,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y, t) f(y) dy,$$

es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , y resuelve la ecuación del calor

$$\Delta u - \partial_t u = 0.$$

*Demostración.* Sea  $\phi(z) = e^{-|z|^2}$ , con  $z \in \mathbb{R}$ . Es fácil demostrar por inducción que para cada  $k \geq 0$ , existe un polinomio  $p_k(z)$ , de grado  $\leq k$ , tal que

$$\phi^{(k)}(z) \doteq \frac{d}{dz^k} \phi(z) = p_k(z) \phi(z). \quad (9)$$

De (9) se obtiene que para cada  $k \geq 0$ , existe  $c = c(k) > 0$  tal que

$$|\phi^{(k)}(z)| \leq c(1 + |z|^2)^{\frac{k}{2}} \phi(z). \quad (10)$$

Ahora, dado que

$$p(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \phi\left(\frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right),$$

tenemos por la regla de la cadena que

$$\frac{d}{dx^k} p(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^k \phi^{(k)}\left(\frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right).$$

Por lo que de (10) obtenemos en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ,

$$\left| \frac{d}{dx^k} p(x, y, t) \right| \leq \frac{c}{t^{\frac{k}{2}}} \left(1 + \frac{|x-y|^2}{4t}\right)^{\frac{k}{2}} p(x, y, t). \quad (11)$$

En conclusión,  $p(x, y, t)$  tiene derivadas uniformemente acotadas de todos los órdenes en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\delta, \infty)$ , con  $\delta > 0$ . Esto implica que

$$\begin{aligned} \Delta u(x, t) - u_t(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} [\Delta_x p(x, y, t) - p_t(x, y, t)] f(y) dy \\ &= 0, \quad (x \in \mathbb{R} \text{ \& } t > 0), \end{aligned}$$

dado que  $p$  es una solución de la ecuación del calor. □

**Teorema 1.5.** *Supongamos que  $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Entonces, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x),$$

donde

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y, t) f(y) dy.$$

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$ . Para  $r > 0$  definimos

$$V(x, r) \doteq \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r\}.$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} p(x, y, t) f(y) dy - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} p(x, y, t) (f(y) - f(x)) dy \right| \quad \left( \text{dado que } \int_{\mathbb{R}} p(x, y, t) dy = 1 \right). \end{aligned}$$



Entonces, tenemos para  $M > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 |u(x, t) - f(x)| &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |f(y) - f(x)| dy \\
 &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{V(x, 2M\sqrt{t})} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |f(y) - f(x)| dy \\
 &\quad + \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R} \setminus V(x, 2M\sqrt{t})} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |f(y) - f(x)| dy \\
 &\leq \sup_{V(x, 2M\sqrt{t})} |f(x) - f(y)| \int_{V(x, 2M\sqrt{t})} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \frac{dy}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \\
 &\quad + 2 \sup_{\mathbb{R}} |f| \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R} \setminus V(x, 2M\sqrt{t})} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Notemos que si  $z \doteq x - y$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R} \setminus V(x, 2\sqrt{t})} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \frac{dy}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} &= \int_{\mathbb{R} \setminus V(0, 2M\sqrt{t})} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} \frac{dz}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{2M\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4t}} \frac{dr}{2\sqrt{t}} \\
 \left( \text{donde } s = \frac{r}{2\sqrt{t}} \right) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_M^{\infty} e^{-s^2} ds. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Entonces, de (12), (13), y, usando nuevamente que  $\int_{\mathbb{R}} p(x, y, t) dy = 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 |u(x, t) - f(x)| &\leq \sup_{V(x, 2M\sqrt{t})} |f(x) - f(y)| \\
 &\quad + 2 \sup |f| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_M^{\infty} e^{-s^2} ds. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Observemos que para  $\varepsilon > 0$  existe una  $M > 0$  lo suficientemente grande tal que

$$2 \frac{\sup |f|}{\sqrt{\pi}} \int_M^{\infty} e^{-s^2} ds < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por la continuidad de  $f$  en  $x$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < t < \delta$ , tenemos

$$\sup_{V(x, 2M\sqrt{t})} |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, si  $0 < t < \delta$ , obtenemos

$$|u(x, t) - f(x)| < \varepsilon. \quad \square$$

**Teorema 1.6.** *Supongamos que  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Entonces, para cada  $x \in \mathbb{R}$  tenemos que*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x, t) - f(x)}{t} = \Delta f(x).$$

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$ . Entonces, usando un cambio de variables,

$$\begin{aligned} u(x, t) - f(x) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} [f(y) - f(x)] dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|z|^2} [f(x + \sqrt{4t}z) - f(x)] dz. \end{aligned}$$

Por lo expansión en serie de Taylor, existe  $\xi \in [x, x + \sqrt{4t}z]$  tal que

$$f(x + \sqrt{4t}z) - f(x) = \sqrt{4t} \partial_x f(x) z + \frac{4t}{2} \Delta f(\xi) z^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t) - f(x)}{t} &= \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \partial_x f(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-|z|^2} z dz + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|z|^2} \Delta f(\xi) z^2 dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|z|^2} \Delta f(\xi) z^2 dz, \end{aligned}$$

dado que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|z|^2} z dz = 0.$$

Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, t) - f(x)}{t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-|z|^2} \Delta f(\xi) z^2 dz,$$

donde  $\xi \in [x, x + \sqrt{4t}z]$ .

Entonces, dado que  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, t) - f(x)}{t} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Delta f(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-|z|^2} z^2 dz \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Delta f(x) \int_0^\infty e^{-r^2} r^2 dr \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Delta f(x) \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{1}{2}+1} \frac{ds}{s} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Delta f(x) \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \Delta f(x), \end{aligned}$$

por las propiedades de la función gamma  $\Gamma(z)$ . □

**Teorema 1.7.** *Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y acotada. Entonces, para  $s, t > 0$ ,*

$$(P_t \circ P_s) f(x) = P_{t+s} f(x)$$

donde

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y, t) f(y) dy.$$

*Demostración.* Notemos que

$$\begin{aligned} (P_t \circ P_s) f(x) &= \int_{\mathbb{R}} p(x, z, t) P_s f(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} p(x, z, t) \left( \int_{\mathbb{R}} p(z, y, s) f(y) dy \right) dz \\ (\text{por el Teorema de Fubini}) &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} p(x, z, t) p(z, y, s) dz \right) f(y) dy. \end{aligned}$$

Ahora, debemos probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(x, z, t) p(z, y, s) dz = p(x, y, t + s).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} p(x, z, t)p(z, y, s) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(4\pi s)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x-z|^2}{4t}} e^{-\frac{|z-y|^2}{4s}} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(4\pi s)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x-z|^2}{4t} - \frac{|z-y|^2}{4s}} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{|x-z|^2}{4t} + \frac{|z-y|^2}{4s} = \frac{1}{4ts} \left( (s+t)|z|^2 - 2z \cdot (sx + ty) \right) + \frac{|x|^2}{4t} + \frac{|y|^2}{4s}$$

Más aún,

$$\begin{aligned} \frac{|x-z|^2}{4t} + \frac{|z-y|^2}{4s} &= \frac{t+s}{4ts} \left( |z|^2 - 2z \cdot \frac{sx+ty}{t+s} \right) + \frac{|x|^2}{4t} + \frac{|y|^2}{4s} \\ &= \frac{t+s}{4ts} \left( \left| z - \frac{sx+ty}{t+s} \right|^2 - \left| \frac{sx+ty}{t+s} \right|^2 \right) + \frac{|x|^2}{4t} + \frac{|y|^2}{4s} \\ &= \frac{t+s}{4ts} \left| z - \frac{sx+ty}{t+s} \right|^2 + \frac{|x-y|^2}{4(t+s)}. \end{aligned} \tag{15}$$

De (15) obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} p(x, z, t)p(z, y, s) dz &= \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+s)}}}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(4\pi ts)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{t+s}{4ts} \left| z - \frac{sx+ty}{t+s} \right|^2} dz \\ &= \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+s)}}}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(4\pi ts)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{t+s}{4ts} z^2} dz \\ \left( w = \left( \frac{t+s}{4ts} \right)^{\frac{1}{2}} z \right) &= \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+s)}}}{(4\pi(t+s))^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-w^2} dw \\ &= \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t+s)}}}{(4\pi(t+s))^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

□

2. SEMIGRUPOS

En esta sección estudiaremos el semigrupo generado por la ecuación del calor. Para esto necesitamos recordar la noción de espacio de Banach.

**Definición 2.1.** Sea  $B$  un espacio vectorial real. Una norma en  $B$  es una función

$$\|\cdot\|: B \rightarrow [0, \infty)$$

tal que

1.  $\|av\| = |a|\|v\|$  para toda  $a \in \mathbb{R}$  y  $v \in B$ .
2.  $\|v\| = 0$  si y solo si  $v = 0$ .
3. (Desigualdad del Triángulo)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  para todo  $v, w \in B$ .

Un espacio vectorial normado sobre  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial que tiene una norma.

Si  $B$  es un espacio vectorial normado  $\|\cdot\|$ , definimos a la función  $d: B \times B \rightarrow [0, \infty)$  como la función

$$d(v, w) = \|v - w\| \quad \text{con } v, w \in B.$$

Entonces la función  $d$  satisface las siguientes propiedades para todo  $v, w, u \in B$ :

1.  $d(v, w) \geq 0$ ;
2.  $d(v, w) = 0$  si y solo si  $v = w$ ;
3.  $d(v, w) = d(w, v)$ ;
4.  $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$ .

La función  $d$  es conocida como la métrica o distancia inducida por la norma  $\|\cdot\|$ .

**Definición 2.2.** Sea  $(B, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado.

- Decimos que  $(u_n) \subset B$  es de Cauchy si dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m \geq N$ , entonces  $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ .
- Decimos que un espacio vectorial normado  $B$  es un espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy tiene un límite en  $B$ , es decir,  $B$  es completo.

**Teorema 2.3.** El espacio  $B$  de las funciones uniformemente continuas y acotadas con la norma

$$\|f\|_\infty \doteq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad \text{con } f \in B,$$

es un espacio de Banach.

*Demostración.* Sea  $(f_n) \subset B$  una sucesión de Cauchy, esto es, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m \geq N$ ,  $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ . Entonces, si  $n, m \geq N$ ,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Tomando  $\varepsilon = 1$ , obtenemos de (16) que si  $n \geq N$ ,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \\ &< 1 + \|f_N\|_\infty, \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (17)$$

Por lo tanto, si  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f_n(x)| \leq \max\{1 + \|f_N\|_\infty, \|f_1\|_\infty, \dots, \|f_{N-1}\|_\infty\}$$

Esto es, existe  $M > 0$  tal que  $\|f_n\|_\infty \leq M$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Ahora, para  $x \in \mathbb{R}$  fijo,  $(f_n(x))$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto, existe  $f(x)$  tal que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Demostraremos que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada y uniformemente continua.

Sabemos que para cada  $x \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $N_x \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq N_x$ , entonces  $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Si  $n \geq N$ , donde  $N \in \mathbb{N}$  esta dada en (16), tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq |f(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - f_n(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde  $m_x \geq \max\{N, N_x\}$ . Hemos demostrado que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$ ,  $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ . Tomando  $\varepsilon = 1$ , existe  $N$  tal que

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_N\|_\infty + \|f_N\|_\infty < 1 + M.$$

Por lo tanto,  $f$  está acotada.

Nuevamente, sea  $\varepsilon > 0$  entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|f_N - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ . Como  $f_N$  es uniformemente continua, existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - y| < \delta$ , entonces

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por lo tanto, si  $|x - y| < \delta$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

En conclusión,  $f$  es acotada y uniformemente continua, esto es,  $f \in B$ . Por lo tanto,  $B$  es un espacio de Banach.  $\square$

Un operador lineal  $T: B \rightarrow B$  es una función tal que

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda Tu + \mu Tv, \quad \text{para toda } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ y } u, v \in B.$$

Un operador lineal  $T: B \rightarrow B$  es acotado si existe  $M \geq 0$  tal que

$$\|Tu\| \leq M\|u\| \quad \text{para toda } u \in B.$$

**Teorema 2.4.** *Un operador es acotado si y solo si es continuo.*

*Demostración.* Supongamos que  $T: B \rightarrow B$  es acotado, es decir, que existe una  $M > 0$  tal que  $\|Tu\| \leq M\|u\|$  para toda  $u \in B$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Entonces, si  $\|u - v\| < \varepsilon/M$ , entonces  $\|Tu - Tv\| = \|T(u - v)\| \leq M\|u - v\| < \varepsilon$ . Por lo que  $T$  es continuo, de hecho, Lipschitz continuo.

Ahora, supongamos que  $T$  es continuo. Entonces, existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|v\| \leq \delta$  se tiene que  $\|Tv\| = \|Tv - T(0)\| \leq 1$ . Ahora, para todos los  $u \in B$ , con  $u \neq 0$ ,

$$\|Tu\| = \left\| \frac{\|u\|}{\delta} T\left(\delta \frac{u}{\|u\|}\right) \right\| = \frac{\|u\|}{\delta} \left\| T\left(\delta \frac{u}{\|u\|}\right) \right\| \leq \frac{\|u\|}{\delta} \cdot 1 = \frac{1}{\delta} \|u\|.$$

□

**Definición 2.5.** *Sea  $B$  un espacio de Banach. Sean  $T_t: B \rightarrow B$  operadores lineales continuos con:*

1.  $T_0 = \text{Id}$ ;
2.  $T_{t+s} = T_t \circ T_s$  para todo  $s, t \geq 0$ ;
3.  $\lim_{t \rightarrow s} T_t v = T_s v$  para todo  $s \geq 0$  y para todo  $v \in B$ .

Entonces, a la familia  $(T_t)_{t \geq 0}$  se le conoce como un semigrupo continuo de operadores.

Un semigrupo continuo  $(T_t)$  de operadores lineales continuos de un espacio de Banach  $(B, \|\cdot\|)$  es una contracción si para toda  $v \in B$  y toda  $t \geq 0$ ,

$$\|T_t v\| \leq \|v\|.$$

Sea  $B$  el espacio de Banach de funciones uniformemente continuas y acotadas. Para  $t \geq 0$ , definimos

$$T_t f(x) \doteq f(x + t), \quad \text{con } f \in B. \tag{18}$$

No es difícil ver que las condiciones de la Definición 2.5 se cumplen. Ahora, recordemos que la norma en  $B$  está dada por la norma supremo  $\|\cdot\|_\infty$ , por lo tanto,

$$\|T_t f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Más adelante veremos que el *generador infinitesimal* semigrupo  $(T_t)$  en (18) está dado por la derivada  $\frac{d}{dx}$ . A continuación, nos enfocaremos en estudiar la ecuación de calor.

**Proposición 2.6.** *Sea  $B$  el espacio de funciones uniformemente continuas y acotadas. Entonces,  $(P_t)_{t \geq 0}$  es un semigrupo continuo de operadores contractivo, donde  $P_0 = \text{Id}$  y si  $t > 0$ ,*

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y, t) f(y) dy, \quad \text{con } f \in B.$$

*Demostración.* Al ser  $f$  uniformemente continua, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - y| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Por lo que, si  $|x - y| < \delta$ ,

$$\begin{aligned} |P_t f(x) - P_t f(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (p(x, z, t) - p(y, z, t)) f(z) dz \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{4t}} |f(x - z) - f(y - z)| dz \\ &< \varepsilon, \quad \text{dado que } \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = 1. \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $P_t f \in B$ . De la Proposición 1.3, obtenemos inmediatamente que  $\|P_t f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ . Del Teorema 1.7 obtenemos que  $P_t \circ P_s = P_{t+s}$ . Ahora, si usamos las ideas del Teorema 1.5 obtenemos que

$$\lim_{t \rightarrow s} P_t f = P_s f, \quad \text{para todo } s \geq 0 \text{ y } f \in B. \quad \square$$

**Definición 2.7.** *Sea  $(T_t)$  un semigrupo continuo en un espacio de Banach  $B$ . Definimos*

$$D(A) \doteq \left\{ v \in B : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_t - \text{Id})v \text{ exists} \right\} \subset B \quad (19)$$

*y llamamos al operador lineal  $A: D(A) \rightarrow B$ , definido como*

$$Av \doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_t - \text{Id})v, \quad v \in B,$$

*el generador infinitesimal del semigrupo  $(T_t)$ .*

Sea  $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}) \subset B$ , donde  $B$  es el espacio de Banach de las funciones uniformemente continuas y acotadas. Para el semigrupo  $(T_t)$  dado por (18) tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_t - \text{Id})f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x+t) - f(x)) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Por lo tanto, el generador infinitesimal del semigrupo  $(T_t)$  debería estar dado por  $A \doteq \frac{d}{dx}$ . Ahora, del Teorema 1.6 tenemos que  $A \doteq \Delta$  debería de ser el generador del semigrupo del calor. A continuación veremos como determinar  $A$  y el conjunto  $D(A)$



para ambos semigrupos. Pero antes, necesitamos construir la integral de Riemann para funciones con valores en un espacio de Banach.

Denotemos por  $C([a, b]; B)$  el espacio de funciones continuas sobre  $[a, b]$  con valores en  $B$ . Para  $u \in C([a, b]; B)$ , definimos

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} \|u(t)\|.$$

El supremo existe gracias a que  $t \rightarrow \|u(t)\|$  es una función continua sobre  $[a, b]$ . No es difícil ver que

**Proposición 2.8.** *El espacio  $(C([a, b]; B), \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio de Banach.*

*Demostración.* Sea  $(u_m) \subset C([a, b]; B)$  una sucesión de Cauchy, esto es, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$

$$\text{tal que si } m, n \geq N, \text{ entonces } \|u_m - u_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Por lo tanto, si  $m, n \geq N$ ,

$$\|u_m(t) - u_n(t)\| < \varepsilon, \quad \text{para cada } t \in [a, b].$$

Entonces, para cada  $t \in [a, b]$ ,  $(u_m(t)) \subset B$  es una sucesión de Cauchy. Dado que  $B$  es completo, existe  $u(t) \in B$  tal que  $u_m(t) \rightarrow u(t)$ , para cada  $t \in [a, b]$ . Sabemos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n \geq N$ , entonces  $\|u_m - u_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ . Ahora, dado  $t \in [a, b]$ , existe  $m_t \geq N$  tal que  $\|u_{m_t}(t) - u(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Por lo tanto, si  $n \geq N$ , entonces para  $t \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\| &\leq \|u_{m_t}(t) - u(t)\| + \|u_{m_t}(t) - u_n(t)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto es, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$ , entonces

$$\|u_n - u\|_\infty < \varepsilon.$$

En conclusión,  $(C([a, b]; B), \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio de Banach.  $\square$

Ahora construiremos la integral de Riemann para funciones  $u: [a, b] \rightarrow B$ , donde  $B$  es un espacio de Banach.

**Definición 2.9.**

- Sea  $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b\}$  una partición de  $[a, b]$ . Una colección de etiquetas para la partición  $P$  es una colección  $\{t_1^*, t_2^*, \dots, t_k^*\}$  de puntos en  $[a, b]$  que cumplen  $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$  para todo  $i = 1, \dots, k$ .

- Una partición etiquetada  $\dot{P}$  está definida como una partición junto con un conjunto de etiquetas, es decir,

$$\dot{P} = (P, \{t_i^*\}_{i=1}^k).$$

- Para una partición  $P$ , posiblemente etiquetada, definimos la malla de  $P$  como

$$\delta(P) \doteq \max\{t_j - t_{j-1} : j = 1, \dots, k-1\}.$$

- Sea  $u: [a, b] \rightarrow B$  y  $\dot{P}$  una partición etiquetada. Definimos la suma de Riemann de  $u$  correspondiente a la partición  $\dot{P}$  por

$$S(\dot{P}, u) \doteq \sum_{j=1}^k u(t_j^*)(t_j - t_{j-1}). \quad (20)$$

**Teorema 2.10.** Dado  $u \in C([a, b]; B)$ , existe  $u_0 \in B$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  con  $\|S(\dot{P}, u) - u_0\| < \varepsilon$ , para todas las particiones etiquetadas  $\dot{P}$  de  $[a, b]$  con  $\delta(P) < \delta$ , donde  $S(\dot{P}, u)$  está dado por (20).

Al elemento  $u_0$  lo llamaremos la integral de Riemann de  $u$  y lo denotaremos por

$$\int_a^b u \, ds.$$

Para demostrar el Teorema 2.10 necesitamos el siguiente lemma.

**Lema 2.11.** Sea  $u: [a, b] \rightarrow B$  una función continua. Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda partición etiquetada  $\dot{P}$  de  $[a, b]$  cuya malla es menor que  $\delta$ , y cualquier refinamiento  $\dot{Q}$  de  $\dot{P}$ , se cumple que

$$\|S(\dot{P}, u) - S(\dot{Q}, u)\| < \varepsilon.$$

*Demostración.* Tenemos que  $u$  es uniformemente continua en  $[a, b]$ . Entonces, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $t, s \in [a, b]$  con  $|t - s| < \delta$  entonces

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Sea  $\dot{P} = (P, \{t_i^*\}_{i=1}^k)$ , con  $P = \{a = t_1 < t_2 < \dots < t_k = b\}$ , una partición etiquetada de  $[a, b]$  con malla  $\delta(P) < \delta$ . Sea  $\dot{Q} = (Q, \{s_i^*\}_{i=1}^\ell)$ , con  $Q = \{a = s_1 < s_2 < \dots < s_\ell = b\}$ , un refinamiento de  $\dot{P}$ . Entonces, para cada  $j = 1, 2, \dots, k-1$ , existe  $k_j \in \{0, 1, \dots, \ell-1\}$  y un entero  $m_j$  tales que

$$t_{j-1} = s_{k_j} < s_{k_j+1} < \dots < s_{k_j+m_j} = t_j.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \|S(P, u) - S(Q, u)\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^{k-1} u(t_j^*)(t_j - t_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{m_j} u(s_{k_j+i}^*)(s_{k_j+i} - s_{k_j+i-1}) \right\| \\
 &= \left\| \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{m_j} (u(t_{k_j+i}^*) - u(s_{k_j+i}^*))(s_{k_j+i} - s_{k_j+i-1}) \right\| \\
 &\leq \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{m_j} (s_{k_j+i} - s_{k_j+i-1}) \|u(t_{k_j+i}^*) - u(s_{k_j+i}^*)\|.
 \end{aligned}$$

Dado que la malla de  $P$  es estrictamente menor que  $\delta$ , tenemos que

$$\|S(\dot{P}, u) - S(\dot{Q}, u)\| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{m_j} (s_{k_j+i} - s_{k_j+i-1}) = \varepsilon. \quad \square$$

Ahora, podemos proceder a la demostración del Teorema 2.10.

*Prueba de Teorema 2.10.* Dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta > 0$  como en el Lema 2.11 que corresponda a  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Sean  $\dot{P}$  y  $\dot{Q}$  dos particiones de  $[a, b]$  con malla estrictamente menor que  $\delta$ . Si  $\dot{P} \cup \dot{Q}$  denota el refinamiento en común, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \|S(\dot{P}, u) - S(\dot{Q}, u)\| &\leq \|S(\dot{P}, u) - S(\dot{P} \cup \dot{Q}, u)\| \\
 &\quad + \|S(\dot{P} \cup \dot{Q}, u) - S(\dot{Q}, u)\| < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\delta_n > 0$  tal que

$$\|S(\dot{P}, u) - S(\dot{Q}, u)\| < \frac{1}{n},$$

para todas las particiones  $\dot{P}$  y  $\dot{Q}$  con malla menor que  $\delta_n$ . Podemos suponer que  $\delta_{n+1} \leq \delta_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $P_n$  una partición de  $[a, b]$  cuya malla sea menor que  $\delta_n$ .

Para cualesquiera  $n \geq m$  tenemos que

$$\|S(\dot{P}_n, u) - S(\dot{P}_m, u)\| < \frac{1}{m}.$$

Por lo tanto, la sucesión  $(S(\dot{P}_n, u))$  es de Cauchy en  $B$ . Dado que  $B$  es un espacio de Banach, existe un punto  $u_0 \in B$  tal que

$$\lim S(\dot{P}_n, u) = u_0.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Tenemos que existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N_1$  entonces  $\|S(\dot{P}_n, u) - u_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Además, se tiene que existe  $N_2$  tal que  $\frac{1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Definamos  $N \doteq \max\{N_1, N_2\}$ . Entonces, existe  $\delta_N > 0$  tal que si  $\dot{P}$  y  $\dot{Q}$  tienen mallas menores que  $\delta_N$ , se tiene que

$$\|S(\dot{P}, u) - S(\dot{Q}, u)\| < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, sea  $\dot{P}$  una partición de  $[a, b]$  con malla menor que  $\delta_N$ , entonces

$$\begin{aligned} \|S(\dot{P}, u) - u_0\| &\leq \|S(\dot{P}, u) - S(\dot{P}_N, u)\| + \|S(\dot{P}_N, u) - u_0\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

esto es lo que queríamos demostrar.  $\square$

La demostración del siguiente teorema puede encontrarse en [2].

**Teorema 2.12.** *Sea  $u: [a, b] \rightarrow B$  una función continua. Entonces,*

1.  $\left\| \int_a^b u \right\| \leq \int_a^b \|u\| dx$ ;
2. si  $B_1$  y  $B_2$  son espacios de Banach y  $T: B_1 \rightarrow B_2$  es un operador lineal continuo, entonces

$$\int_a^b T(u) = T\left(\int_a^b u\right).$$

Para un semigrupo continuo contractivo  $(T_t)$  en  $B$  definimos el operador

$$J_\lambda v \doteq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} T_s v \, ds \quad \text{for } \lambda > 0. \quad (21)$$

Observemos que

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \, ds = \int_0^\infty -\frac{d}{ds}(e^{-\lambda s}) \, ds = 1.$$

Entonces,  $J_\lambda v$  es un promedio ponderado de  $T_t v$ . Del Teorema 2.12 obtenemos que

$$\begin{aligned} \|J_\lambda v\| &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \|T_s v\| \, ds \\ &\leq \|v\| \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \, ds = \|v\|. \end{aligned}$$

**Lema 2.13.** *Para toda  $v \in B$ , tenemos que*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_\lambda v = T_0 v = v.$$

*Demostración.* Notemos que

$$J_\lambda v - v = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} (T_s v - v) ds.$$

Al ser  $T_s v$  continuo en  $s$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|T_s v - v\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{for } 0 \leq s \leq \delta.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|J_\lambda v - v\| &\leq \left\| \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda s} (T_s v - v) ds \right\| + \left\| \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s} (T_s v - v) ds \right\| \\ &\leq \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda s} \|T_s v - v\| ds + \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s} (\|T_s v\| + \|v\|) ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda s} ds + 2\|v\| \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds. \end{aligned} \quad (22)$$

Ahora, notemos que  $\int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda \delta}$ . Por lo tanto, existe  $\lambda_0$  tal que si  $\lambda > \lambda_0$ ,

$$2\|v\| \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (23)$$

Dado que  $\int_0^\delta \lambda e^{-\lambda s} ds \leq 1$ , de (22) y (23) obtenemos

$$\|J_\lambda v - v\| < \varepsilon, \quad \text{para } \lambda \geq \lambda_0. \quad \square$$

**Teorema 2.14.** *Sea  $(T_t)$  un semigrupo continuo contractivo con generador infinitesimal  $A$ . Entonces,  $D(A)$  es denso en  $B$ .*

*Demostración.* Basta demostrar que para todo  $\lambda > 0$  y toda  $v \in B$ ,  $J_\lambda v \in D(A)$ . Al ser  $T_t$  un operador continuo para cada  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(T_t - Id)J_\lambda v &= \frac{1}{t} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} T_{t+s} v ds - \frac{1}{t} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} T_s v ds \\ &= \frac{1}{t} \int_t^\infty \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda \sigma} T_\sigma v d\sigma - \frac{1}{t} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} T_s v ds \\ &= \frac{e^{\lambda t} - 1}{t} \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda \sigma} T_\sigma v d\sigma - \frac{1}{t} \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} T_s v ds. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(T_t - Id)J_\lambda v &= \frac{e^{\lambda t} - 1}{t} \left( J_\lambda v - \int_0^t \lambda e^{-\lambda \sigma} T_\sigma v d\sigma \right) \\ &\quad - \frac{1}{t} \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} T_s v ds. \end{aligned}$$

El notemos que el primer término converge a  $\lambda J_\lambda v$ , mientras que el último término converge a  $-\lambda T_0 v = -\lambda v$ . En conclusión,

$$AJ_\lambda v = \lambda(J_\lambda - Id)v, \quad \text{para toda } v \in B. \quad (24)$$

Por el Lemma 2.13, tenemos que  $D(A)$  es denso en  $B$ .  $\square$

De (24) se puede demostrar, lo cual no veremos aquí, que  $D(A) = J_\lambda(B)$  para toda  $\lambda > 0$ , ver Teorema 8.2.2 en [3].

Ahora veremos como obtener  $A$  y  $D(A)$  para el semigrupo de traslaciones. Sea  $B$  el espacio de Banach de las funciones uniformemente continuas y acotadas en  $[0, \infty)$ , y  $(T_t)$  el semigrupo dado por

$$T_t f(x) = f(x + t), \quad \text{para } f \in B \text{ y } x, t \geq 0.$$

Observando que

$$(J_\lambda f)(x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} f(x + s) ds = e^{\lambda x} \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda s} f(s) ds,$$

entonces,

$$\frac{d}{dx}(J_\lambda f)(x) = -\lambda f(x) + \lambda(J_\lambda f)(x). \quad (25)$$

De (24) tenemos también que

$$AJ_\lambda v(x) = \lambda(J_\lambda f - f)(x).$$

Por lo que,

$$AJ_\lambda f = \frac{d}{dx}(J_\lambda f).$$

Como  $J_\lambda(B) = D(A)$ , tenemos que

$$Ag = \frac{d}{dx}g, \quad \text{para toda } g \in D(A).$$

A continuación veremos que

$$D(A) = \left\{ g \in B : \frac{d}{dx}g \in B \right\}.$$

Sea  $g \in B$  con  $\frac{d}{dx}g \in B$ . Definimos  $f \in B$  como

$$\frac{d}{dx}g(x) - \lambda g(x) = -\lambda f(x), \quad \lambda > 0.$$

Pero también sabemos de (25) que

$$\frac{d}{dx}(J_\lambda f)(x) - \lambda(J_\lambda f)(x) = -\lambda f(x).$$

Por lo tanto,  $h = g - J_\lambda g$  satisface

$$\frac{d}{dx}h = \lambda h, \quad \lambda > 0.$$

Entonces,  $h(x) = c e^{\lambda x}$ , pero al ser  $h$  acotada,  $c$  debe ser 0. Esto es,  $g = J_\lambda f$ .

Sea  $B$  nuevamente el espacio de Banach de las funciones uniformemente continuas y acotadas pero ahora en todo  $\mathbb{R}$ . Para  $f \in B$  recordamos que el semigrupo de calor se encuentra dado por

$$P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy, \quad t > 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} J_\lambda f(x) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} P_t f(x) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} p(x, y, t) dt f(y) dy. \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}\Delta J_\lambda f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \Delta_x p(x, y, t) dt f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial t} p(x, y, t) dt f(y) dy.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial t} p(x, y, t) dt &= -\lambda \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\lambda t} p(x, y, t) \\ &\quad - \int_0^\infty \lambda \frac{\partial}{\partial t} (e^{-\lambda t}) p(x, y, t) dt.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\Delta J_\lambda f(x) &= -\lambda \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t} p(x, y, t) f(y) dy \\ &\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} p(x, y, t) dt f(y) dy \\ &= -\lambda f(x) + \lambda J_\lambda f(x).\end{aligned}$$

Como en el caso anterior  $AJ_\lambda f = \Delta J_\lambda f$ , y por lo tanto,

$$Ag = \Delta g, \quad \text{para toda } g \in D(A).$$

Ahora, queremos demostrar que

$$D(A) = \{g \in B : \Delta g \in B\}.$$

Sea  $g \in B$  tal que  $\Delta g \in B$ . Como antes, definimos  $f \in B$  por

$$\Delta g(x) - \lambda g(x) = \lambda f(x),$$

y recordamos que

$$\Delta J_\lambda f(x) - \lambda J_\lambda f(x) = \lambda f(x).$$

Entonces,  $h \doteq g - J_\lambda f$  cumple que  $\Delta h = \lambda h$ . Entonces,

$$h(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x},$$

para algunas constantes  $c_1, c_2$ . Como  $h$  debe ser acotada en todo  $\mathbb{R}$ ,  $c_1 = c_2 = 0$ . Por lo que,  $g = J_\lambda f \in B$ .



De manera general, uno puede demostrar que los operadores

$$P_t f(x) \doteq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy,$$

definen un semigrupo continuo en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $1 \leq p < \infty$ . El generador nuevamente es el operador de Laplace  $\Delta$ , dado por

$$\Delta \doteq \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

y con dominio

$$D(\Delta) \doteq \{f \in L^p(\mathbb{R}^n); \Delta f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Aquí,  $\Delta f$  para  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  está definido en el sentido de distribuciones.

### 3. MOVIMIENTO BROWNIANO

Una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\mathbb{R}$  es una familia  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  no vacía de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que verifica las siguientes condiciones:

1.  $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$ ;
2.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ ;
3.  $A_n \in \mathcal{A}$  con  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .

La  $\sigma$ -álgebra de Borel, denotada por  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , es la  $\sigma$ -álgebra generada por los abiertos en  $\mathbb{R}$ . Con ayuda del núcleo de calor definimos la medida (“longitud”) de un conjunto  $E \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$  como

$$P(x, t, E) \doteq \int_E p(x, y, t) dy. \tag{26}$$

Entonces,  $P(x, t, \mathbb{R}) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$ . Más aún, por las propiedades del núcleo del calor  $p(x, y, t)$  tenemos

$$P(x, t+s, E) = \int_{\mathbb{R}} P(y, s, E) p(x, y, t) dy, \tag{27}$$

para toda  $x \in \mathbb{R}$  y  $t, s > 0$ . A  $P(x, t, E)$  se le conoce como *movimiento browniano* en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Además,  $P(x, t, E)$  satisface

$$P(t, i(x), i(E)) = P(t, x, E),$$

para cualquier traslación  $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Esto es, el movimiento browniano es *espacialmente homogéneo*.

En términos probabilísticos, el movimiento browniano es una colección de variables aleatorias  $(B_t^x)$  indexadas por el tiempo  $t \geq 0$ , con  $B_0^x = x$ . Cada  $B_t^x$  tiene distribución normal  $\mathcal{N}(x, t)$ . En nuestra notación anterior,

$$P\{B_t^x \in E\} = P(x, t, E) = \int_E p(x, y, t) dy,$$

donde  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . A continuación daremos unas simulaciones del movimiento browniano con  $x = 0$ . De la figura de abajo se puede apreciar que  $B_t$  es continuo, mas no diferenciable.

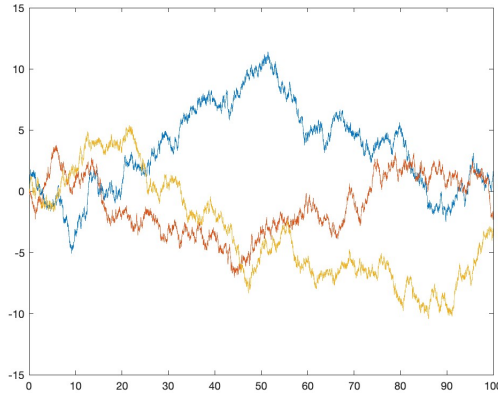


FIGURA 2. Movimiento Browniano  $B_t$  con  $B_0 = 0$

La solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u(x, t) - \partial_t u(x, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

en términos del movimiento browniano es

$$u(x, t) \doteq \mathbb{E}[f(B_t^x)].$$

## REFERENCIAS

- [1] Evans, Lawrence C: Partial Differential Equations, Graduate studies in mathematics **19**, American Mathematical Society, ISSN 1065-7339.
- [2] Gordon, Russell: Survey Article Riemann Integration in Banach Spaces, Rocky Mountain J. Math. 21(3): 923-949 (Summer 1991). DOI: 10.1216/rmj/1181072923.
- [3] Jost, Jürgen: Partial Differential Equations. Graduate Texts in Mathematics, vol. 214. Springer, Berlin (2013).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. GRAL. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN 1421, OLÍMPICA, 44430 GUADALAJARA, JAL.

*E-mail address:* `celia.avalos@academicos.ugd.mx`

*E-mail address:* `isidro.munive@academicos.udg.mx`

*E-mail address:* `sofia.ortega@academicos.edu.mx`



# Aplicaciones en Ciencias de la Tierra



## ADQUISICIÓN Y PROCESAMIENTO DE DATOS GEOFÍSICOS

MIGUEL ÁNGEL ALATORRE ZAMORA, NÉSTOR FERNANDO DELGADILLO JÁUREGUI,  
JOSÉ PAUL CALDERÓN MAGALLÓN, QUIRIAT JEARIM GUTIÉRREZ PEÑA, EMILIA FREGOSO  
BECERRA, FERNANDO IGNACIO BECERRA LÓPEZ, EDGAR ALEJANDRO GUERRERO ARROYO,  
ABEL PALAFOX GONZÁLEZ, AND JUAN ANTONIO LICEA SALAZAR

**RESUMEN.** En este trabajo se describen tres de los principales métodos geofísicos: magnetometría, resistividad eléctrica y sísmica de refracción, los cuales son utilizados para contribuir a la interpretación de las características físicas del interior de la Tierra. El objetivo principal en este trabajo es mostrar metodologías comunes para la adquisición y el procesamiento de los datos. Asimismo, se describen los fundamentos teóricos para cada una de estas técnicas geofísicas.

**ABSTRACT.** In this work, three of the main geophysical methods are described: the magnetic method, electrical resistivity, and seismic refraction method, which contribute to the interpretation of physical properties of the Earth's interior. The main goal in this work is to show common methodologies for data acquisition and processing. In addition, the theoretical foundation for each of these techniques is described.

### 1. INTRODUCCIÓN

La geofísica suele reconocerse en una vertiente como el estudio de la Tierra a través de los fenómenos físicos que ocurren dentro o fuera de ella. En otra vertiente, es el estudio de los fenómenos físicos vinculados con el planeta. O más concretamente, es la aplicación de los principios y prácticas de la física para la resolución de los problemas relacionados con la Tierra midiendo de modo indirecto las variaciones de

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 86A04.

*Palabras Claves.* Datos geofísicos. Magnetometría. Refracción Sísmica. Resistividad Eléctrica.

las magnitudes físicas en el espacio y el tiempo. De acuerdo a sus objetivos, podemos tener una Geofísica Aplicada o una Geofísica Teórica. La primera es la que brinda conocimiento y solución de diversas cuestiones pragmáticas y pecuniarias en torno al subsuelo, mediante la adquisición, el procesado y la interpretación de diversos parámetros físicos, a través de varios o algunos de los componentes de la geofísica aplicada, conocidos como métodos geofísicos. El uso de métodos geofísicos en un programa de exploración es un proceso multietapas e iterativo [2]. Las principales etapas en su orden de aplicación son:

**Definición de los objetivos de la prospección.:** Los objetivos dictan qué métodos geofísicos se deben emplear y los tipos de levantamientos que son más adecuados, por ejemplo, terrestres, aéreos, etc.

**Adquisición de datos.:** La adquisición de datos involucra dos distintas tareas, que son el diseño de un levantamiento y el hacer las mediciones requeridas en campo.

**Procesado de los datos.:** El procesamiento de datos implica la reducción (es decir, la corrección de los datos del levantamiento para una variedad de efectos distorsionadores), la mejora y la visualización de los datos, todo diseñado para resaltar lo que se percibe como la información geológicamente más relevante en los mismos.

**Presentación de los datos.:** Los datos procesados se pueden mostrar en una variedad de formas para adaptarse a la naturaleza del conjunto de datos (dataset) y los requisitos del intérprete al usarlos.

**Posterior interpretación de diferentes formas de los datos.:**

**1.1. ¿Qué es la adquisición de datos geofísicos?** La adquisición en el campo de la geofísica es la generación y registro de datos geofísicos, esto es, consiste en registrar de forma sistemática valores o parámetros de algún campo físico desde la superficie, mediante la configuración, principalmente geométrica, de sensores y fuentes transmisoras de ese campo físico, proceso que se conoce como levantamiento geofísico. Estas secuencias representan el valor promedio en un punto (estación), una superficie (sondeo) o un segmento con dirección determinada (perfil), de la propiedad física de interés. Un dato geofísico es aquella medición usada para proporcionar información sobre las propiedades físicas del interior y de la superficie terrestre. Las medidas pueden ser de tipo espacial (como variaciones de campos estáticos de fuerza, los gradientes de electricidad, gravitacional o “potencial” magnético) o de las características de los campos de ondas, más particularmente de tiempos de viaje de ondas elásticas



(sísmicas) y amplitud y distorsiones de fase de las ondas electromagnéticas. La recopilación de datos geofísicos en el campo implica el muestreo en el tiempo y el espacio. El muestreo incluye limitaciones teóricas y la posibilidad de creación de alias que tiene efectos graves en los datos muestreados. Los conceptos son aplicables tanto al muestreo en el dominio del tiempo como al muestreo espacial y a los datos geológicos. Muchas veces medir en geofísica es muestrear (o digitalizar) una señal continua, y cuando esto ocurre, la frecuencia de muestreo controla el contenido de frecuencia máxima que puede representar la señal muestreada (digitalizada). Intuitivamente, esperaríamos que el uso de una mala elección del intervalo de muestreo (intervalo de muestra demasiado grande, por ejemplo) simplemente daría como resultado una señal ligeramente distorsionada en comparación con los datos continuos originales. Sin embargo, las consecuencias del submuestreo son mucho más significativas. El resultado del submuestreo se llama aliasing, de la palabra alias, que significa tomar un nombre falso como engaño.

**1.2. Aliasing.** Se puede demostrar teóricamente que la frecuencia más alta que se puede representar mediante una señal muestreada es la frecuencia de Nyquist,

$$f_{\text{Nyq}} = \frac{1}{2dt}, \quad (1)$$

donde  $dt$  es el intervalo de muestreo. Si  $dt$  está en segundos entonces  $f_{\text{Nyq}}$  está en Hertz (Hz), o ciclos por segundo). Si la señal continua original tiene una banda limitada con la frecuencia más alta igual a  $f_c$  y  $f_c < f_{\text{Nyq}}$ , entonces la señal muestreada es una representación precisa de la señal continua. De hecho, para este caso, podemos recuperar (teorema de muestreo) la señal continua exacta de los datos muestreados. Sin embargo, si la señal continua tiene frecuencias más altas ( $f_c > f_{\text{Nyq}}$ ) de modo que los datos digitalizados están submuestreados, el resultado es una señal incorrecta.

**1.3. Procesamiento de datos geofísicos.** El procesamiento de datos geofísicos consiste en acumular, ordenar y aplicar algoritmos geocientíficos (matemáticos) a la señal registrada, para la obtención de información relevante del subsuelo. Las características del procesamiento son: corregir, amplificar, reagrupar geoestadísticamente, localizar en el espacio e incluso transformar en otras propiedades físicas, con el único objetivo de ajustar o acondicionar un modelo geofísico ideal con el modelo geológico observado.

## 2. MAGNETOMETRÍA

La magnetometría es un método geofísico con el cual se **mide la intensidad del campo magnético terrestre**. La magnetometría se ha implementado para estudiar las variaciones magnéticas causadas por diversos elementos situados en la corteza terrestre. El estudio se realiza con un equipo de medición denominado magnetómetro; estos equipos portan sensores que están diseñados para percibir variaciones espaciales y temporales en el campo magnético terrestre. Las variaciones temporales pueden ser de varios tipos. Sin embargo, son las variaciones provocadas por el paso del sol en la bóveda celeste las que se deben eliminar de las mediciones en campo. Estas variaciones se conocen como variaciones diurnas. Además, el procesado se completa calculando el valor local del Campo Magnético Terrestre que se debe solamente al planeta, para quedarnos con las variaciones espaciales que son las de importancia en los estudios magnéticos. El valor de la intensidad magnética de la Tierra se conoce como Campo de Referencia Geomagnética Internacional (IGRF, en inglés) y se puede calcular con applets que se encuentran en internet. Dependiendo del objetivo del estudio magnético, los datos se tienen que analizar e interpretar a partir de mapas de anomalía magnética. Tradicionalmente las exploraciones magnetométricas se realizan a pie en pequeñas escalas o en aeronaves tripuladas como avionetas o helicópteros para mayores extensiones. Actualmente se utilizan drones y magnetómetros con sistemas GPS para campañas aeromagnéticas. La magnetometría es muy útil para todo tipo de empresas y áreas que requieren de exploración subterránea en sus procesos productivos; por ejemplo, se puede aplicar en minería de hierro, exploración de hidrocarburos, construcción y obra civil o arqueología.

**2.1. Geomagnetismo (conceptos básicos).** Una forma de definir el campo magnético es con la Ley de Coulomb de magnetoestática, lo cual es conveniente por su simplicidad y similitud con la Ley de Newton, pero no es rigurosa ya que no existen los monopolos magnéticos

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2)$$

donde  $m$  es carga magnética o monopolo magnético,  $\gamma$  constante que depende del sistema de unidades (1 en sistema uem,  $\mu_0$  en el SI). En magnetoestática el campo magnético es descrito como una fuerza por unidad de carga magnética

$$H = \frac{m}{r^2}. \quad (3)$$

En geomagnetismo las unidades que se usan para describir al campo son la nano Tesla, ( $\text{nT} = 1 \times 10^{-9}\text{T}$ , conocida también como 1gamma. El campo terrestre tiene una magnitud de aproximadamente  $50\,000\text{nT} = 5 \times 10^{-4}\text{T}$ .

**2.2. Componentes del campo magnético.** El campo se mide directamente en observatorios magnéticos, en barco, tierra, aéreo y satélites. Debido a la naturaleza vectorial del campo, para describirlo en cualquier punto sobre la Tierra es necesario especificar al menos tres parámetros o componentes. Las componentes del campo generalmente están referidas al sistema geográfico local (Figura 1), y son descritas con la siguiente notación:

1.  $D$  declinación. Positiva hacia el Este geográfico, sentido horario.
2.  $I$  inclinación. Positiva del plano horizontal hacia abajo.
3.  $F$  intensidad o componente total.
4.  $X$  componente en la dirección del Norte geográfico,  $Y$  componente Este,  $Z$  componente vertical,  $H$  componente horizontal.

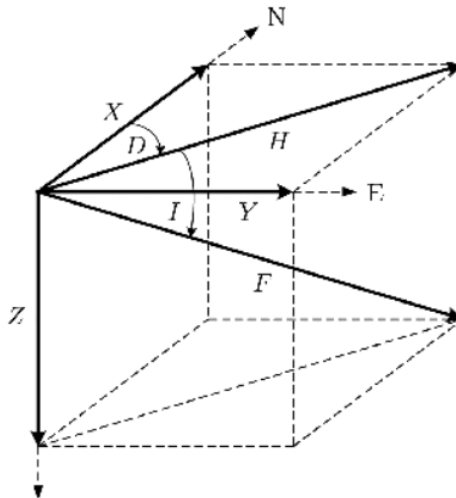


FIGURA 1. Componentes del campo geomagnético.

Los datos de observatorios magnéticos, compilados en un mapamundi, muestran variaciones de intensidad en el campo total,  $F$ , desde 25 000nT en el ecuador magnético hasta más de 60 000nT en los polos. También muestran la dirección del campo. El uso de satélites dedicados a la medición del campo total  $F$  ha aumentado la cobertura global y ha mejorado los datos para el análisis del campo terrestre. Un estándar aceptado que proporciona una distribución espacial del campo geomagnético es el llamado *Campo Geomagnético Internacional de Referencia* (IGRF, por sus siglas en inglés), el cual es revisado cada cinco años. El IGRF toma en cuenta la latitud y longitud de la posición sobre la superficie terrestre, así como la altura relativa sobre el nivel del mar. Alrededor del 98% del campo magnético de la Tierra es de origen interno, se cree que es causado por movimiento de metal líquido en el núcleo; el 2% restante es externo de origen solar.

**2.3. Variaciones de origen externo.** El campo geomagnético tiene variaciones temporales con diferentes amplitudes y períodos dominantes, que abarcan desde  $10 \times 10^{-3}$ s hasta 11 años. Son producidas por cambios en las corrientes eléctricas en la atmósfera superior. Las variaciones más importantes son:

- Ciclo solar. El período de recurrencia de los puntos solares (sunspots) es de  $\approx 11$  años.
- Semianual (6 meses). El campo geomagnético tiene una mayor habilidad de atrapar partículas cuando un polo está inclinado hacia el Sol.
- Recurrencia de tormentas. El Sol tiene un período de rotación ecuatorial de  $\approx 27$  días.
- Diurna solar (24h). Con amplitudes de algunas decenas de nT. Varía con la latitud. Producida por corrientes circulares en la ionósfera. También hay una diurna lunar (25h), de menor magnitud que la solar ( $\approx 10\%$ ) producida por un efecto de marea en la ionósfera.
- Tormentas magnéticas. Variaciones irregulares. Amplitudes de hasta 1000nT y aún mayores en regiones polares. Duran varias horas o hasta días. Tormentas fuertes aproximadamente menos de una por año. Pequeñas, varias por mes. Asociadas con explosiones solares.
- De menor período: bahías, pulsaciones, atmosféricos (asociados a tormentas eléctricas en zonas tropicales).

**2.4. Anomalías magnéticas.** El campo magnético de la Tierra es perturbado localmente por materiales que son capaces de ser magnetizados. Cuando las rocas son magnetizadas debajo o sobre la superficie de la Tierra, la dirección y magnitud

del campo magnético cambia ligeramente, estos pequeños cambios son los que nos interesa cuantificar y analizar para dar una interpretación de las estructuras en el subsuelo. Para esto, elaboramos mapas de los cambios de intensidad de campo magnético, producidos por los materiales geológicos en un sitio en particular, conocidos como *anomalías magnéticas*.

**2.5. Mediciones magnéticas.** Existen varios tipos de instrumentos que miden la intensidad del campo magnético en la tierra, entre los cuales están, los magnetómetros de válvula de flujo, los de precesión de protones, entre otros.

*2.5.1. Magnetómetros de precesión de protones.* Es un instrumento que mide la intensidad escalar del campo magnético local. La técnica de precesión de protones consiste de una bobina inductora para crear un campo magnético fuerte alrededor de un fluido rico en hidrógeno. Esto causa que los protones de hidrógeno se polaricen con el nuevo campo aplicado. Cuando la corriente que produce el campo polarizado es interrumpida, los protones comienzan a alinearse con el campo magnético de la Tierra mediante precesión. Esta transición emite un campo electromagnético cuya frecuencia es proporcional a la intensidad del campo terrestre, alrededor de 2kHz. Una ventaja importante de este instrumento es que su orientación no es crítica; el único requerimiento es que la polarización del campo debe ser en un buen ángulo con la dirección del campo terrestre. Otro factor que distingue a este instrumento es que mide la magnitud escalar y no su dirección. Está limitado a no funcionar bien en áreas de gradientes magnéticos altos. Gradientes del orden de 500nT/m, los cuales pueden ocurrir cerca de objetos metálicos, causarán lecturas erróneas. Varios diseños portátiles para mediciones en campo, tienen un rango de sensibilidad de 1nT en muestreos de 0.5s a 2s, controlado por disparadores automáticos o manuales.

**2.6. Proceso de medición y corrección de datos.** Las mediciones magnéticas se realizan ya sea sobre la tierra, el océano o en el aire. En mediciones terrestres, las observaciones pueden ser en intervalos extremadamente pequeños, los cuales permiten una alta resolución de las fuentes cercanas a la superficie. Las observaciones magnéticas son afectadas por un número de fuentes adicionales, las cuales están asociadas ya sea a los efectos de sol, agentes ajenos a las observaciones (objetos metálicos, postes de electricidad, etc.), o al mismo contraste de la magnetización del subsuelo. Las correcciones más comunes usadas en las mediciones terrestres se describen a continuación.

**2.6.1. Corrección diurna.** Es causada por las variaciones temporales del campo geomagnético, las cuales son principalmente causadas por partículas y radiación electromagnética del sol, que perturban la ionosfera y así el campo geomagnético. Las variaciones típicas son de decenas de nanoteslas durante un día “quieto”, en cambio en un día “turbio” las variaciones son irregulares y extremas en magnitud que van del orden de cientos de nanoteslas en una hora. Estas variaciones son atribuidas a tormentas magnéticas causadas por fuertes flujos de partículas cargadas del sol.

**2.6.2. Corrección del campo normal.** En este tipo de variación se debe considerar la variación normal de la intensidad del campo geomagnético con su latitud y longitud. La base de la corrección es el mapa IGRF, el cual es actualizado cada 5 años. En regiones de latitud media (entre 30°N y 60°N), el rango del gradiente IGRF típico va de cero a 2nT/km de este-oeste y de 2 a 5nT/km de norte-sur.

**2.7. Procesamiento a los datos magnéticos.** Como hemos mencionado, las anomalías magnéticas contienen los efectos de distintas fuentes (cuerpos someros, intermedios, profundos, ruido, etc.) y el proceso de filtrado nos permite separar sus efectos. Existen diversos filtros, cada uno con su objetivo particular, aunque su propósito común es resaltar las anomalías de interés para obtener información preliminar de la localización de la fuente.

**2.7.1. Derivada vertical.** La primera derivada vertical de la anomalía del campo total es comúnmente usada para determinar las estructuras cercanas a la superficie. Esta puede obtenerse matemáticamente ( $\Delta T' = \partial \Delta T / \partial z$ ) a partir del mapa de anomalías de campo total o bien, a partir de mediciones directas usando un gradiómetro. En este trabajo utilizaremos la derivada vertical para obtener la resolución adecuada de las estructuras arqueológicas a través del mapa de anomalías.

**2.7.2. Reducción al polo.** Una distribución uniforme de material magnético producirá una anomalía sesgada si el campo magnético inductor no es vertical. El procesamiento de reducción al polo (RTP, por sus siglas en inglés) es usado para eliminar de los datos de anomalía magnética, el efecto de distorsión debido a la variación en la inclinación y declinación del vector de magnetización. Este proceso convierte los datos de campo magnético es otros donde la dirección del campo es vertical. Este filtro a los datos, mejora considerablemente la correlación entre las características de la anomalía con las fronteras de las estructuras vistas en planta.

### 3. MÉTODOS ELÉCTRICOS

Los métodos eléctricos **proveen información acerca de la conductividad eléctrica de los materiales en el subsuelo** y su parámetro asociado, la *resistividad*  $\rho$ , que es una medida de la dificultad del flujo de las corrientes eléctricas. En particular, los métodos eléctricos dependen del contraste en las propiedades eléctricas y responden bien en regiones donde el flujo de corriente es difícil, pero pueden ser incapaces de determinar la conductividad con precisión, especialmente de objetivos pequeños. También tienen mejores resultados en estudios relativamente superficiales del subsuelo, ya que por sus características se necesita una gran cantidad de equipo para encontrar buenas resoluciones a grandes profundidades.

**3.1. Ley de Ohm.** Si bien la mayoría de los metales son buenos conductores de electricidad, todos ofrecen cierta oposición a que el flujo de carga eléctrica pase a través de ellos. La rapidez del flujo de la carga eléctrica entre dos puntos depende de la diferencia de potencial que existe entre ellos; esto se conoce como la Ley de Ohm. Matemáticamente, la resistencia de un conductor dado se puede calcular a partir de

$$R = \frac{V}{I}. \quad (4)$$

La unidad de medición de la resistencia es el *ohm*  $\Omega$ .

La ley de Ohm describe un resistor que no tiene dimensiones; en cambio, considerando el flujo de corriente eléctrica en la Tierra, tenemos que considerar el flujo de la corriente eléctrica  $I$  en un volumen finito. Consideremos un cilindro de longitud  $L$  y una sección transversal  $A$  que lleva una corriente  $I$  (Figura 2),



FIGURA 2. Sección transversal  $A$  de un cilindro con una longitud  $L$  por el que fluye una corriente  $I$ .

es decir, tenemos que la resistencia del flujo de la corriente en el cilindro es proporcional a la longitud por el área:

$$R = \rho \frac{L}{A}, \quad (5)$$

donde  $\rho$  es la resistividad eléctrica del material medida en *ohm* por metro ( $\Omega\text{m}$ ). La resistencia es una propiedad inherente al material, por ejemplo, si examinamos dos cilindros del mismo material pero de dimensiones diferentes, ellos tendrán la misma resistividad eléctrica pero diferentes resistencias eléctricas.

La resistividad tiene una enorme amplitud de variación, por ejemplo, la resistividad del cuarzo es superior a la del grafito en 20 órdenes de magnitud.

**3.2. Resistividad en el subsuelo.** En la exploración geoelectrica, las corrientes utilizadas no recorren conductores lineales tal como lo hacen en las instalaciones de los edificios, casas o en los aparatos eléctricos; la gran diferencia es que se mueven en medios tridimensionales y casi nunca planos, por lo que para hacer el problema más sencillo desde el punto de vista matemático, tenemos que simplificar las condiciones reales, haciendo la suposición principal de que el subsuelo se divide en varias capas de diferente material y en cada una la resistividad es constante, separadas entre sí por superficies planas. Comenzaremos analizando el caso más simple de esta suposición, en el que el subsuelo se supone constituido por un semiespacio homogéneo.

*3.2.1. Resistividad en un semiespacio homogéneo.* n condiciones ideales, la resistividad eléctrica de una roca puede medirse simplemente colocando placas que funcionan como electrodos en cada lado de la roca, con esta geometría nos basta utilizar la ley de Ohm (4) para calcular la resistividad  $\rho$  de la resistencia medida  $R$ ; sin embargo, en el terreno esta aproximación no es práctica pues no podemos utilizar placas de gran tamaño para inyectar corriente eléctrica; por lo tanto, se utiliza otra geometría que nos permite medir la resistividad sin necesidad de tener condiciones tan limitantes, por lo que nos ayudamos considerando el flujo de corriente eléctrica de un simple electrodo de metal. Supongamos que introducimos una corriente de intensidad  $I$  en el suelo en un punto  $A$  como podemos ver en la Figura 3. Mediante la ley de Ohm (4), calculamos la resistencia  $R$  que se opone al paso de corriente en una semiesfera de radio  $r$  y espesor  $dr$ . Aplicando (5) tenemos:

$$R = \rho \frac{dr}{2\pi r^2}, \quad (6)$$

aplicando (4) en la expresión anterior:

$$-dV = RI, \quad (7)$$

rearrreglando las dos ecuaciones anteriores resulta:

$$-dV = \rho \frac{dr}{2\pi r^2} I. \quad (8)$$



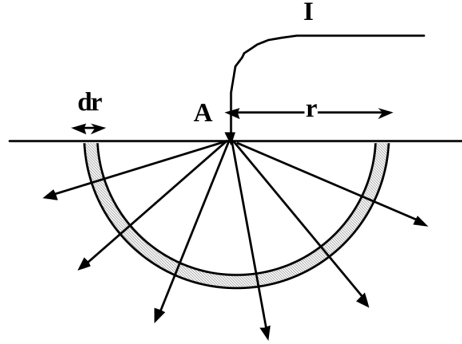


FIGURA 3. Semiespacio esférico con una resistencia  $r$  en el que se inyecta una corriente  $I$  en un punto  $A$ .

Para integrar (8), aplicamos la condición de frontera tal que  $V \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$  e integrando tenemos:

$$V = -\rho \frac{I}{2\pi} \int_r^\infty \frac{1}{s^2} ds = \rho \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} \right]_r^\infty = \rho \frac{I}{2\pi r}. \quad (9)$$

Las superficies equipotenciales serán semiesferas centradas en el electrodo. Nótese que una corriente eléctrica es perpendicular al equipotencial.

En el caso que nos compete, para inyectar  $I$  debe existir otro electrodo  $B$ , en este arreglo medimos el potencial en un punto  $M$  cualquiera en el semiespacio, por lo que éste será igual al producido en el electrodo  $A$  menos el producido por el electrodo  $B$  (Figura 4). Utilizando estas condiciones en (9), obtenemos el potencial en el punto  $M$ :

$$V_M = \frac{\rho I}{2\pi AM} - \frac{\rho I}{2\pi BM}. \quad (10)$$

En la exploración geoelectrica, no medimos el potencial en un punto debido a que situar uno de los polos del voltímetro en el infinito, sino que es más adecuado medir la diferencia de potencial entre dos puntos dentro de la línea formada por los puntos  $A$  y  $B$ . Modificando la ecuación (10) de acuerdo con el nuevo punto de medición (Figura 5) tenemos:

$$V_N = \frac{\rho I}{2\pi AN} - \frac{\rho I}{2\pi BN}. \quad (11)$$

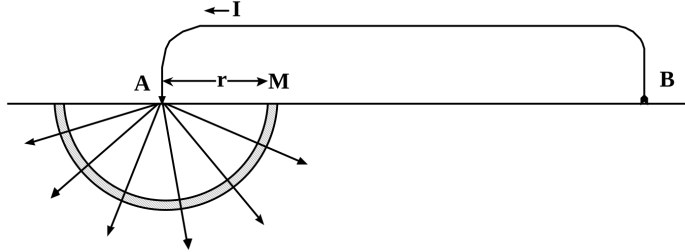


FIGURA 4. Potencial entre los electrodos A y B medido en un punto M de un semiespacio.

Por lo tanto, utilizando (10) y (11) para expresar la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre los dos puntos M y N resulta:

$$V_M - V_N = \rho \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right), \quad (12)$$

despejando la resistividad  $\rho$  tenemos:

$$\rho = \frac{\Delta V}{I} \frac{2\pi}{\left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right)}, \quad (13)$$

que es otra forma de expresar a la Ley de Ohm. Podemos expresar el segundo término del lado derecho de la ecuación (13) como K, por lo tanto:

$$\rho = \frac{\Delta V}{I} K, \quad (14)$$

donde K se denomina *coeficiente* o *factor geométrico* del arreglo, porque depende solamente de las distancias entre los cuatro electrodos. Los valores de K se pueden calcular de antemano de acuerdo con las distancias determinadas. Esta ecuación muestra cómo se puede calcular la resistividad  $\rho$  del subsuelo, mediante la medición de  $\Delta V$ , la corriente I y el espaciado de los electrodos. Anteriormente, hemos supuesto que el subsuelo tiene una composición uniforme, por lo que la resistividad  $\rho$  es igual en todos los puntos sin importan el lugar donde se tomen las mediciones. Sin embargo, el subsuelo pocas veces es uniforme y con ello la resistividad  $\rho$  es variable, por lo que la resistividad obtenida en las diferentes exploraciones es un valor promedio de toda la región en la que fluya la corriente. Este promedio de resistividad es denominado *resistividad aparente*,  $\rho_a$ .

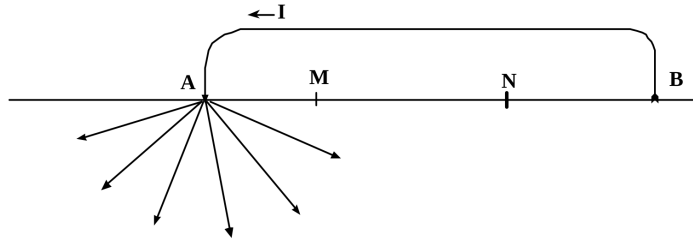


FIGURA 5. Arreglo geométrico para medir la diferencia de potencial entre los puntos  $M$  y  $N$  en el semiespacio con los puntos  $A$  y  $B$ .

**3.2.2. Profundidad de penetración.** La distancia entre los electrodos controla las características en profundidad de la medición. La Figura 6 nos muestra una sección transversal de la distribución del flujo de corriente a través de un semiespacio. Los números en las líneas muestran el porcentaje de la corriente total que fluye encima de la línea. La línea del 50% tiene una profundidad máxima igual a la mitad de la longitud del dipolo de corriente ( $X_{AB}$ ) y casi el 90% de la corriente fluye por encima de una profundidad igual a tres veces la longitud del dipolo. La pseudo profundidad que tenemos para una lectura depende del arreglo geométrico y la separación de los electrodos; incrementando la separación de los electrodos alrededor de un mismo punto, el sondeo vertical es una representación de la variación vertical de las propiedades eléctricas del subsuelo. Hay tres opciones para lograr lo anterior: aumentando la separación de los dipolos de corriente y potencial, incrementando la longitud de ambos dipolos o la más usual, incrementando sólo la longitud del dipolo de corriente.

**3.3. Sondeos geoelectricos.** El subsuelo se compone de diferentes estructuras que tienen diferentes resistividades, como se ha mencionado, la medida que realizamos de resistividad en cada exploración no pertenece a ninguna de ellas, sino que es un valor promedio de todas las estructuras. Los métodos más comunes para realizar sondeos del subsuelo son tres: el Sondeo Eléctrico Vertical (SEV), las Calicatas Eléctricas y la Tomografía Eléctrica. Antes de dar un pequeño bosquejo de la técnica que nos ocupa en este curso, que es la Tomografía Eléctrica, necesitamos conocer los arreglos eléctricos que son la base de la técnica.

Existen varios arreglos de electrodos utilizados para la exploración geoelectrica. La diferencia fundamental entre ellos radica en la diferencia de la constante geométrica.

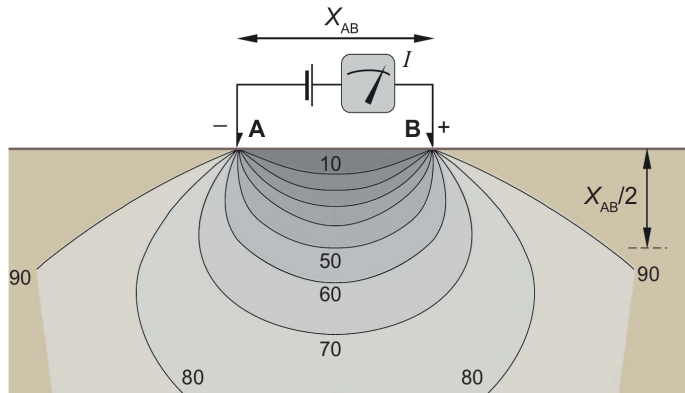


FIGURA 6. Diagrama de la distribución de la corriente en un semiespacio de un dipolo. Un dipolo de corriente de longitud  $X_{AB}$ . Los números en las líneas muestran el porcentaje del flujo de corriente encima de una profundidad dada. Tomado de Dentith y Mudge (2014).

Algunos de los arreglos geométricos son: Wenner, Wenner beta, Wenner gamma, Polo-Polo, Dipolo-Dipolo, Polo-Dipolo, Schlumberger y Dipolo-Dipolo ecuatorial. En este apartado nos centraremos en el arreglo Wenner y el dipolo-dipolo, por ser los más comúnmente usados en la tomografía.

**3.3.1. Arreglo Wenner.** Es una configuración en la que los electrodos de potencial y corriente, se ponen en línea recta con un espaciado  $a$  entre los electrodos como vemos en la Figura 7.

La distancia entre los electrodos es igual  $AM = MN = NB = a$ . Si movemos  $A$  y  $B$ , también tenemos que mover  $M$  y  $N$ .

El arreglo Wenner tiene un coeficiente geométrico  $K = 2\pi a$ , que es el menor coeficiente para otras configuraciones, es decir, este arreglo tiene una fortaleza significativa de la señal. Esto puede ser importante si la exploración se realiza en áreas con un ruido de fondo alto.

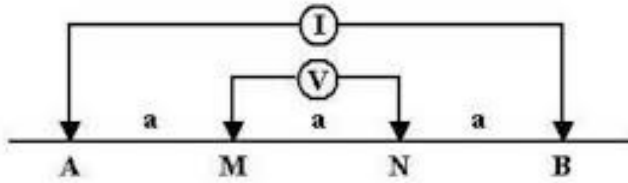


FIGURA 7. Esquema del arreglo Wenner para la prospección geoelectrica. La distancia entre los electrodos  $a$  es la misma para cada electrodo y varía para cada medición.

3.3.2. *Arreglo dipolo-dipolo.* En la configuración dipolo – dipolo los electrodos de potencial están alejados de los de corriente, existiendo entre cada uno de ellos una separación igual.

Si la distancia entre los dos pares es grande, la fuente de corriente puede tratarse como un dipolo eléctrico. La ecuación de resistividad es

$$\rho_a = \pi n(n + 1)(n + 2)a \frac{\Delta V}{I}. \tag{15}$$

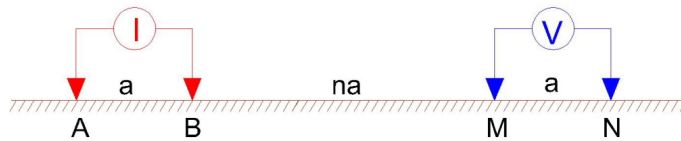


FIGURA 8. Esquema del arreglo dipolo-dipolo para la prospección geoelectrica. La distancia  $a$  es la misma para cada par de electrodos y varía para cada medición.

**3.4. Tomografía eléctrica.** La tomografía eléctrica es un método de resistividad multielectródico basado en la modelización 2-D de la resistividad del terreno mediante el empleo de técnicas numéricas. Se aplica mayoritariamente para inspeccionar las

capas más superficiales del subsuelo; el objetivo de este método se basa en obtener una sección 2-D de resistividades reales del subsuelo. Proporciona una imagen muy detallada del subsuelo, ya que los electrodos suelen colocarse más juntos como se muestra en la Figura 9.

La tomografía eléctrica tiene como objetivo principal el obtener la distribución de la resistividad eléctrica en el subsuelo, tanto lateralmente como en profundidad. El método permite inferir cuerpos o estructuras que están en el subsuelo y que presentan un valor de resistividad distinto al del medio que los rodea.

En líneas generales, el método de tomografía resistiva consiste en introducir en el terreno una corriente eléctrica de intensidad conocida, a través de unos electrodos clavados equidistantemente a lo largo de una línea, conocida como *perfil o sección*. A partir de la intensidad de esta corriente y de la diferencia de potencial observada (medida), el instrumento proporciona el valor de una resistividad aparente (llamada así porque no es la resistividad real) en puntos situados a lo largo del perfil de observación y a distintas profundidades. Posteriormente, se lleva a cabo la inversión numérica de la resistividad aparente para obtener la distribución de la real.

Los instrumentos actuales, conocidos como resistímetro, inyectan una corriente, miden una diferencia de potencial, y con las distancias entre electrodos, calculan la resistividad aparente.

Además de estudios a lo largo de un perfil (2D), también se pueden realizar estudios 3D, en cuyo caso las observaciones se realizan en perfiles paralelos equidistantes, definiendo una cuadrícula.

La tomografía eléctrica es una técnica geofísica aplicada en estudios de geología, geotecnia y geohidrología, a la ingeniería y en exploración de recursos naturales, y ha sido muy exitosa en la localización de estructuras arqueológicas, ya que permite determinar las variaciones de resistividad y conductividad eléctrica de las rocas y suelos.

#### 4. REFRACCIÓN SÍSMICA

Gran parte del conocimiento del interior de la Tierra se lo debemos a los métodos sísmicos, con ellos se pudo confirmar que el núcleo externo de la Tierra es líquido, y que el núcleo interno es sólido, además se pudo identificar las capas internas de la Tierra como la corteza y el manto. Adicionalmente los métodos sísmicos son los principales para la búsqueda de hidrocarburos por su alta resolución para identificar estructuras geológicas.

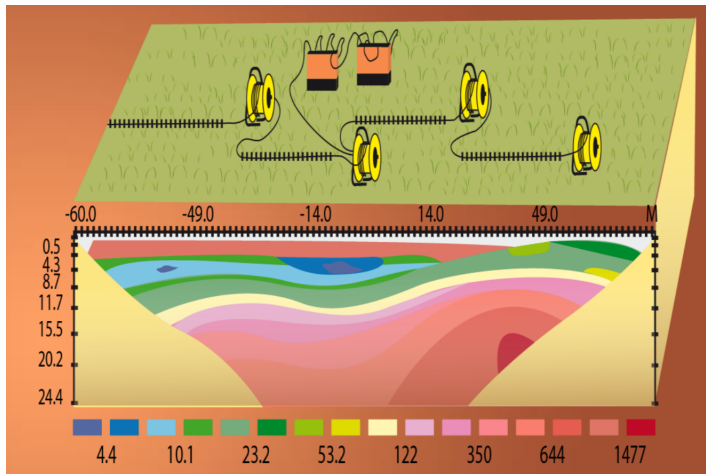


FIGURA 9. Diagrama de una tomografía eléctrica, mostrando el arreglo electrónico y una imagen de los datos de la misma.

A una escala menor en comparación a la Tierra, estos métodos son usados para obras civiles, como encontrar el basamento para colocar los pilares de un edificio, o conocer que tan rígido es un suelo para planear que tanta carga puede soportar; también nos permiten estimar cuál es el periodo fundamental de vibrar del suelo y así poder construir edificios con un periodo diferente, esto con el fin de evitar que se presente el fenómeno de resonancia sísmica.

Actualmente los métodos sísmicos han sido usados para determinar las variaciones en el nivel y el flujo de agua de un río, se ha descubierto que existe una correlación entre el aumento del nivel de agua en el río y el aumento del ruido sísmico registrado por un sismómetro cercano al cauce. También se ha encontrado que las tormentas tropicales y los huracanes tienen su señal característica en los registros sísmicos, por lo que se ha empezado a analizar los registros sísmicos históricos (desde 1900) en la búsqueda de fenómenos climáticos. Estas aplicaciones sísmicas son solo algunas de la gran variedad que existe.

De los distintos métodos sísmicos descritos anteriormente para estudiar el interior de la Tierra desarrollaremos el de refracción sísmica en este trabajo, para tal fin solo necesitamos conceptos básicos de física, funciones trigonométricas y geometría

Para estudiar el interior de la Tierra en sismología utilizamos las ondas sísmicas, estas son ondas elásticas que viajan en el interior de la Tierra, son provocadas por la liberación súbita de energía, la fuente puede ser natural como un terremoto, explosión volcánica, la caída de un meteorito; o artificial como la explosión de una bomba atómica, el golpe de un pistón hidráulico o un marro. Las ondas sísmicas se dividen en dos categorías, ondas de cuerpo y superficiales. Las ondas de cuerpo viajan por el interior y en la superficie de la Tierra, y existen dos tipos de ondas de cuerpo, la onda P (primaria) es la más rápida de todas las ondas y es la primera en llegar a un punto de interés, puede viajar por cualquier medio (líquido, sólido, y hasta por el aire), también son llamadas ondas compresionales o longitudinales, comprimen y expanden el medio que atraviesan en la dirección de viaje, su velocidad depende del material por el que viajen pero un valor promedio es de 6km/s. La otra onda de cuerpo la onda S (secundaria) y los dos tipos de onda superficial no serán vistos aquí, ya que la refracción sísmica solo utiliza los primeros arribos (ondas P).

La manera para comprobar la existencia de las ondas sísmicas es a partir de los sismómetros, estos son instrumentos muy sensitivos que pueden detectar movimientos de la superficie de la Tierra, la amplitud de estos movimientos oscila de micrómetros hasta centímetros, el principio del sismómetro es la inducción magnética (Figura 10), el movimiento de una masa inercial con una bobina adjunta en un campo magnético (imán) induce una corriente eléctrica proporcional al movimiento de la masa.

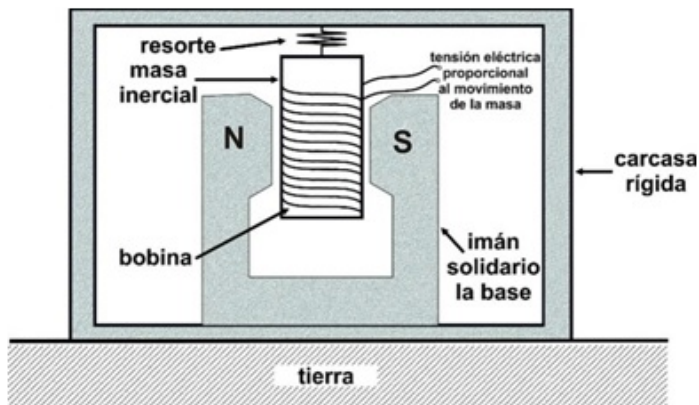


FIGURA 10. Principio de funcionamiento de un sismómetro.



Los sismómetros miden el movimiento del suelo en tres componentes (dirección norte-sur, este -oeste, y en la vertical), la gran variedad de instrumentos existentes en el mercado se diferencian básicamente por su sensibilidad, y obviamente entre más sensibles más costosos son, adicionalmente su implementación es más complicada. Como en refracción sísmica nos interesa solo los primeros arribos, es práctica común solo utilizar instrumentos (geófonos) que midan solo la componente vertical (Figura 11) y que detecten movimientos con frecuencias mayores o iguales a 10Hz.



FIGURA 11. Geófono.

Ahora comencemos a analizar cómo es la propagación de las ondas P en un medio homogéneo con dos capas, con velocidad constante (Figura 12).

Supongamos que golpeamos el suelo de nuestro modelo con un marro, esto generará varias ondas P pero en este caso solo nos concentraremos en una sola (Figura 13).

La onda viajará hasta encontrarse el límite o interface entre las dos capas, en este punto la onda puede reflejarse, refractarse o ambas, este cambio en la dirección de las ondas es descrito por la bien conocida Ley de Snell utilizada en óptica. Para deducir esta ley podemos usar geometría de rayos simple y el principio de Fermat. Considerando de nuevo un modelo homogéneo del subsuelo con dos capas y velocidades constantes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  (Figura 14), un rayo sale del punto P en la primer capa con velocidad

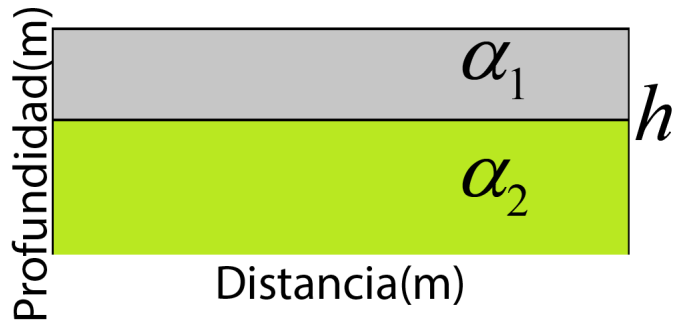


FIGURA 12. Modelo homogéneo del subsuelo con dos capas,  $\alpha_1, \alpha_2$  son las velocidades de cada capa, y  $h$  es el grosor de la primera capa.

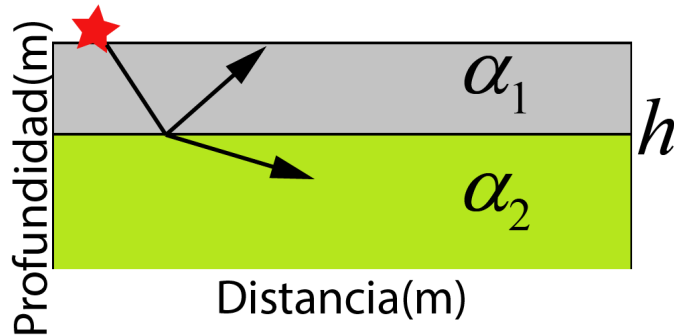


FIGURA 13. Modelo homogéneo del subsuelo con dos capas,  $\alpha_1, \alpha_2$  son las velocidades de cada capa, y  $h$  es el grosor de la primera capa, la estrella representa la fuente sísmica artificial, y las líneas representan ondas P.

$\alpha_1$ , ¿Cuál es el camino que tomará el rayo para llegar al punto P' en la segunda capa con velocidad  $\alpha_2$ ?

El tiempo de viaje del camino de P a P' es dado por

$$T_{P,P'} = \frac{d}{\alpha_1} + \frac{e}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{\alpha_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{\alpha_2}. \quad (16)$$

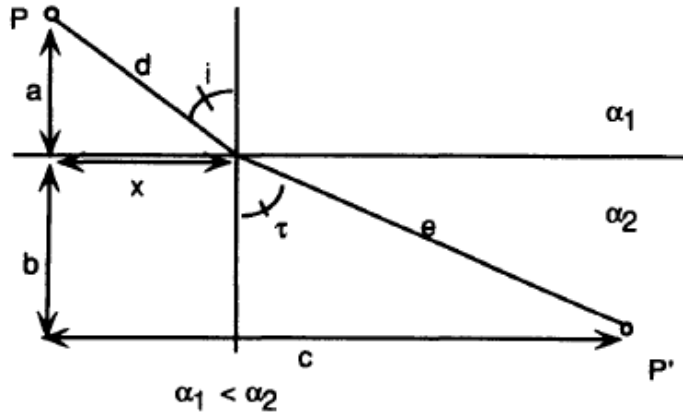


FIGURA 14. Modelo homogéneo del subsuelo con dos capas.

El camino del tiempo mínimo debe satisfacer  $dT/dx = 0$ , lo cual implica

$$\frac{dT}{dx} = 0 = \frac{x}{\alpha_1 \sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{c - x}{\alpha_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}}; \quad (17)$$

note que  $x/\sqrt{a^2 + x^2} = \sin i$ , y  $(c - x)/\sqrt{b^2 + (c - x)^2} = \sin \tau$ . Así que

$$\frac{\sin i}{\alpha_1} = \frac{\sin \tau}{\alpha_2}. \quad (18)$$

Finalmente, la ecuación (18) es la Ley de Snell.

Supongamos que realizamos un golpe con un marro en nuestro modelo de dos capas, de los miles de rayos generados solo consideraremos 3 (Figura 15) el rayo directo, el reflejado, y el refractado; y utilizando la geometría de la Figura 15 y las velocidades  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  podemos deducir las expresiones para el tiempo de viaje de cada una de los tres rayos.

Para estimar el tiempo de viaje del rayo directo podemos usar la fórmula clásica de la velocidad  $v = d/t$ , donde  $d$  es distancia,  $t$  es tiempo, y  $v$  la velocidad. De aquí despejamos el tiempo  $t = d/v$ , así que sustituyendo la velocidad y distancia correspondiente obtenemos

$$T_D(x) = \frac{x}{\alpha_1}. \quad (19)$$

Para la onda reflejada primero calculamos la primera mitad del camino utilizando el teorema de Pitágoras

$$\sqrt{h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}, \quad (20)$$

por lo que el camino total del rayo reflejado será el doble de (20), ahora sustituyendo la distancia calculada y la velocidad podemos obtener el tiempo de viaje de la onda reflejada

$$T_{\text{Reflejada}}(x) = \frac{2\sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}}{\alpha_1}. \quad (21)$$

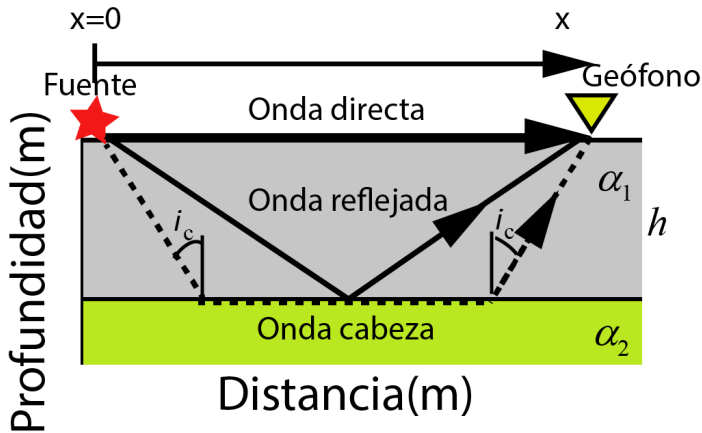


FIGURA 15. Modelo homogéneo del subsuelo con dos capas y considerando solo 3 rayos.

Para obtener el tiempo del rayo refractado u onda cabeza, calculamos la distancia de los tres segmentos haciendo uso de la definición de coseno, realizando el álgebra correspondiente debemos obtener la siguiente expresión

$$T_{\text{Refractada}}(x) = \frac{x}{\alpha_2} + 2h \left( \frac{1}{\alpha_1 \cos(i_c)} - \frac{\tan(i_c)}{\alpha_2} \right). \quad (22)$$

Ya que el ángulo crítico satisface  $\sin(i_c) = \alpha_1/\alpha_2$ , podemos simplificar (22) usando las identidades trigonométricas  $\cos(i_c) = (1 - \sin^2(i_c))^{1/2} = (1 - \alpha_1^2/\alpha_2^2)^{1/2}$  y  $\tan(i_c) = \frac{\sin(i_c)}{\cos(i_c)} = \frac{\alpha_1/\alpha_2}{(1 - \alpha_1^2/\alpha_2^2)^{1/2}}$ , obteniendo

$$T_{\text{Refractada}}(x) = \frac{x}{\alpha_2} + 2h \left( \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_2^2} \right)^{1/2} = \frac{x}{\alpha_2} + \tau_1, \quad (23)$$

donde  $\tau_1 = 2h \left( \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_2^2} \right)^{1/2}$ . La Figura 16 muestra la gráfica de los tiempos de recorrido teóricos de los tres rayos.

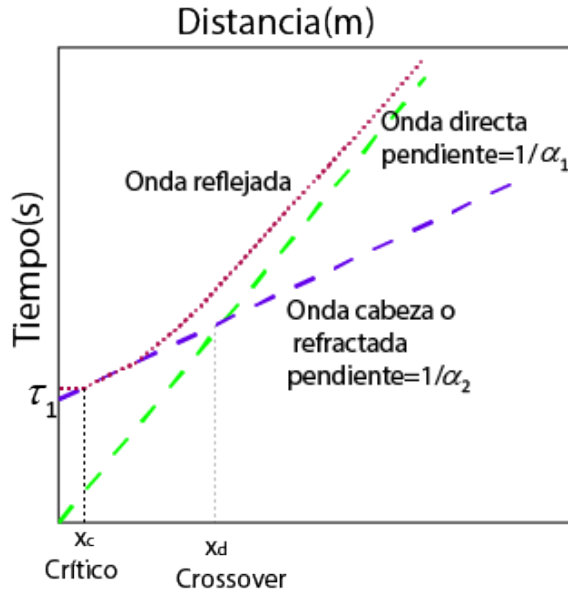


FIGURA 16. Curvas de tiempo de los tres rayos, también son conocidas como dromocronas.

La distancia crossover donde se interceptan la onda directa y la cabeza puede ser calculada si igualamos  $T_D(x) = T_{\text{Refractada}}(x)$ ;  $x_D = 2h \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^{1/2}$ ; de esta expresión podemos calcular el grosor de la primera capa  $h$ .

Acabamos de deducir los tiempos de viaje teóricos y algunas otras expresiones que podemos usar para calcular el grosor de las capas. Pero en la práctica se vuelve un poco más complicado. Primero desplegamos los geófonos disponibles en una línea recta, posteriormente generamos ondas golpeando el suelo con un martillo, los geófonos registrarán las llegadas de la ondas (Figura 17), lo complicado es identificar los primeros arribos lo cual se logra con la experiencia, el siguiente paso es graficar solo los primeros arribos para identificar las líneas de las diferentes ondas, definidas las líneas de la onda directa y cabeza calculamos su pendiente para obtener las velocidades  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , finalmente podemos obtener el grosor de la primer capa utilizando la distancia crossover ( $x_D$ ).

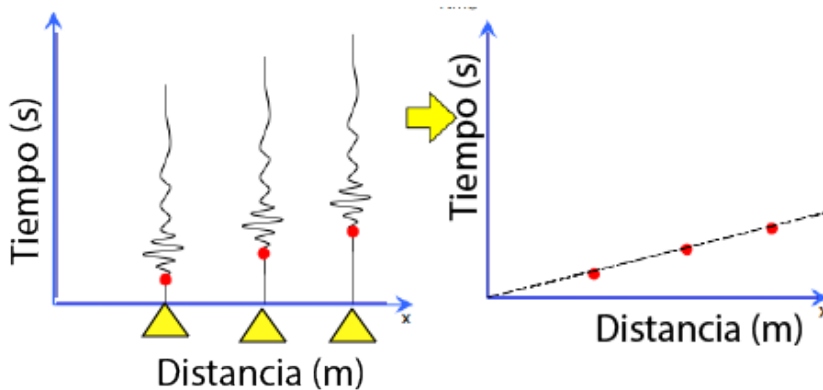


FIGURA 17. Obtención de datos, los triángulos amarillos representan los geófonos, puntos rojos indican los primeros arribos de las ondas.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad de Guadalajara, especialmente al Departamento de Matemáticas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías y al Departamento de Ciencias Naturales del Centro Universitario de los Valles por proveer el espacio y recursos necesarios para la elaboración de este trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] Blakely, R. Potential theory in gravity and magnetic applications. (Cambridge university press, 1996)
- [2] Dentith, M. & Mudge, S. Geophysics for the mineral exploration geoscientist. (Cambridge University Press, 2014)
- [3] Griffiths, D. & King, R. Applied geophysics for geologists and engineers: the elements of geophysical prospecting. (Elsevier, 2013)
- [4] Auge, M. Métodos geoeléctricos para la prospección de agua subterránea. (2008)
- [5] Kalenov, E. Interpretación de curvas de sondeos eléctricos verticales. (Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo, Secretaría General Técnica, Centro de Publicaciones, 1987)
- [6] Orellana, E. Prospección Geoeléctrica en Corriente Continua: Madrid. *España, Editorial Paraninfo*. (1972)
- [7] P. E. Orozco, A. Física: conceptos y aplicaciones. *McGraw-Hill*. (2007)
- [8] Universidad de Salamanca (s.f.) Prospección geofísica: Sondeos Eléctricos Verticales., <https://hidrologia.usal.es/temas.html>
- [9] Zhdanov, M. Geophysical electromagnetic theory and methods. (Elsevier, 2009)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL Y TOPOGRAFÍA, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN #1421, ESQ CALZADA OLÍMPICA, C.P. 44430, GUADALAJARA, JALISCO, MÉXICO.

*E-mail address:* miguel.alatorre@academicos.udg.mx

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES, CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, CARRETERA GUADALAJARA - AMECA Km. 45.5, C.P. 46600, AMECA, JALISCO, MÉXICO.

*E-mail address:* nestor.delgadillo@academicos.udg.mx

*E-mail address:* paul.calderon@academicos.udg.mx

*E-mail address:* quiriati.gutierrez@academicos.udg.mx

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN #1421, ESQ CALZADA OLÍMPICA, C.P. 44430, GUADALAJARA, JALISCO, MÉXICO.

*E-mail address:* emilia.fbecerra@academicos.udg.mx

*E-mail address:* ignacio.becerra@academicos.udg.mx

*E-mail address:* edgar.guerrero@academicos.udg.mx

*E-mail address:* abel.palafx@academicos.udg.mx

*E-mail address:* antonio.licea@academicos.udg.mx





## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA DISPERSIÓN DE CONTAMINANTES: TEORÍA, IMPLEMENTACIÓN Y APLICACIONES**

FEDERICO ANGEL VELÁZQUEZ MUÑOZ, DIEGO ARMANDO PANTOJA GONZÁLEZ,  
TZITLALI GASCA ORTIZ, JORGE MANUEL MONTES ARÉCHIGA, NÉSTOR GARCÍA CHAN

**RESUMEN.** En este trabajo se presentan técnicas numéricas para abordar el problema de la dispersión de contaminantes en cuerpos de agua en diferentes escalas de longitud. Así se presentan modelos matemáticos aplicados a lagos, ríos e incluso océanos. Para esto se presentan las ecuaciones en derivadas parciales del transporte, haciendo énfasis en su interpretación física. Posteriormente, su discretización numérica basada en diferencias finitas es formulada para los casos 1D y 2D. Finalmente diferentes aplicaciones son mostradas en diferentes escenarios donde se simula numéricamente la dispersión de contaminantes usando para esto tanto software científico como código de elaboración propia.

**ABSTRACT.** In this paper, numerical techniques are formulated to show the pollutant dispersion in water bodies in different length scales. Thus the presented models are applied to simulate the pollutant dispersion in lagoons, rivers, and oceans. To do it, we showed the partial differential equations related to transport and highlighted its physical interpretation. Later, its numerical discretization based on finite differences was formulated for 1D and 2D cases. Finally, applications in different realistic domains are shown where the pollutant dispersion is simulated using both software and our own code programming in scientific software.

---

*2000 Mathematics Subject Classification.* 35K05.

*Palabras Claves.* Diferencias finitas, Dispersión de contaminantes, simulación numérica.

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema de la dispersión de contaminantes en la atmósfera y en cuerpos de agua es un tema de estudio importante para mitigar los efectos dañinos al medio ambiente. La dispersión de una sustancia (contaminante) se puede dar a través de dos procesos físicos, uno es la difusión y el otro es la advección. Considere que la atmósfera o un cuerpo de agua, que puede ser desde un río o lago hasta un océano, son un medio donde se va a dispersar la sustancia. Entonces, debe existir una fuente desde donde se vierte la sustancia o una descarga momentánea. El proceso de difusión consiste en que la sustancia se propague de forma molecular en el medio. También es importante considerar que en la atmósfera y en estos cuerpos de agua el fluido se mueve, lo cual ayuda a dispersión de la sustancia, siendo este un proceso de advección. Algunos ejemplos de

**Marco Teórico.** En esta sección se presentan las ecuaciones que describen el proceso de dispersión de una sustancia por difusión y advección. Considere una sustancia que se representa mediante su concentración ( $c$ ). En general, esta concentración es una variable escalar que depende de las tres coordenadas espaciales ( $x, y, z$ ) y del tiempo  $t$ , de tal forma que se puede escribir como  $c(x, y, z, t)$  y tienen dimensiones de masa por unidad de volumen, por lo que sus unidades pueden ser  $\text{gr cm}^{-3}$  o  $\text{kg m}^{-3}$ , etc.

La ecuación que describe el fenómeno de difusión es

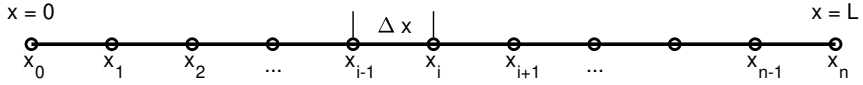
$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( A \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (1)$$

donde  $A$  es el coeficiente de difusión que se obtiene de forma experimental y tienen unidades de  $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$  o  $\text{m}^3 \text{h}^{-1}$ , etc. Este coeficiente representa la cantidad de una determinada sustancia que se difunde por unidad de área o volumen en 1 segundo. Es importante mencionar que para este trabajo este coeficiente se considera constante en todas direcciones, pero puede ser variable en tiempo y espacio.

Por otra parte, la advección de una sustancia que se encuentra en un fluido es un proceso que se puede describir con la siguiente ecuación

$$\frac{\partial c}{\partial t} = u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} \quad (2)$$

En este caso, la ecuación incluye las variables que representan a las componentes de velocidad ( $u, v, w$ ) del fluido.

FIGURA 1. Discretización del dominio a lo largo del eje  $x$  en  $[0, L]$ 

**Discretización de ecuaciones.** Para resolver las ecuaciones de difusión y advección de forma numérica, primero se tienen que discretizar las ecuaciones. En la figura 1 se muestra una línea a lo largo del eje  $x$  con longitud  $L$ , sobre el cual se definen una serie de puntos llamados nodos que tienen coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . La separación entre nodos es la misma y es igual a  $\Delta x$ . Al seguir la definición de derivada, se puede discretizar  $f'(x)$  por diferencias finitas, que se expresa como:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3)$$

para diferencias adelantadas,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (4)$$

para diferencias atrasadas, y

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (5)$$

para diferencias centradas. Para términos con derivada de segundo orden o la segunda derivada de la función  $f(x)$  por diferencias finitas se tiene:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (6)$$

para diferencias centradas.

**Modelación 1D.** Para usar los esquemas de diferencias finitas en un programa de cómputo se debe cambiar la representación matemática de las variables como la concentración, que es  $c(x, t)$  por  $c(x_i, t_k)$  para representar a la variable de forma discreta. También se puede representar como  $c(i, k)$  ó  $c_{i,k}$ . Esto quiere decir que únicamente se van tener valores de la concentración sólo en unos puntos del dominio.

Al considerar la ecuación (1) en una dimensión y que el coeficiente de difusión  $A$  es constante, se tiene que la derivada en tiempo está dada por

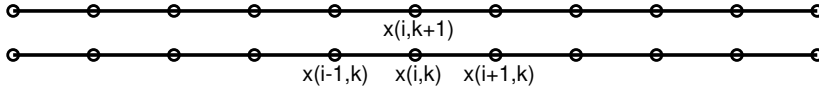


FIGURA 2. esquema ilustrativo de los nodos relativos a la ecuación (10)

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx \frac{c(i, k+1) - c(i, k)}{\Delta t} \quad (7)$$

y para la segunda derivada en  $x$ , es

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \approx \frac{c(i+1, k) - 2c(i, k) + c(i-1, k)}{\Delta x^2} \quad (8)$$

De tal forma que se obtiene la expresión para la ecuación (6),

$$\frac{c(i, k+1) - c(i, k)}{\Delta t} = A \frac{c(i+1, k) - 2c(i, k) + c(i-1, k)}{\Delta x^2} \quad (9)$$

de esta forma se puede despejar el único valor de la concentración que no es conocido, obteniéndolo

$$c(i, k+1) = c(i, k) + A\Delta t \frac{c(i+1, k) - 2c(i, k) + c(i-1, k)}{\Delta x^2} \quad (10)$$

En este esquema, la variable con índice  $k$  corresponde a un tiempo a partir del cual se van a calcular los valores en el siguiente tiempo  $k+1$ , es decir,  $t + \Delta t$ . En la figura 2 se muestra un esquema de los nodos en  $k$  que se requieren para calcular valores en  $k+1$ .

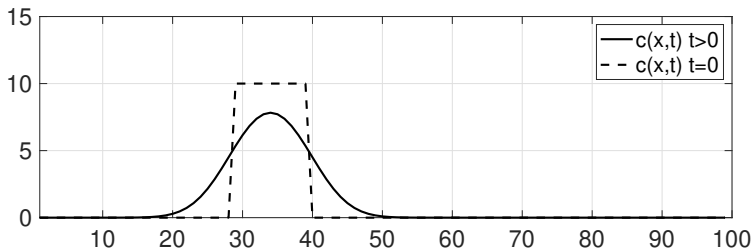


FIGURA 3. Solución numérica de la ecuación de difusión

Para la ecuación de advección (2), la discretización se puede hacer al aplicar las diferencias adelantadas para el término temporal, dadas por

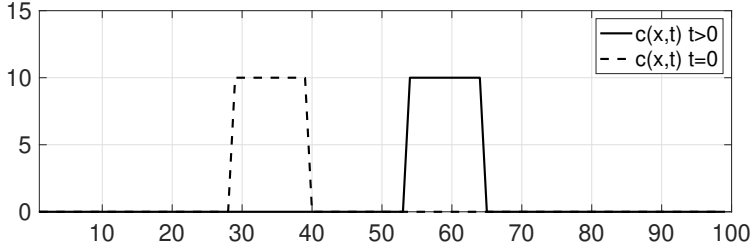


FIGURA 4. solución numérica de la ecuación de advección

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx \frac{c(i, k+1) - c(i, k)}{\Delta t} \quad (11)$$

y para la derivada en  $x$ , las diferencias son

$$\frac{\partial c}{\partial x} \approx u(i, k) \frac{c(i+1, k) - c(i, k)}{\Delta x} \quad (12)$$

cuando la velocidad es hacia la izquierda (dirección  $x$  negativa) y

$$\frac{\partial c}{\partial x} \approx u(i, k) \frac{c(i, k) - c(i-1, k)}{\Delta x} \quad (13)$$

cuando la velocidad es hacia la derecha (dirección  $x$  positiva).

Al considerar el caso en que la velocidad  $u$  es positiva, se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{c(i, k+1) - c(i, k)}{\Delta t} = u(i, k) \frac{c(i, k) - c(i-1, k)}{\Delta x} \quad (14)$$

para la ecuación (6), de tal forma que se puede despejar el único valor de la concentración que no es conocido y se obtiene

$$c(i, k+1) = c(i, k) + \Delta t u(i, k) \frac{c(i, k) - c(i-1, k)}{\Delta x} \quad (15)$$

Los resultados de las simulaciones se muestran a continuación. Para ambos casos la condición inicial es una concentración de 10 unidades entre los valores de  $x$  de 30

y 40, que se indica con una línea discontinua. En el caso de la difusión (figura 3) la línea continua representa la solución después de un tiempo en que la concentración se comienza a repartir a los largo del eje  $x$ .

Para el caso de la advección (figura 4) la forma de la condición inicial se mantiene y lo que muestra la solución (línea negra) es que la concentración se desplaza en la dirección de la velocidad, que en este ejemplo es hacia la derecha.

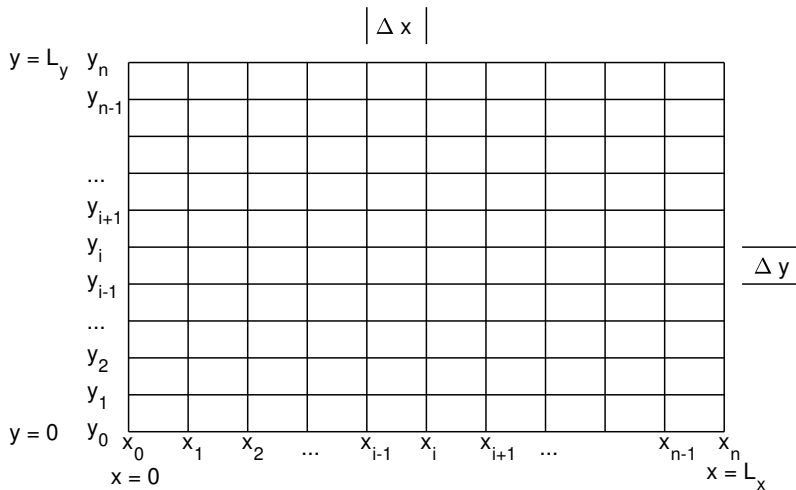


FIGURA 5. Discretización del dominio a lo largo del eje  $x$  en  $[0, L_x]$  y a lo largo del eje  $y$  en  $[0, L_y]$

**Modelación 2D.** Para la implementación de modelos de difusión y advección en 2D se requiere discretizar el dominio con coordenadas  $(x, y)$ . En este caso, el dominio está definido para  $x$  en  $[0, L_x]$  y para  $y$  en  $[0, L_y]$ , como se puede ver en la figura 5. En este caso el número de nodos ( $n$ ) en las dos dimensiones es el mismo, pero puede ser distinto cuando sea necesario.

Al seguir los pasos anteriores para discretizar las ecuaciones de difusión y advección en 1D, se usan las aproximaciones en diferencias finitas y se obtienen los siguientes esquemas para la difusión

$$\begin{aligned}
c(i, j, k + 1) = & c(i, j, k) + \\
& A\Delta t \frac{c(i + 1, j, k) - 2c(i, j, k) + c(i - 1, j, k)}{\Delta x^2} + \\
& A\Delta t \frac{c(i, j + 1, k) - 2c(i, j, k) + c(i, j - 1, k)}{\Delta y^2}
\end{aligned} \tag{16}$$

y para la advección

$$\begin{aligned}
c(i, j, k + 1) = & c(i, j, k) + \\
& \Delta t u(i, j, k) \frac{c(i, j, k) - c(i - 1, j, k)}{\Delta x} + \\
& \Delta t v(i, j, k) \frac{c(i, j, k) - c(i, j - 1, k)}{\Delta y}
\end{aligned} \tag{17}$$

Se recomienda al lector que haga el ejercicio de discretizar las ecuaciones de difusión (ecuación 1) y de advección (ecuación 2) hasta obtener los resultados anteriores.

En el siguiente ejemplo se muestra el caso para la difusión de una sustancia que se libera en el nodo con coordenadas (30, 30). Esto quiere decir que la condición inicial es dada por un valor mayor de la concentración  $c$  en este nodo y un valor de cero en el resto de los nodos del dominio.

Para la solución del problema de difusión (figura 6) se obtienen círculos concéntricos de concentración de la sustancia. Conforme transcurre el tiempo de la simulación, los círculos aumentan en radio, pero el valor de concentración disminuye porque la sustancia se distribuye en un área mayor.

Ahora se muestra un ejemplo con la misma condición inicial del ejemplo anterior y se incluye un campo de velocidades que varía en el tiempo. En este ejemplo, además se deja que la fuente libere sustancia desde el tiempo  $t = 0$  hasta el tiempo  $t = 250$  s. Y después, para  $t > 250$  s, la fuente deja de liberar la sustancia. En las figuras (7) y (8) se puede apreciar cómo la sustancia es dispersada por el campo de velocidades. Note en la figura (7) que la distribución de la sustancia se deforma por el cambio de la dirección de la velocidad. En la figura (8) la distribución de la sustancia ya no está conectada con la fuente y sólo es una distribución que se sigue moviendo por el efecto de la velocidad.

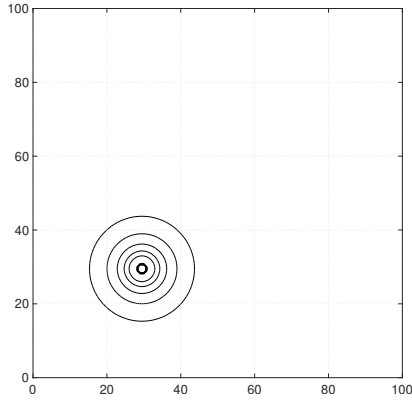


FIGURA 6. Solución numérica del problema de difusión en  $t = 200$  s.

Se deja al lector como ejercicio que escriba un programa que resuelva las ecuaciones de advección-difusión y evalúe la forma en que cada uno de estos dos procesos producen la dispersión de la sustancia.

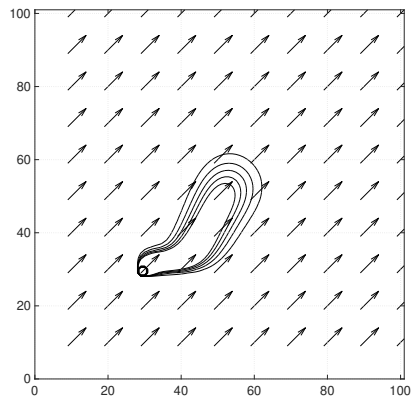


FIGURA 7. Solución numérica del problema de advección en  $t = 2.50$  s.



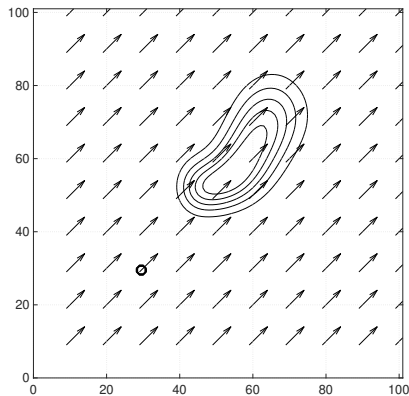


FIGURA 8. Solución numérica del problema de advección en  $t = 3.75$  s.

## 2. PROCESOS DE DISPERSIÓN MEDIANTE PARTÍCULAS

Se considera la dispersión de partículas pasivas en cuerpos de agua y se describen los conceptos básicos sobre dispersión y difusión (derivada de la dispersión), [3]. Estas partículas en los fluidos geofísicos son puestas en movimiento por la energía que proviene directa o indirectamente del Sol, además del efecto de la gravedad y la rotación de la Tierra. En particular se tratará la dispersión horizontal, en el plano  $x - y$ , y restringido por barreras físicas simulando ser canales, bahías, golfos o lagunas.

Las partículas que se utilizarán serán pasivas, es decir, que no reaccionan, no modifican, no se alteran por el fluido, únicamente se transportan por el flujo, ya sea mediante procesos advectivos o difusivos (ver ec. 1 y ec. 2). Bajo este esquema, llamado, descripción Lagrangiana, consiste en estudiar el movimiento de un conjunto de partículas independiente arrastradas por el fluido, con base en la estadística.

En esta sección se estudiarán los procesos físicos de dispersión y difusión, mediante ejemplos numéricos.

**Caminata aleatoria (enfoque Lagrangiano) y Movimiento Browniano (equivalencia con enfoque Euleriano).** Se considerará la dispersión aleatoria de un conjunto de partículas en el plano  $x$ - $y$ , que parten de un origen común,  $(0,0)$ . En este caso las posiciones de las partículas están dadas por:

$$\begin{aligned}x_i^{n+1} &= x_i^n + D_x \\y_i^{n+1} &= y_i^n + D_y\end{aligned}\tag{18}$$

Donde el superíndice  $n$  es el tiempo actual y  $n + 1$  es el tiempo posterior, mientras que el subíndice  $i$  representa a la partícula.  $D_x$  y  $D_y$  es la parte aleatoria de la caminata. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra la trayectoria para  $N = 3$  y  $N = 1000$  partículas, respectivamente.

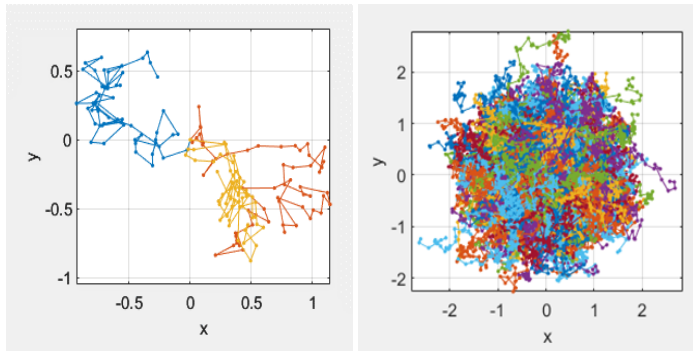


FIGURA 9. Trayectoria de  $N = 3$  y  $N = 1000$  partículas.

**Dispersión o ¿Cuánto se desplazaron las partículas?** Obviamente existen  $N$  respuestas, una para cada partícula, dada por:

$$r_i^n = \sqrt{(x_i^n)^2 + (y_i^n)^2}\tag{19}$$

Sin embargo, se observa claramente que cuando se trata de un número “grande” de partículas, la distancia que se desplazan es similar al radio de la “mancha” delimitada por las posiciones finales. Entonces para poder estimar una única respuesta, es necesario hacer algún promedio, en este caso, la **dispersión** se definirá como el promedio desplazamiento al cuadrado de las  $N$  partículas al tiempo  $n$ :

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(x_i^n)^2 + (y_i^n)^2]\tag{20}$$

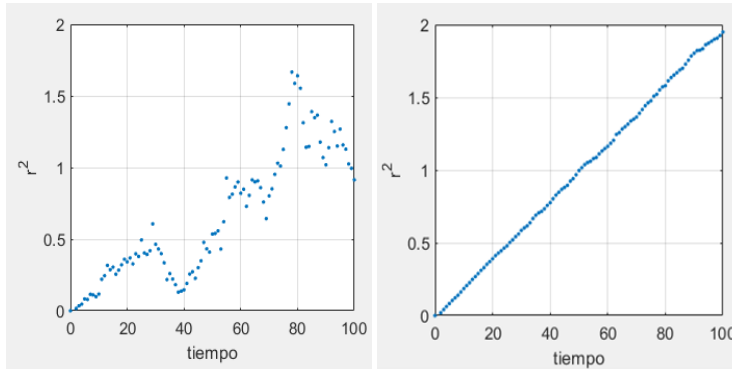


FIGURA 10. Gráfica de dispersión vs tiempo para  $N = 3$  y  $N = 1000$  partículas.

Para el caso de  $N = 3$  y  $N = 1000$  partículas, la dispersión resulta en:

Como se puede observar, mientras más partículas se tengan ( $N > 100$ ) se tiene que la dispersión tiene un comportamiento lineal con el tiempo, es decir,

$$\langle r^2 \rangle \sim t \quad (21)$$

o de manera equivalente

$$\langle r^2 \rangle = 4 \cdot D \cdot t \quad (22)$$

Donde  $D$  es una constante y sus unidades son de distancia al cuadrado sobre tiempo.

**Difusión.** La difusividad se define como

$$K = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle r^2 \rangle \quad (23)$$

Como la dispersión es proporcional al tiempo, entonces la difusividad es constante y en este caso se tiene que el coeficiente de difusividad es

$$K = 2D \quad (24)$$

**Movimiento Browniano.** El modelo anterior sirvió para explicar el fenómeno del movimiento Browniano, en el cual A. Einstein proporcionó una de las primeras soluciones analíticas con base en la probabilidad y estadística del desplazamiento de las partículas [3]. Su modelo se reduce precisamente a la ecuación diferencial de difusión:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (25)$$

La cual tiene la solución de una función Gaussiana normalizada con media cero y varianza  $(2D)t$ :

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2D)t}} e^{-\frac{x^2}{2(2D)t}} \quad (26)$$

O

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi K t}} e^{-\frac{x^2}{2Kt}} \quad (27)$$

**Equivalencia entre el enfoque Lagrangiano y el Euleriano.** Para ver la equivalencia entre éstos dos enfoques se puede calcular la frecuencia relativa de la posición de las partículas en las direcciones x-y respectivamente, y compararlas con la función Gaussiana anterior.

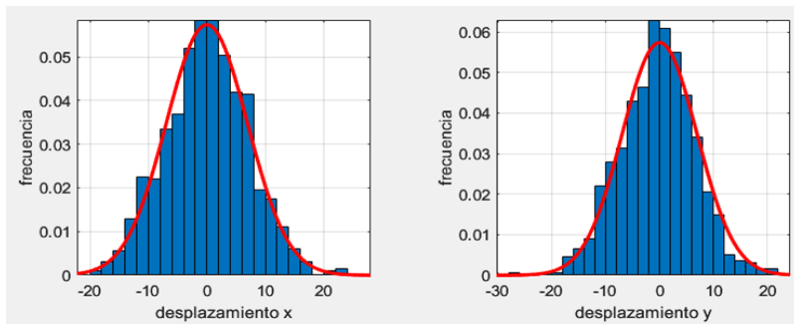


FIGURA 11. Histogramas del desplazamiento de las partículas y gráficas de la función analítica dadas por la función Gaussiana.

## 3. ELIPSES DE DISPERSIÓN

Uno de los objetivos fundamentales de la oceanografía y limnología física es contar con una descripción global de la circulación del océano y la variabilidad temporal. La descripción lagrangiana del flujo se puede utilizar para investigar procesos biogeofísicos y biogeoquímicos, por ejemplo analizar la dispersión de una sustancia (derrame de petróleo) o la productividad de un ecosistema marino semicerrado. Las elipses de dispersión (de covarianza o variabilidad, de error) son útiles para estimar la evolución de una *nube* de la sustancia (partículas) emitida [4].

**Construcción de las elipses.** Se considera un grupo de  $n$  partículas que son liberadas a tiempos arbitrarios desde un lugar fijo (fuente puntual) en el espacio 2D. Conforme transcurre el tiempo, la nube de partículas puede hacer dos cosas: crecer y trasladarse. El crecimiento de la nube se puede visualizar con las elipses de dispersión, mientras que su traslación está representada por el desplazamiento del centro de masa de las partículas [5]. Al tiempo inicial la elipse se reduce a un punto y va incrementando en tamaño conforme las partículas se dispersan. Entonces se definen los siguientes estadísticos:

El centro de masa o centro geométrico,

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\y_c &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\end{aligned}\tag{28}$$

la varianza en la dirección  $x$  e  $y$ ,

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_c - x_i)^2 \\ \sigma_y^2 &= \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (y_c - y_i)^2,\end{aligned}\tag{29}$$

la covarianza con respecto a la ubicación del centro de masa,

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_c - x_i) \cdot (y_c - y_i),\tag{30}$$

la dirección del eje principal,

$$\theta_i = \frac{1}{2} \tan^{-1}(2\sigma_x^2 \sigma_y^2 / \sigma_x^2 - \sigma_y^2), \quad (31)$$

la varianza en la dirección del eje mayor y menor,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ma}}^2 &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2}{4} - \sigma_x^2 \sigma_y^2 + \sigma_{xy} \sigma_{xy}} \\ \sigma_{\text{mi}}^2 &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2}{4} - \sigma_x^2 \sigma_y^2 + \sigma_{xy} \sigma_{xy}} \end{aligned} \quad (32)$$

y la extensión horizontal del trazador se puede medir por su tamaño de la distribución espacial

$$\sigma^2 = 2\sigma_{\text{ma}}\sigma_{\text{mi}}. \quad (33)$$

Con datos de trayectorias de partículas o trazador se puede ejemplificar el uso de las elipses de dispersión. A continuación, se presenta el ejemplo y ejercicio que se trabajó durante la sesión del curso.

**Ejemplo-Ejercicio.** Como ejemplo se pidió calcular y graficar la elipse de dispersión para la imagen de un trazador. Se proporcionaron datos del contorno que se obtuvieron a partir de realizar el procesamiento de imagen de un experimento de trazador que se realizó en un lago.

De ejercicio, se descargaron datos de PlasticAdrift [6] y se trazaron las elipses de dispersión para distintos tiempos.

Una vez que se obtuvieron los datos (cada alumno decidió la región) se realizaron las elipses de dispersión para analizar la distribución espacial.

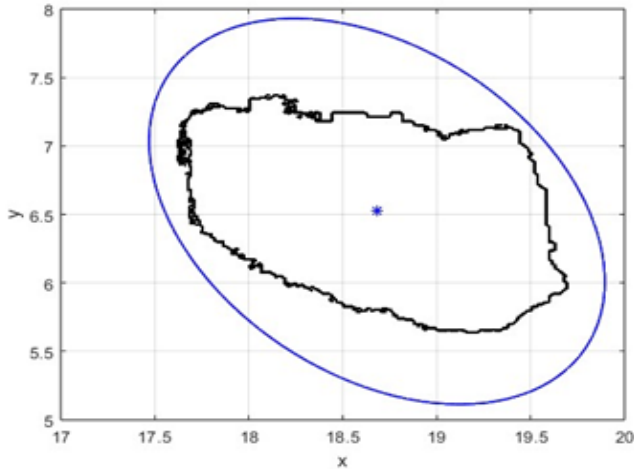


FIGURA 12. Distribución espacial del trazador con la elipse de dispersión.

#### 4. ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS EN 2D

Las ecuaciones de aguas someras (o por sus siglas en inglés, SWE) son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas (o parabólicas si se considera la viscosidad) que describen el flujo por debajo de una superficie de presión en un fluido (puede ser una superficie libre).

El modelo de aguas someras 2D tiene tres variables de pronóstico: las dos componentes de la velocidad  $u$  y  $v$ , y la profundidad de la capa de fluido  $h$ . Una de las formas de forzar el modelo es a través de la altura de la orografía  $H$  y un campo bidimensional fijo.

En ausencia de fuentes, es deseable conservar el volumen total y el momento total en cada dirección, por lo que se requiere ecuaciones de conservación para  $h$ ,  $uh$  y  $vh$ . Por lo tanto, las ecuaciones de aguas someras en forma conservativa (o de flujo) pueden escribirse como:

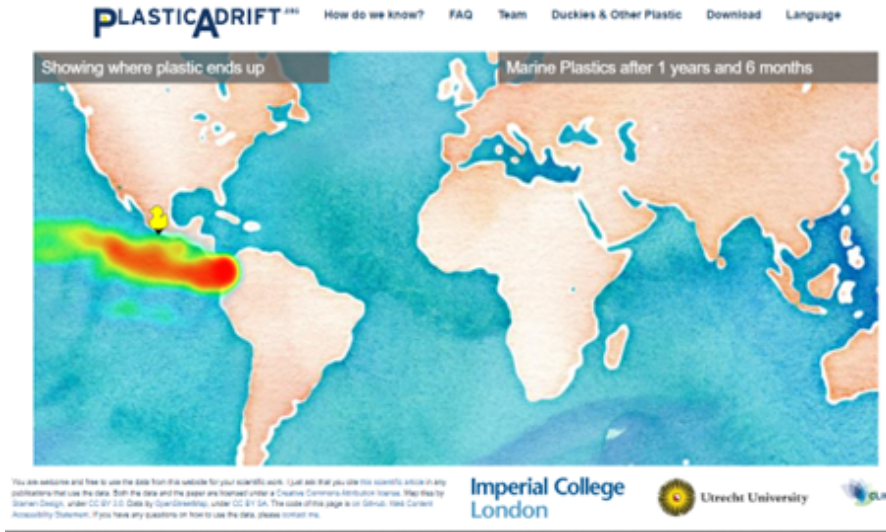


FIGURA 13. Distribución espacial y temporal de la simulación de un trazador. Tomada de PlasticAdrift.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} = h \left( fv - g \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (34)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2h + gh^2/2)}{\partial y} = h \left( -fu - g \frac{\partial H}{\partial y} \right),$$

donde  $f$  es el parámetro de Coriolis y  $g$  es la aceleración debida a la gravedad [1].

**Modelo.** El modelo que se va a utilizar, pretende simular un canal alrededor de la Tierra entre 20 y 70 °N con una resolución espacial de 100 km (alrededor de un grado). El dominio es periódico en la dirección  $x$  y tiene fronteras sólidas norte y sur donde  $v = 0$  y  $h$  se fija en sus valores iniciales. En este modelo, el parámetro de Coriolis varía linealmente con  $y$  de forma que  $f = f_0 + \beta(y - \bar{y})$ . Así,  $f = f_0$  en el centro del dominio en la dirección  $y$ .



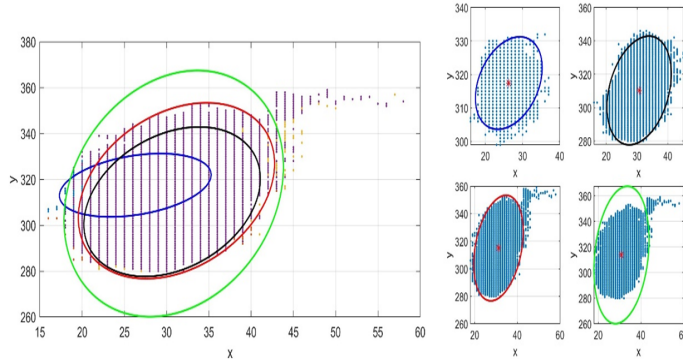


FIGURA 14. Distribución espacial y temporal del trazador con su respectiva elipse de dispersión.

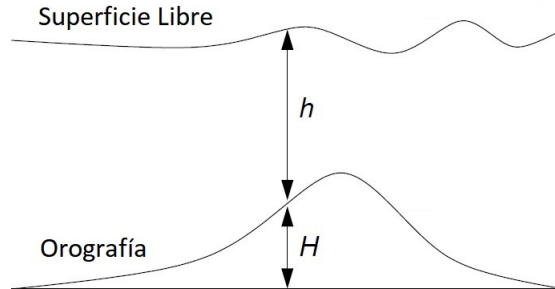


FIGURA 15. Esquema del modelo de aguas someras  $h$  es la profundidad del fluido y  $H$  es la altura de la orografía (o fondo).

**Discretización de las ecuaciones.** Se utiliza el esquema de Lax-Wendroff, este consigue una precisión razonable con una complejidad modesta. Este esquema tiene precisión de segundo orden y sólo requiere un paso temporal previo, además, no necesita ninguna difusión artificial en el tiempo o el espacio para mantenerse estable. Al considerar una cantidad genérica  $q$ , primero se estima el valor de  $q$  en puntos medios de la malla espacial y temporal:

$$\begin{aligned}
q_{i+1/2,j}^{n+1/2} &= \frac{q_{i,j}^n + q_{i+1,j}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{(uq + U)_{i+1,j}^n - (uq + U)_{i,j}^n}{\Delta x}, \\
q_{i,j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{q_{i,j}^n + q_{i,j+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{(vq + V)_{i,j+1}^n - (vq + V)_{i,j}^n}{\Delta y}.
\end{aligned} \tag{35}$$

donde  $U$  y  $V$  representan todos los términos con derivadas espaciales que dependen de las variables de pronóstico del modelo. Esto es parecido a un esquema adelantado en tiempo, centrado en espacio en una dimensión, excepto que el stencil se mueve sólo medio paso en el tiempo y en el espacio.

Las ecuaciones anteriores se aplican a las cantidades  $h$ ,  $uh$  y  $vh$  para obtener  $h_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ ,  $h_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ ,  $(uh)_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ ,  $(uh)_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ ,  $(vh)_{i+1/2,j}^{n+1/2}$  y  $(vh)_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ .

A partir de las cantidades que se calcularon en los puntos medios, se obtienen los nuevos valores de  $uq + U$  y  $vq + V$  para cada una de las cantidades que se advectan. Por ejemplo, para advectar  $uh$  se requiere  $u^2h + gh^2/2$  en los puntos medios, que pueden calcularse a partir de  $(uh)^2/h + gh^2/2$ . Entonces sigue que:

$$\begin{aligned}
q_{i,j}^{n+1} &= q_{i,j}^n + \Delta t \frac{(uq + U)_{i+1/2,j}^{n+1/2} - (uq + U)_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} \\
&\quad - \Delta t \frac{(vq + V)_{i,j+1/2}^{n+1/2} - (vq + V)_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y}
\end{aligned} \tag{36}$$

Esto es similar a un esquema centrado en tiempo y centrado en espacio en dos dimensiones (que es lo que da al esquema de Lax–Wendroff la precisión de segundo orden), la diferencia es que este esquema utiliza los valores en los puntos medios para saltar al siguiente paso temporal, en lugar de usar los puntos de malla adyacentes para saltar dos pasos temporales [2].

## 5. APLICACIÓN DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LA CONTAMINACIÓN EN RÍOS Y CANALES.

Sea  $[0, L] \subset \mathbb{R}$  un río de longitud  $L$  y  $[0, T] \subset \mathbb{R}$  el intervalo en tiempo de la modelación. Se busca una función de concentración  $c = c(x, t)$  medida en unidades de masa por volumen [ $\text{g}/\text{m}^3$ ] de una sustancia contaminante tal que para todo  $(x, t) \in (0, L] \times (0, T]$  satisface el modelo en ecuaciones diferenciales parciales (EDPs)

[7]

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial c}{\partial x} \right) + kc = S \text{ en } (0, L) \times (0, T] \quad (37)$$

$$c(x, 0) = 0 \text{ sobre } (0, L) \quad (38)$$

$$c(0, t) = c_0(t) \text{ sobre } (0, T) \quad (39)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(L, t) = 0 \text{ sobre } (0, T) \quad (40)$$

**Comparación de los esquemas FTCS, Upwind y Lax-Wendroff.** En un 1er experimento se suponen los siguientes puntos: i) El contaminante es conservativo ( $k = 0$ ), ii) no se presentan fuentes ni sumideros ( $S = 0$ ), iii) el contaminante tiene dinámica temporal, iv) al inicio de la simulación el río está libre de contaminación, v) la velocidad del río es constante y vi) en la frontera de entrada tenemos una concentración fija mientras en la frontera de salida el contaminante escapa libremente.

El modelo es finalmente establecido al considerar los valores de sus parámetros dados en la siguiente tabla Así, la concentración  $C_0$  del lado izquierdo del río es trans-

Dato	$U [m/seg]$	$E [m^2/seg]$	$k [1/seg]$	$L [m]$	$C_0 [g/m^3]$	$S$
Valores	1.5	8.0	0	8000	150	0

TABLA 1. Datos y valores para el experimento numérico tomados de [7]

portada por advección y dispersión generando una onda que con el tiempo suficiente alcanzara una misma concentración a lo largo del río. Para ver esto se compara el código del esquema *Upwind* con lo mostrado en [7] (Ver Figura 16), se puede observar el comportamiento descrito y que las soluciones son prácticamente iguales.

En un segundo experimento el contaminante es no conservativo al considerar una velocidad de reacción  $\kappa = 0.004 \text{seg}^{-1}$ . Esto provoca que el contaminante *muera*. Esta dinámica se observa en la Figura 17 donde las curvas de contaminante tienden a reducirse conforme al tiempo. En dicha Figura también se compara el resultado con el presetado por [7].

Una última comparación se hace entre los tres esquemas establecidos usando los valores de la Tabla 1, pero se hace la suposición de que el contaminante es no conservativo. El resultado muestra que el esquema *Upwind* no presenta oscilaciones espurias que suelen afectar a los métodos explícitos, entonces ésta es la mejor opción para simular la dinámica deseada.

Lo anterior es el resultado de la advección dominante del fenómeno y que la *información* fluye en sentido aguas-abajo, dirección que coincide con la advección dada en el esquema *Upwind*. En cambio FTCS y Lax-Wendroff al considerar una derivada centrada busca información tanto aguas arriba como aguas abajo lo que perjudica su eficiencia generando oscilaciones espurias. La corrección que se hace a Lax-Wendroff al añadir el promedio de la advección a la difusión ayuda a estabilizar la solución pero no en la medida necesaria para evitar del todo las oscilaciones. En el siguiente experimento sólo se considera el esquema *Upwind*, sin embargo es necesario insistir en que lo anterior no descarta los otros esquemas simplemente tienen diferente desempeño en acuerdo a los datos.

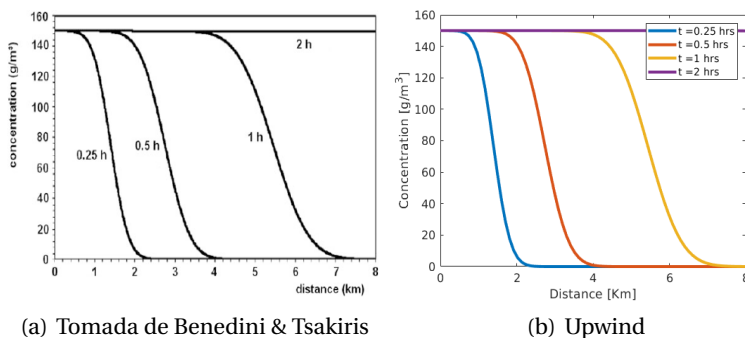


FIGURA 16. Contaminante conservativo: Comparación de la solución dada en [7] y la obtenida con el esquema de tipo Upwind

**Simulación numérica de la contaminación en el río Santiago.** En el siguiente experimento se aborda una situación realista sobre el Río Santiago localizado en el estado de Jalisco (Ver Figura 19). La zona de estudio comienza al inicio del río en la Laguna de Chapala hasta cerca de la población del El Salto. Este río se caracteriza por sus altos niveles de contaminación.

donde resta definir la velocidad del río  $U$ , el forzamiento  $S$  y el valor de los diferentes parámetros.

Respecto a la velocidad  $U$  se tienen diferentes alternativas ante la falta de mediciones: Tomar valores medios de la velocidad de la literatura (ver por ejemplo la Tabla de [7]). Simular la velocidad con otro modelo en EDPs como las ampliamente utilizadas

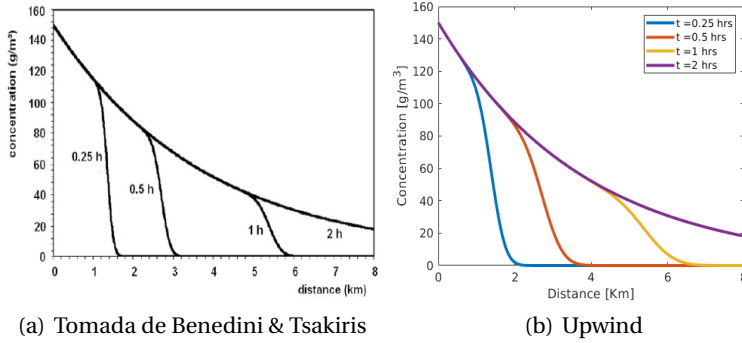


FIGURA 17. Contaminante no conservativo: Comparación de la solución dada en [7] y la obtenida con el esquema de tipo Upwind

ecuaciones de aguas someras (o *Shallow-waters* en inglés). Si se dispone de alguna medición usar formular empíricas como la fórmula de Manning,

$$U = \frac{1}{n} R^{2/3} S_0^{1/2}, \quad (41)$$

con  $n$  el coeficiente de rugosidad de Manning,  $R$  el radio hidráulico y  $S_0$  la pendiente del fondo del río.

Ante la falta de mediciones, se supone que el ancho del Río Santiago es similar a su radio hidráulico  $R \approx 0.5 \times ancho$ . Esta imposición—totalmente arbitraria—permite sin embargo, usar la fórmula de Manning para obtener una velocidad con variabilidad local (Figura 20(a)). De forma similar, dado que la altura del río sobre el nivel del mar (sobre-elevación) tiene una clara forma de escalón (Figura 19), se fijan cuatro puntos del río y con interpolación se genera la función altura  $h(x)$ , a partir de  $h(x)$  es posible obtener la pendiente  $S_0$  (Figura 20(b)).

Con las estimaciones de  $R$  y  $S_0$ , junto al valor  $n = 0.06$  del coeficiente de Manning se estima la velocidad  $U(x)$  a lo largo del río (Figura 20(c)). Se observa un comportamiento creciente que resalta la parte del río donde se tiene una pendiente pronunciada y el cambio respecto al ancho en la forma de curvas suaves.

Respecto a las descargas se supone la existencia de dos zonas de descarga caracterizadas con la función (42), donde se considera que se descarga es mayor a mediodía y menor en los extremos (madrugada y comenzada la noche). Así en la Figura 20(d)

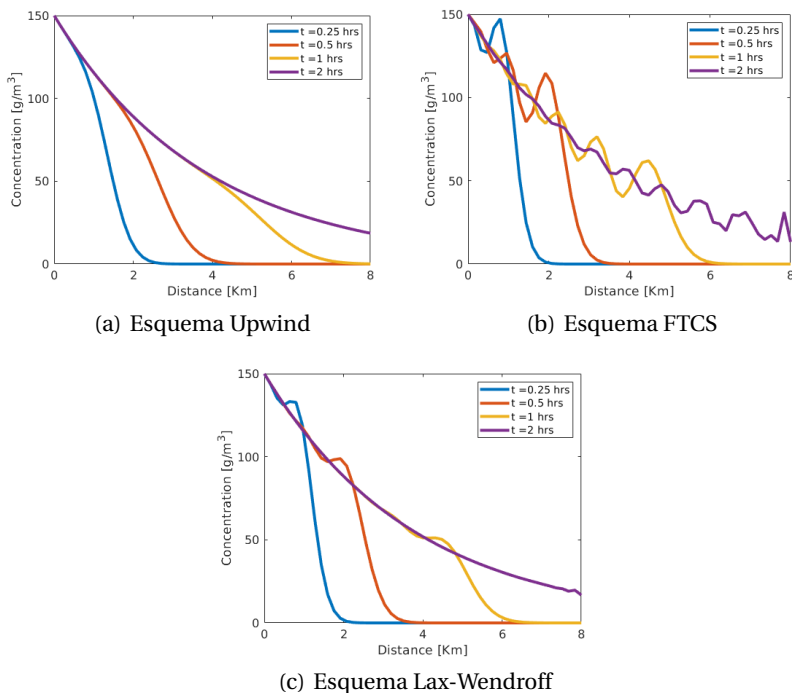


FIGURA 18. Compación de los esquemas explícitos Upwind, FTCS y Lax-Wendroff. Es claro que el esquema Upwind es la mejor opción ya que no presenta oscilaciones espurias, mientras el peor es el FTCS.

se observan claramente la periodicidad en los días de descarga y donde una zona descarga más que otra. Además se localizan las descargas en punto 1 ( $x_1 = 2.5 \text{ Km}$ ) y punto 2 ( $x_2 = 35.0 \text{ Km}$ ).

Dicho lo anterior a continuación se debe definir el forzamiento del modelo, esto es, la función  $S = S(x, t)$ . Para esto se tienen dos opciones, descargas puntuales y aportes por zonas. Para el caso puntual se utiliza la función  $\delta$  de Dirac junto a una función de la magnitud de la descarga  $m(t)$

$$S(x, t) = m(t)\delta(x - x_d) \quad (42)$$

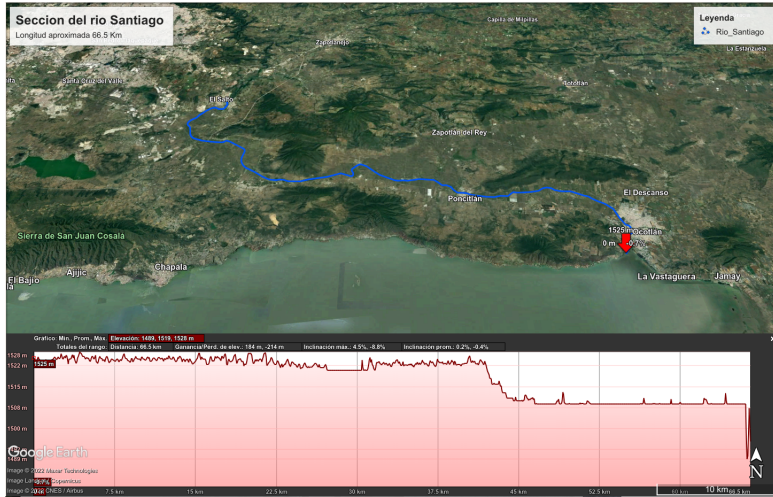


FIGURA 19. Imagen de la zona de estudio sobre el Río Santiago (marcada en azul), extraída de Google-Earth. En la parte baja se observa la elevación del río respecto al nivel medio del mar. Sobre esto último se nota que el río puede dividirse en tres zonas, con una pendiente moderada la primera, una pendiente pronunciada y una última zona con pendiente caso constante

con  $m(t)$  la magnitud de la descarga y  $\delta$  la función dada por

$$\delta(x - x_d) := \begin{cases} 1, & \text{si } x = x_d \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para la descarga por zona se utiliza una campana de Gauss dada por

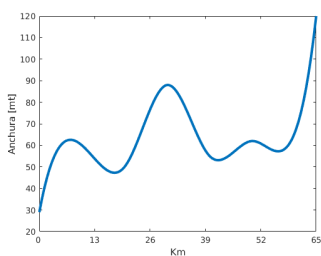
$$S(x, t) = m(t) \exp(-\eta(x - x_d)^2) \quad (43)$$

con  $\eta$  la amplitud de la campana,  $m(t)$  un flujo de masa y  $x_d \in (0, L)$  el punto de descarga. Una opción interesante para simular el flujo de masa  $m(t)$  es la siguiente

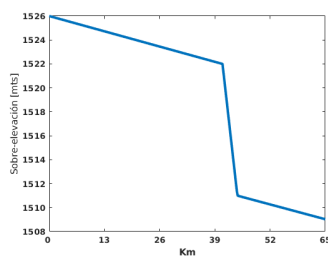
$$m(t) = f_{max} \left[ \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi t}{24(3600)} \right) \right]$$

con  $f_{max}$  el valor máximo de descarga por día y  $t$  el vector de tiempo que considere uno o más días. Note que la fórmula toma el tiempo en segundos.

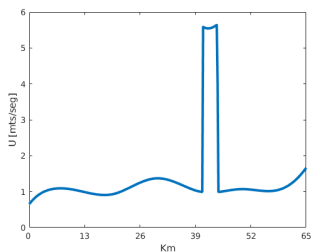
Finalmente se consideran 2 días de simulación lo que genera la distribución de la contaminación en la Figura (21). En dicha Figura se observa con claridad la periodicidad diaria de los vertidos, la estela generada por la velocidad  $U$ , la resistencia al transporte dada por la difusividad, la degradación del contaminante por su velocidad de reacción, la nula entrada de contaminante en el extremo izquierdo así como su escape al final del río.



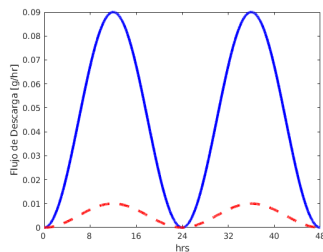
(a) Interpolación del ancho del río



(b) Sobre-elevación del río interpolada



(c) Velocidad estimada  $U$



(d) Descargas de contaminante en las zonas de descarga: zona 1 (-), zona 2 (-)

FIGURA 20. Algunas entradas del modelo para el Río Santiago: 20(a) Función del ancho del río obtenida con técnicas de interpolación. 20(b) Función obtenida con técnicas de interpolación. 20(c) Estimación de la velocidad usando la fórmula de Manning. 20(d) Flujo másico de contaminante en los dos puntos de descarga, punto 1 (azul) y punto 2 (rojo).



Dato	$E[m^2/seg]$	$\kappa[1/seg]$	$L[Km]$	$T[seg]$	$C_0[g/m^3]$	$n$
Valores	8.0	0.04	63.5	432000	0	0.06

TABLA 2. Datos y valores para el experimento numérico tomados de Benedini & Tsakiris (2013)

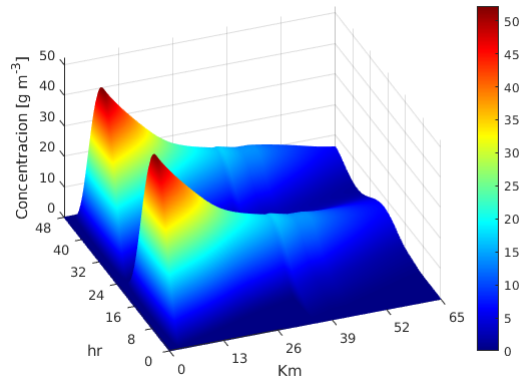


FIGURA 21. Concentración del contaminante después de dos días de simulación. Se observa las diferencias entre las magnitudes de las zonas de vertido además de su periodicidad por día.

Con base en el material bibliográfico referente a la modelación de la dispersión de contaminantes en ríos y canales [7], se presenta una metodología completa en diferencias finitas para resolver la ecuación de transporte con condiciones Dirichlet y Neumann y dependiente del tiempo. Con el objetivo de generar una solución de calidad se realizó una comparación entre [7] y los resultados obtenidos donde logró una gran similitud. Con lo anterior como base, se presentó una simulación numérica de un dominio real, el Río Santiago, donde se emplearon más herramientas como el uso de la fórmula de Manning para obtener una velocidad variable y la definición de las descargas de contaminantes de tipo puntual basadas en distribuciones Gaussianas.

## REFERENCIAS

- [1] G.K. Geoffrey, Atmospheric and oceanic fluid dynamics. *Cambridge University Press*, 2017.
- [2] P. Connolly, R. Hogan, Computer Practical: Shallow Water Model. *The University of Manchester*, 2014.
- [3] L. Zavala-Sansón, *Apuntes de Oceanografía Física. Dispersión y difusión en el océano*. CISE-SE, (2021).
- [4] T. Gasca-Ortiz, F.J. Domínguez-Mota, D.A. Pantoja, *Determination of Optimal Diffusion Coefficients in Lake Zirahuén through a Local Inverse Problem*. Mathematics, no 9, (2021).
- [5] R.E. Thomson, W.J. Emery, Data analysis methods in physical oceanography. *Newnes*, (2014).
- [6] PlasticAdrift, <https://plasticadrift.org/>
- [7] M. Benedini, G. Tsakiris, Water Quality Modelling for Rivers and Streams. *Springer*, (2012).
- [8] C.A.J Fletcher, Computational techniques for fluid dynamics 1 – Fundamental and general techniques. *Springer*, (1990).

DEPTO. DE FÍSICA, CUCEI, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLV MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN  
1421, 4443-GUADALAJARA

*E-mail address:* federico.velazquez@academicos.udg.mx

*E-mail address:* diego.pantoja@academicos.udg.mx

*E-mail address:* tzitlali.gasca@academicos.udg.mx

*E-mail address:* jorge.montes@academicos.udg.mx

*E-mail address:* nector.gchan@academicos.udg.mx

# Estadística



## ESTADÍSTICA ROBUSTA

JESSICA JACQUELINE MACHUCA VERGARA, JORGE ALBERTO RODRÍGUEZ CASTRO,  
PORFIRIO GUTIÉRREZ GONZÁLEZ, LIZBETH DÍAZ CALDERA, CECILIA GARIBAY LÓPEZ

RESUMEN. Cuando se realiza un análisis estadístico por medio de la prueba de hipótesis, en la estadística clásica, se puede llegar a una conclusión no muy precisa, sobre todo cuando hay datos atípicos o aberrantes, el presente artículo se hará una presentación de la estadística robusta la cual toma una mayor importancia en el comportamiento del conjunto de los datos y le disminuye la importancia a los datos atípicos.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los estadísticos descriptivos clásicos por excelencia, la media aritmética y la desviación estándar, cambian sustancialmente su valor ante la presencia de datos atípicos o aberrantes, lo que los convierte en estadísticos poco confiables en la toma de decisiones. La perspectiva de la estadística robusta se ha centrado en la utilización de estadísticos robustos en el análisis de datos con distribución asimétrica o bien ante la presencia de puntos atípicos. Los estadísticos robustos toman mayor importancia en el comportamiento del conjunto de los datos y muy poca importancia en los puntos atípicos o aberrantes. Una preocupación relevante es cuando se realiza la prueba de hipótesis de un parámetro, como podría ser el de la media poblacional; si en el conjunto de datos, mediante el análisis de un diagrama de caja o caja de bigotes, se identifican la presencia de puntos atípicos, esto implicaría que la media muestral este movida ya sea hacia la derecha o izquierda; además dependiendo de que tan alejados sean los puntos atípicos, éstos incrementarían la variación, dando como resultado un valor mayor en la desviación estándar o varianza muestral de los datos. Al realizar la prueba de hipótesis de la comparación de una media poblacional, el resultado de la

---

*Palabras Claves.* Robusta, Media recortada, Media Winsorizada, Desviación estándar winsorizada.

prueba estadística estaría afectado y sería tomar una decisión incorrecta. El objetivo de este trabajo es comparar el análisis estadístico utilizando la prueba de hipótesis de la estadística clásica, con la prueba de hipótesis de la estadística robusta con un ejemplo práctico relacionado con un conjunto de datos del peso de capsulas de cierto medicamento. Los datos del ejemplo practico de las capsulas se caracteriza por tener puntos atípicos o aberrantes.

## 2. PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA IGUALDAD DE UNA MEDIA POBLACIÓN Y VARIANZA DESCONOCIDA

En muchos problemas de la ciencia, de la experimentación, de la ingeniería, de la calidad, y del control estadístico de procesos se requiere aceptar o rechazar una proposición sobre algún parámetro (la media o desviación estándar). Esta proposición recibe el nombre de **hipótesis**. Y el procedimiento sobre la toma de decisión sobre la hipótesis, se le conoce como **prueba de hipótesis**.

**2.1. Hipótesis estadísticas.** Una **hipótesis estadística** es una proposición o supuesto sobre los parámetros de una o más poblaciones. En la Tabla 1 se encuentran los pesos en miligramos de una capsula de cierto medicamento. La empresa farmacéutica esta interesada en el peso óptimo de 240 miligramos (mg).

225.4	234.1	231.9	242.4	236.1
234.1	240.9	235.4	238.3	231.1
234.1	248.3	234.1	234.9	235.9
233.8	236.4	234.1	236.8	235.6
227.4	240.9	232.2	236.5	237.9
238.8	231.1	236.6	237.1	236.2
235.5	236.5	240.2	237.3	238.8
233.1	234.9	237.8	237.6	252.9

TABLA 1. Peso de las capsulas de un medicamento

Por consiguiente, el planteamiento de las hipótesis se puede expresar simbólicamente como,

$$H_0 : \mu = 240mg$$

$$H_a : \mu \neq 240mg$$

La proposición  $H_0 : \mu = 240mg$ , se conoce como **Hipótesis nula**, mientras que la proposición  $H_a : \mu \neq 240mg$ , recibe el nombre de **Hipótesis alternativa**. En la hipótesis alternativa se especifican los valores de  $\mu$  que pueden ser mayores o menores que  $240mg$ , también se conoce como **Hipótesis alternativa bilateral**. En algunas situaciones, lo que se desea es formular una **Hipótesis alternativa unilateral**, como pudieran ser,

$$\begin{array}{ccc} H_0 : \mu = 240mg & & H_0 : \mu = 240mg \\ H_a : \mu < 240mg & \text{ó} & H_a : \mu > 240mg \end{array}$$

De este modo, en forma general podemos decir que la Hipótesis nula, representada por  $H_0$ , es la afirmación sobre una o más características de poblaciones que al inicio se supone cierta (es decir, una «*creencia a priori*»). La **Hipótesis alternativa**, representada por  $H_a$ , es la afirmación contradictoria a la hipótesis nula  $H_0$ .

**2.2. Estadístico de Prueba de la T-student.** Para determinar estadísticamente cuál de las dos hipótesis son estadísticamente validas en relación con el valor de la media poblacional, se requiere el Estadístico de Prueba de la t-student (ver expresión 1).

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (1)$$

Donde  $t_0$  sigue una distribución t (t-Student) con  $n - 1$  grados de libertad,  $\bar{x}$  es la media muestral y  $S$  es la desviación estándar muestral.

**2.3. El nivel de confianza dado  $\alpha$  (alfa) y región de rechazo de la hipótesis nula.**

Un punto importante en la prueba de hipótesis es la determinación del nivel de confianza dado  $\alpha$  (alfa). El  $\alpha$  es el valor de la probabilidad que determina el área de rechazo de lo afirmado por la hipótesis nula en relación al valor del parámetro (media poblacional). El valor del nivel de confianza  $\alpha$  es especificado por el investigador;

los niveles de confianza más comúnmente usados son:  $\alpha = 0.10$ ,  $\alpha = 0.05$ , y  $\alpha = 0.01$  correspondientes al 90 %, 95 % y 99 % de confianza estadística, respectivamente. En la figura 1 se puede ver la región de rechazo y la región de aceptación para un  $\alpha = 0.05$ ; los valores  $-t_{\alpha/2, n-1}$  y  $t_{\alpha/2, n-1}$ , son considerados los valores críticos cuyos valores se pueden encontrar en las tablas de la t-student para  $n - 1$  grados de libertad y un nivel de confianza  $\alpha$  dado. En la curva de la distribución t-student de la figura 1 se puede ver que para un  $\alpha = 0.05$ , el valor de  $\alpha/2 = 0.025$  representa el área sombreada tanto del lado izquierdo como del lado derecho de la curva de una distribución muestral t-student con  $n - 1$  grados de libertad. El área sombreada del lado izquierdo y el área sombreada del lado derecho de la curva de la distribución t-student en la figura 1 representan el valor de probabilidad para  $-t < -t_{((\alpha/2), (n-1))}$  y para  $t > t_{((\alpha/2), (n-1))}$  respectivamente para un  $\alpha = 0.05$  y se pueden representar matemáticamente como

$$P(-t < -t_{\alpha/2, n-1}) = \frac{\alpha}{2} = 0.025 \quad \text{y} \quad P(t > t_{\alpha/2, n-1}) = \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

respectivamente.

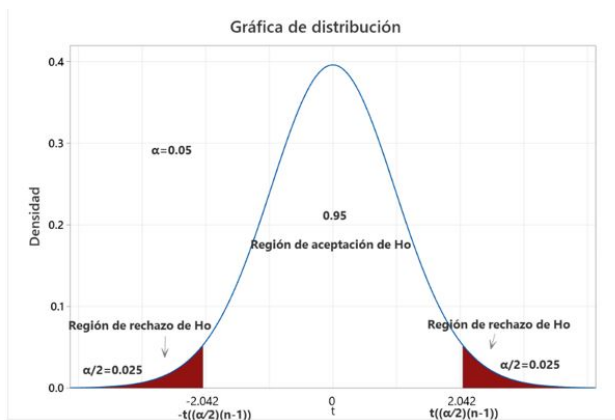


FIGURA 1. Determinación de la región de rechazo de la hipótesis nula.

Por lo tanto, para todo valor de  $t_0$  (ver expresión 1) que esté en la región de rechazo tanto por el lado izquierdo como en el lado derecho de la curva de la figura 2 se puede determinar que se rechaza lo afirmado por la hipótesis nula ( $H_0$ ); y por consecuencia todo valor de  $t_0$  que esté en la región de aceptación de la curva de la figura 2, se



podrá determinar que no fue posible rechazar lo afirmado por la hipótesis nula ( $H_0$ ). Con este criterio, se puede afirmar que la hipótesis nula  $H_0$ , será rechazada cuando  $-t_0 < -t_{\alpha/2, n-1}$  o cuando  $t_0 > t_{\alpha/2, n-1}$ , para un  $\alpha$  dado (ver figura 2).

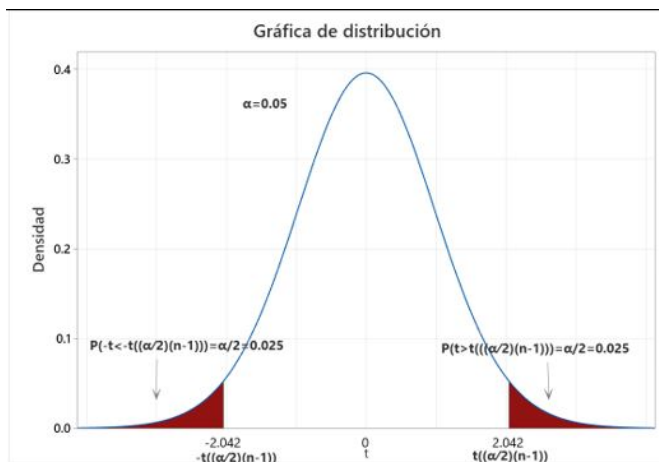


FIGURA 2. Valores de probabilidad de la región de rechazo

**2.4. Ejemplo del peso de las capsulas de un fármaco.** En una empresa del ramo farmacéutico están interesada en el peso optimo de las capsulas de un medicamento el cual consideran que debe ser de 240 miligramos (mg). Para analizar si el peso de las capsulas cumple con el valor óptimo de 240 mg. Analizaron el peso de 40 capsulas (tabla 1); en la tabla 2.2 se pueden ver el promedio, el mínimo, máximo y desviación estándar de los pesos de las capsulas.

Nótese que el promedio del peso de las capsulas es de 236.32, el cual esta por debajo del peso optimo que debe ser de 240 mg. Haciendo la prueba de hipótesis para verificar si el peso promedio de las capsulas es de 240 mg y utilizando el estadístico de prueba de la expresión 1, se tiene que

$$t_0 = \frac{236.32 - 240}{\frac{4.73}{\sqrt{40}}} = -4.97$$

Promedio	236.325
Desviación Estándar	4.73496
Mínimo	225.4
Máximo	252.9

TABLA 2. Estadísticos básicos del peso de las capsulas

Considerando el valor de las tablas de la t-student para 39 grados de libertad y  $\alpha/2 = 0.025$ , se tiene que la  $t$  de las tablas de la t-student es  $-2.02$ , por consiguiente, se tiene que  $-t_0 < -t_{((0.025)(39))}$ , es decir  $-4.97 < -2.02$ , por lo tanto, se rechaza que las capsulas cumplen con el peso promedio de 240 mg, en consecuencia, el peso promedio es menor, por lo tanto, la empresa requiere hacer ajustes para mover el promedio al valor optimo deseado.

*2.4.1. Estimación por intervalo para una media con varianza desconocida.* Una vez que se ha realizado la prueba de hipótesis de un parámetro, es recomendable complementar el resultado estadístico con la estimación del intervalo de confianza de la media poblacional.

Sea  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  es una muestra aleatoria de tamaño  $n$  tomada de una población normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  desconocida. Entonces un intervalo de confianza del 100%  $(1 - \alpha)$  para  $\mu$  esta dado por

$$\bar{x} - t_{(\alpha/2, n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{(\alpha/2, n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

Donde  $-t_{(\alpha/2, n-1)}$  y  $t_{(\alpha/2, n-1)}$  son los puntos críticos de la distribución t-student para un nivel de confianza  $\alpha$  y con  $n - 1$  grados de libertad, además  $\bar{x}$  y  $S$ , son la media y desviación estándar muestral respectivamente. Por ejemplo, considerando los datos del ejemplo del peso de las capsulas de la tabla 1, se tiene que la media y desviación estándar muestral son 236.325 y 4.73496 respectivamente (tabla 2), además el valor de la t-student de las tablas para un  $\alpha/2 = 0.025$ , ( $\alpha = 0.05$ ) y 39 grados de libertad es igual a 2.042 (figura 2); por consiguiente, utilizando la expresión 2 con un  $n = 40$ , el

intervalo de confianza para la media poblacional del peso de las capsulas se obtiene así,

$$\begin{aligned} 236.325 - 2.042 \frac{4.73496}{\sqrt{40}} \leq \mu \leq 236.325 + 2.042 \frac{4.73496}{\sqrt{40}} \\ 236.325 - 1.528 \leq \mu \leq 236.325 + 1.528 \\ 234.79 \leq \mu \leq 237.85 \end{aligned} \quad (3)$$

El resultado del intervalo de confianza de la expresión 3, estadísticamente se interpreta que con una confianza estadística del 95% la media poblacional del peso de las capsulas esta entre 234.79 mg a 237.85 mg, muy lejos de cumplir con el parámetro ideal de 240 mg, por lo que indica que la empresa farmacéutica debe modificar el proceso a fin de lograr que se alcance el peso ideal de las capsulas.

**2.5. Identificación de puntos atípicos.** Existen varias pruebas estadísticas para identificar puntos atípicos o puntos aberrantes, entre una de ellas es la grafica de caja o caja y bigotes.

*2.5.1. Diagrama de caja y bigote.* El diagrama de caja y bigote se utiliza para determinar la categoría de dato atípico para observaciones distantes. Su construcción es sencilla, primero se obtiene el cuartil.

Los cuartiles son aquellos números que dividen en cuatro partes porcentualmente iguales a un conjunto de datos ordenados. Hay tres cuartiles. El cuartil inferior ( $Q_1$ ), es el valor en el cual o por debajo del cual queda aproximadamente el 25% de los datos. El segundo cuartil o mediana es el valor central, por debajo del cual queda el 50% de los datos, el cuartil superior ( $Q_3$ ) es el valor por debajo del cual quedan el 75% de los datos.

Una vez obtenido los cuartiles se procede a dibujar una caja que se extienda desde el cuartil inferior del conjunto de datos hasta cuartil superior, este es el intervalo cubierto por el 50% de los valores de los datos ordenados de menor a mayor. Se dibuja una línea vertical en la mediana y se coloca un símbolo + en el lugar correspondiente de la media muestral. Los bigotes se dibujan desde los extremos de la caja hasta los valores mínimo y máximo de los datos, a menos que haya valores inusualmente muy alejados de la caja (a los cuales Tukey llama puntos extremos).

Para considerar si un punto es atípico se compara su valor contra el rango Inter-cuartílico que es igual a la diferencia entre el cuartil superior y el cuartil inferior, es

decir:

$$\text{Rango Intercuartílico} = Q3 - Q1.$$

Y un punto se considera un punto atípico o extremo si excede a más de 1.5 veces el rango intercuartílico. Así, un punto a más de 3 veces el rango intercuartílico se considera punto extremo lejano y se indican por un signo + superpuesto por arriba del punto. Si hay puntos aberrantes (extremos o extremos lejanos), los bigotes se dibujan en valor mínimo y máximo que no sean puntos aberrantes. En la figura 3 se puede ver la gráfica de caja y bigotes del ejemplo del peso de las capsulas de un medicamento.

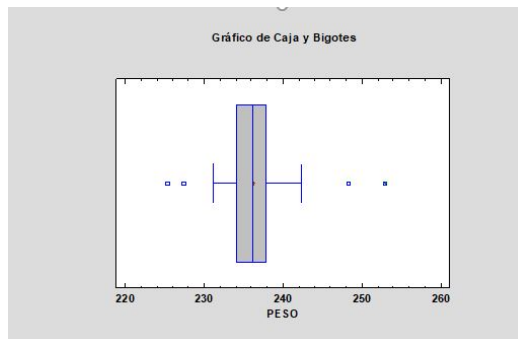


FIGURA 3. Diagrama de caja y bigotes del peso de las capsulas

Nótese que en el diagrama de caja y bigotes del peso de las capsulas se identifican 4 puntos atípicos, dos puntos por el lado izquierdo y dos puntos por el lado derecho. Por conocimiento de estadística se sabe que el promedio del peso se ve afectado por los puntos atípicos. Los puntos atípicos o valores extremos son observaciones que se consideran inusualmente alejadas de la masa del conjunto de datos, con base estadística no parecen corresponderse con el resto de los valores. Los puntos atípicos o valores extremos pueden ser consecuencia de algunos factores, entre los que destaca el origen de un error de medición, o pueden ser indicativos de fallas en la variación en los procesos; de cualquier forma, e independientemente del origen de un valor atípico se debe comprobar primeramente que es un dato atípico; si dicho dato es identificado como un punto atípico por una herramienta estadística, esto no implica que tenga que ser retirado del conjunto de datos. Estadísticamente se tiene el conocimiento de que cualquier prueba estadística paramétrica puede ser afectada por la presencia

de puntos atípicos. Una solución parcial sería quitar los puntos atípicos y realizar los análisis si ellos, con lo que se esperaría una mejor estimación de la media y de la desviación estándar, pero no es recomendable. Un enfoque sería realizar un análisis de datos utilizando la estadística robusta.

**2.6. Prueba de hipótesis con la estadística robusta.** Los métodos estadísticos robustos complementan a los métodos estadísticos clásicos y configuran un análisis de mejor estimación en los estadísticos ante la presencia de datos atípicos. El término robusto fue establecido por Box [1]. Trabajos posteriores fueron reforzando la teoría, destacando a Quenouille (1956) [2], con técnicas que permiten reducir el sesgo y establecer nuevos entornos para la estimación; Anscombe (1960) [3], estimulando la investigación teórica y experimental en datos extremos; Huber (1964) [4], desarrollando procedimientos estadísticos robustos; Hampel (1968) [5], introduciendo el uso de curvas de influencia para analizar la sensibilidad de los estimadores; Jaeckel (1971) [6] y Berger (1976) [7], sobre aspectos de admisibilidad de los estimadores. Se dice que una prueba estadística es robusta si a pesar de que no cumple que algún supuesto paramétrico (tamaño de muestra, normalidad, etc.) se pueden obtener conclusiones estadísticas válidas sin que afecte substancialmente en las conclusiones. Es decir, es la habilidad de una prueba estadística específica para suministrar una estimación exacta de la probabilidad de los errores tipo I y II, aun cuando algún supuesto paramétrico no se cumpla. Existen pruebas de hipótesis que son utilizadas, aun cuando no se cumplan los supuestos paramétricos, un ejemplo de ellas son las pruebas de hipótesis no paramétricas. Por lo tanto, la robustez es una propiedad deseable en los estadísticos de prueba.

**2.7. Estadística descriptiva.** En los análisis de los datos de las observaciones de las mediciones de la calidad de los productos en las industrias se debe de iniciar con un análisis de datos de estadística descriptiva. A partir de los análisis de datos de estadística descriptiva el ingeniero de la calidad podrá identificar qué tipo de variación se presenta en los procesos, y es posible determinar si la variación cumple con la variación determinada por las especificaciones, identificar las tendencias de los datos y verificar si el proceso está centrado con respecto al valor óptimo del proceso. Además, con un diagrama de caja y bigotes identificar la presencia de puntos atípicos o aberrantes. En esta sesión hablaremos de los estadísticos descriptivos tales como media recortada, media winsorizada, suma de desviaciones cuadráticas winsorizada,

varianza winsorizada, varianza recortada e intervalo de confianza de la media recortada; cuyo calculo es necesario para la realización de las pruebas estadísticas robustas y realizar análisis robustos y disminuir el efecto producido por la presencia de puntos atípicos.

*2.7.1. Media recortada.* La media recortada permite eliminar un determinado número o proporción de observaciones a cada lado de la distribución. Con este índice se puede obtener una medida de localización resistente tras el recorte de los posibles valores atípicos presentes en la distribución. Sea  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , observaciones o mediciones de muestra de tamaño  $n$ , la media recortada se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\bar{x}(p) = \frac{x_{g+1} + x_2 + \dots + x_{n-g}}{n - 2g} \quad (4)$$

Donde  $g$  representa el número de observaciones que deben ser eliminadas de cada extremo de la distribución y viene dado por la parte entera del valor resultante de  $g = pn$ ; donde  $p$  representa el porcentaje de mediciones a quitar de la muestra. En el ejemplo del peso de las capsulas y con base al diagrama de caja y bigotes de la figura 3 se observan 2 puntos atípicos por cada lado de la distribución (225.4, 227.4, 248.3, 252.9), por tanto, el valor de  $g$  es 2; en consecuencia, el valor de  $p$  es el resultado de  $2/40$  ( $p = g/n$ ), lo que representa que  $p = 0.05$  y por consiguiente se recortara la muestra en 5%. Utilizando la expresión 4, la media recortada del peso de las capsulas al 5% su valor estimado es  $\bar{x}(p) = 236.08$ .

*2.7.2. La media winsorizada.* La diferencia entre la media recortada y la media winsorizada es que en lugar de eliminar un numero entero de observaciones de cada extremo, se sustituye por el ultimo valor, en cada extremo de la distribución de los datos. La media winsorizada  $\bar{x}_w(p)$  con una proporción  $p$  de casos sustituidos en cada extremo viene dada por:

$$\bar{x}_w(p) = \frac{(g+1)x_{g+1} + x_{g+2} + \dots + (g+1)x_{n-g}}{n} \quad (5)$$

Utilizando la expresión 5 en los datos del peso de las capsulas la media winsorizada es 236.15.

2.7.3. *La suma de desviaciones cuadráticas winsorizada.* La suma de las desviaciones cuadráticas winsorizada  $SDC(\bar{x}_w(p))$ , representa la distancia cuadrática de las observaciones respecto a su media y se obtiene mediante la siguiente expresión,

$$SDC(\bar{x}_w(p)) = (g+1)(x_{g+1} - \bar{x}_w(p))^2 + (x_{g+2} - \bar{x}_w(p))^2 + \dots + (g+1)(x_{n-g} - \bar{x}_w(p))^2 \quad (6)$$

El valor de la suma de la desviaciones cuadráticas winsorizada se los pesos de las capsulas es

$$SDC(\bar{x}_w(p)) = 475.9482$$

2.7.4. *Varianza winsorizada.* La Varianza winsorizada  $S_{\bar{x}_w}^2(p)$  se obtiene como una varianza muestral, una vez que la muestra fue winsorizada y se obtiene mediante la siguiente expresión,

$$S_{\bar{x}_w}^2(p) = \frac{SDC(\bar{x}_w(p))}{n-1} \quad (7)$$

Utilizando la expresión 7 y los datos de los pesos de las capsula se tiene que la varianza winsorizada es  $S_{\bar{x}_w}^2(p) = 12.2038$

2.7.5. *Varianza recortada.* El valor de la varianza winsorizada es utilizada para obtener la varianza estimada de una media recortada  $\bar{x}(p)$  (ver expresión 4). El valor de la varianza recortada se obtiene mediante la siguiente expresión,

$$S_{\bar{x}}^2(p) = \frac{S_{\bar{x}_w}^2(p)}{n(1-2p)^2} \quad (8)$$

Tomando los pesos de la capsulas y la expresión 8 la varianza recortada del es  $S_{\bar{x}}^2(p) = 0.3766$ .

**2.8. Prueba de hipótesis de un parámetro de la media poblacional.** El planteamiento de las hipótesis del ejemplo de los pesos de las capsulas (tabla 1) se puede expresar simbólicamente como,

$$H_0 : \mu = 240 \quad mg$$

$$H_a : \mu \neq 240 \quad mg$$

Considerando la estimación de la media recortada  $\bar{x}(p)$  (expresión 4) y la desviación y la suma de las desviaciones cuadráticas winsorizada (expresión 6, Tukey y McLaughlin (11) propusieron la siguiente prueba robusta,

$$t = \frac{\bar{x}(p) - \mu}{\sqrt{\frac{SDC(\bar{x}_w(p))}{h(h-1)}}} \quad (9)$$

Donde  $h = n - 2g$  es el número de observaciones que quedan después de eliminar  $g$  observaciones en cada extremo de la distribución de los datos. El valor de la  $t$  de la expresión 9 es comparada con el valor el valor de las tablas de la t-student para un nivel de confianza dado  $\alpha$  y  $h - 1$  grados de libertad.

Considerando el ejemplo de los pesos de las capsulas y utilizando la expresión 9 se tiene que el estadístico de prueba  $t$  es

$$t = \frac{236.08 - 240}{\sqrt{\frac{475.9482}{36(35)}}} = -6.379$$

Considerando el valor de las tablas de la t-student para  $h - 1 = 35$  grados de libertad y  $\alpha/2 = 0.025$ , se tiene que la  $t$  de las tablas de la t-student es  $-2.03$ , en consecuencia, se tiene que  $-t_0 < -t_{((0.025)(35))}$ , es decir  $-6.379 < -2.03$ , por lo tanto, se rechaza que las capsulas cumplen con el peso promedio de  $240mg$ , por consiguiente, el peso promedio es menor, por lo tanto, la empresa requiere hacer ajustes para mover el promedio al valor optimo deseado.

**2.9. Intervalo de confianza para la media recortada.** Después de haber probado la hipótesis de la media recortada como se ilustra en la sección 2.8, es recomendable complementar el resultado estadístico con la estimación del intervalo de confianza



de la media poblacional. Para ello, en primer lugar, se requiere conocer el valor del error estándar muestral de la distribución de medias recortadas, que depende de la proporción de las observaciones recortadas. El error estándar de la media recortada es estimado mediante la siguiente expresión,

$$EE(\bar{x}(p)) = S_{\bar{x}(p)} \quad (10)$$

Una vez estimado el error estándar de la media recortada se procede a estimar el intervalo de confianza de la media población mediante la siguiente expresión,

$$236.08 - t_{(\alpha/2, n-2g-1)} S_{\bar{x}(p)} \leq \mu \leq 236.08 + t_{(\alpha/2, n-2g-1)} S_{\bar{x}(p)} \quad (11)$$

Donde  $n - 2g - 1$  son los grados de libertad de la distribución t-student después de recortar la muestra en una proporción  $p$ ;  $\alpha$  es el nivel de confianza dado y  $S_{\bar{x}(p)}$  es el error estándar de la media recortada. Utilizando la expresión 11 y el valor de la t-student de la tabla igual a 2.03 para 35 grados de libertad y  $\alpha/2 = 0.025$  ( $\alpha = 0.05$ ); el intervalo de confianza para la media recortada del ejemplo del peso de las capsulas se obtiene así,

$$\begin{aligned} 236.08 - 2.03(0.6136) &\leq \mu \leq 236.08 + 2.03(0.6136) \\ 236.08 - 1.24 &\leq \mu \leq 236.08 + 1.245 \\ 236.08 - 1.245 &\leq \mu \leq 236.08 + 1.245 \\ 234.83 &\leq \mu \leq 237.32 \end{aligned} \quad (12)$$

El resultado del intervalo de confianza de la expresión 12, estadísticamente se interpreta que con una confianza estadística del 95 % la media poblacional del peso de las capsulas esta entre 234.83 mg a 237.32 mg, muy lejos de cumplir con el parámetro ideal de 240 mg, por lo que indica que la empresa farmacéutica debe modificar el proceso a fin de lograr que se alcance el peso ideal de las capsulas.

### 3. CONCLUSION

En la tabla 3.1 se puede ver una síntesis de los resultados del intervalo de confianza de la media al 95 % de la prueba paramétrica vs la prueba robusta. Nótese que ambas pruebas rechazan el cumplimiento del parámetro del peso de las capsulas. Aunque la estimación de la media en la prueba paramétrica incluye los puntos atípicos de ambos extremos, podemos ver en la estimación de la prueba robusta con la media recortada no se observa diferencias estadísticas en la estimación tanto de la media como el del intervalo de confianza, lo que demuestra una buena aproximación con lo obtenido en lo paramétrico, a pesar de haberse quitado los puntos atípicos. Esto demuestra una gran bondad en el uso de pruebas robustas en problemas de mediciones de productos industriales que se pueden ver afectados sus resultados en los parámetros de calidad. Aunque la pruebas robustas se pueden utilizar ante la presencia de puntos atípicos o puntos alejados, se recomienda investigar la procedencia o causa que provoca la presencia de ello; la recurrencia de puntos atípicos en la toma de las muestras es un indicativo que puede haber una afectación directa en el proceso, aunque siempre es conveniente revisar y analizar el sistema de medición y la calibración de los instrumentos de medición, antes de realizar cualquier mejora del proceso.

Estimación paramétrica		Estimación Robusta	
Media muestral	Intervalo de confianza al 95 %	Media muestral	Intervalo de confianza al 95 %
236.325	234.79 – 237.85	236.08	234.83 – 237.32

### REFERENCIAS

- [1] Box GEP. Non-normality and tests on variances. *Biometrika*, 40:318–335, 1953.
- [2] Quenouille MH. Notes on bias in estimation. *Biometrika*, 43(3/4):353–360, 1956.
- [3] Anscombe FJ and Guttman I. Rejection of outliers. *Technometrics*, 2(2):123–147, 1960.
- [4] Huber PJ. Robust estimation of a location parameter. *Ann Math Stat*, 35(1):73–101, 1964.
- [5] Hampel F. The influence curve and its role in robust estimation. *Journal of the american statistical association*, 69(346):383–393, 1974.
- [6] Jaeckel LA. Some flexible estimates of location. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(5):1540–1552, 1971.
- [7] Berger J. Admissible minimax estimation of a multivariate normal mean under arbitrary quadratic loss. *The Annals of Statistics*, 4:223–226, 1976.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CUCEI UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. GRAL. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN 1421, OLÍMPICA, 44430 GUADALAJARA, JAL.

*E-mail address:* `jessica.machuca@academicos.udg.mx`

*E-mail address:* `jorge.rcastro@academicos.udg.mx`

*E-mail address:* `porfirio.ggonzalez@academicos.udg.mx`

*E-mail address:* `cecilia.garibay@academicos.udg.mx`

*E-mail address:* `lizbeth.diaz@academicos.udg.mx`



# Álgebra y Topología



## UNA INTRODUCCIÓN A LAS VARIEDADES DETERMINANTALES

O. MATA-GUTIÉRREZ, M.P. SUÁREZ-FERNÁNDEZ, J.M. MÁRQUEZ-BOBADILLA

RESUMEN. Estas notas fueron creadas para la Escuela de Verano del Departamento de Matemáticas del 2023 y están dirigidas a estudiantes con conocimientos básicos de anillos, campos y espacios vectoriales. Su intención es dar una breve introducción a algunos conceptos básicos de la Geometría Algebraica y mostrar algunos ejemplos de Variedades Determinantales. En particular, un objetivo entender a las Variedades Grassmannianas como un objeto que parametriza subespacios vectoriales y que además tiene una estructura de Variedad Proyectiva Determinantal. Adicionalmente caracterizar a otras variedades que surgen en la Geometría Algebraica.

Se espera que estas notas ayuden al lector interesado a incursionar en el mundo de la Geometría Algebraica. El material aquí expuesto puede encontrarse en libros clásicos como [F], [JH], [RH],[Sh],[SL]. Al estudiante de licenciatura que cuente con conocimientos básicos de teoría de grupos, anillos y espacios vectoriales, le será una colección de valiosas experiencias.

### 1. DETERMINANTES, INVERSA, CAMBIO DE BASE

En esta sección, recordaremos el determinante de una matriz y la inversa de una matriz. Iniciamos con la definición, luego veremos como calcular la inversa en distintos contextos, concluiremos con un ejemplo para ilustrar el cambio de base (de componentes).

Consideremos el siguiente conjunto  $M = A_{n \times n}$  de matrices cuadradas con entradas en  $S$ . Se define el *determinante* como una función  $\det: M \rightarrow S$ . En particular, el conjunto codominio puede ser los reales  $\mathbb{R}$  o los complejos  $\mathbb{C}$ .

Más aún, si  $A = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , entonces

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

---

*Palabras Claves.* Geometría Algebraica, Variedades, Grassmanniana.

con  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ , los cuales se les conoce como los *cofactores* de la matriz  $A$  y las submatrices  $M_{ij}$  cuadradas, llamada *menor* de  $A$  y se obtiene de la matriz  $A$  al tomar matrices de  $(n-1) \times (n-1)$ , eliminando la fila  $i$  y la columna  $j$  de  $A$ .

Luego calcularemos el determinante bajo el siguiente criterio:

Si  $A = (a_{11})$  es una matriz de dimensión  $1 \times 1$ , entonces el determinante es  $a_{11}$ .

Por ejemplo, para matrices de dimensión  $2 \times 2$  al aplicar la definición, se tiene

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

pero como  $A_{11} = a_{22}$  y  $A_{12} = -a_{21}$ , se sigue que

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

En términos de permutaciones, para una matriz  $A = [a_{ij}]$  de  $n \times n$ , su determinante se calcula

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

donde  $(-1)^\sigma$  es la paridad de la permutación  $\sigma$  en el grupo  $S_n$  de biyecciones en un conjunto de  $n$  letras. La anterior nos lleva a hacer la siguiente observación.

**Observación 1.1.** *La anterior definición nos dice que para calcular el determinante no importa que fila o columna elijamos. Entonces cuando la matriz tenga un mayor número de ceros en una columna o fila te simplificará los cálculos, si la utilizas para obtener el determinante.*

Por otro lado, si  $A$  es una matriz cuadrada tal que  $\det(A) \neq 0$ , entonces la *inversa* de  $A$  es una matriz  $B$  cuadrada tal que  $AB = BA = \mathbb{I}_n$ .

Notemos que la inversa es única. Además, si  $A$  es una matriz diagonal la inversa es el recíproco de los elementos de la diagonal.

En general la inversa de una matriz la podemos calcular como

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)},$$

donde,  $\text{adj}(A)$  es la *adjunta de  $A$* , la cual se calcula como la matriz de cofactores transpuesta.

Una aplicación inmediata permite establecer como serán los componentes de un vector escrito en una base inicial (canónica) y después de considerar un cambio de base en el espacio, esto es, una elección de vectores linealmente independientes que genera el espacio y describan desde otro punto de vista a de algún vector de prueba (algo relativista (relatividad)):



**Ejemplo 1.2.** *Ilustremos adicionalmente, con convenciones matriciales adecuadas, como obtener los componentes nuevos de un vector en  $\mathbb{R}^2$  después ejecutar el cambio de base:*

$$A : \begin{aligned} b_1 &= e_1 + 3e_2, \\ b_2 &= e_1 + 5e_2, \end{aligned}$$

cuya matriz asociada elegimos  $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ .

Trabajamos para expresar la base  $e_1, e_2$  en términos de la base “nueva” y obtenemos

$$B : \begin{aligned} e_1 &= \frac{5}{2}b_1 - \frac{3}{2}b_2, \\ e_2 &= -\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2, \end{aligned}$$

con matriz asociada<sup>1</sup>

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

entonces si queremos, digamos, los componentes nuevos de  $v = 10e_1 + 23e_2$ , substituiremos la información en  $B$  y obtendremos  $v = \frac{27}{2}b_1 - \frac{7}{2}b_2$ . Vemos que las versiones matriciales están conectadas así:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

**Observación 1.3.** *El ejemplo ilustra que para obtener los componentes “nuevos”  $v_b$  de un vector, se multiplican la inversa de la matriz asociada al cambio de base por los componentes “viejos”  $v_e$ .*

Podríamos escribir

$$v_b = A^{-1}v_e.$$

Esto es la versión contravariante de  $b_i = Ae_i$ .

---

<sup>1</sup>note que  $[B] = [A]^{-1}$

## 2. FUNCIONES BILINEALES

Ahora, iniciaremos repasando lo que es una transformación lineal, rango de una transformación lineal, transformaciones bilineales, formas bilineales y algunas propiedades. Finalmente el espacio dual.

Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre un campo  $\mathbb{K}$ . Una *transformación lineal*, es una función  $T : V \rightarrow W$ , tal que satisface las siguientes condiciones:

- a)  $T(u + v) = T(u) + T(v)$ , para todo  $u, v \in V$ ,
- b)  $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

Si  $V, W$  espacios vectoriales, tal que  $\dim(V) = n$  y  $\dim(W) = m$ ,  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal. Entonces, consideremos los siguientes conjuntos:

$$\ker(T) := \{v \in V : T(v) = 0\},$$

$$\text{im}(T) := \{w \in W : \text{existe } v \in V, T(v) = w\}.$$

Los cuales son la *kernel* o núcleo y la *imagen* de la transformación transformación lineal. Además, el  $\ker(T)$  y  $\text{im}(T)$  son subespacios de  $V$  y de  $W$  respectivamente. Dado que son subespacios, entonces tienen un base y se sigue que:

El *rango* es la dimensión de la imagen de la transformación lineal, denotado por  $\rho(T)$  y la *nulidad*  $\nu(T)$  es la dimensión del kernel o el núcleo.

Sabemos que se cumple la siguiente relación

$$\rho(T) + \nu(T) = \dim(V). \quad (1)$$

**Ejemplo 2.1.** Sean  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $W = \mathbb{R}^2$  y  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal definida por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Ahora, calcularemos el  $\ker(T)$ , para ello tenemos que si  $v \in \mathbb{R}^3$ , entonces  $T(v) = 0$  de donde

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así,  $x + y = 0$  y  $x - y = 0$  por lo que  $x = y = 0$  y  $\ker(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ , se sigue que  $\nu(T) = 0$  y 1 por lo que  $\rho = 2$ .

A continuación daremos lo que es una función bilineal.

Sean  $U, V, W$  espacios vectoriales sobre el campo  $\mathbb{K}$ . Se dice que  $B : U \times V \rightarrow W$  es una *función bilineal* si cumple lo siguiente:

- a)  $B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v)$
- b)  $B(u, v_1 + v_2) = B(u, v_1) + B(u, v_2)$
- c)  $B(\lambda u, v) = B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v)$ , Para todo  $u, u_1, u_2 \in U, v, v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{K}$

**Observación 2.2.** *La definición nos dice que al mantener una variable fija digamos  $u \in U$ , la función  $u \mapsto B(u, v)$  es lineal o bien  $v \in V, v \mapsto B(u, v)$  es lineal.*

Además, en el caso particular que el espacio vectorial  $W = \mathbb{K}$ , las funciones bilineales se dicen *formas bilineales*.

**Ejemplo 2.3.** *Si  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(u, v) = uv$ , es una forma bilineal.*

**Ejemplo 2.4.** Si  $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $V := \mathbb{R}^2$

$$B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$B(u, v) = u^T A v = a_{11} u^2 + a_{12} u v + a_{21} v u + a_{22} v^2$$

es una forma bilineal.

Si  $V$  es un espacio vectorial y  $\mathbb{K}$  es un campo, entonces

$$\mathbf{Bil}(V) := \{B : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : B \text{ es bilineal}\}$$

Notemos que  $f, g \in \mathbf{Bil}(V)$ ,  $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$  se cumple que:

- a)  $(f + g)(u, v) = f(u, v) + g(u, v)$ ,
- b)  $(\lambda f)(u, v) = \lambda f(u, v)$ .

Lo cual da a  $\mathbf{Bil}(V)$  estructura de **espacio vectorial**. Generalmente, los conjuntos se relacionan mediante funciones, en los espacios vectoriales buscamos que se relacionen mediante funciones que preserve la estructura vectorial para ello tenemos el siguiente conjunto

$$\text{hom}_{\mathbb{K}}(V, W) := \{T : V \rightarrow W : T \text{ es lineal}\}.$$

**Definición 2.5.**

$$V^* = \text{hom}(V, \mathbb{K}) = \{f : V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es lineal}\},$$

al cual se le conoce como el espacio dual de  $V$ .

**Observación 2.6.**  $V^*$  tiene estructura de espacio vectorial

- $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$ ,
- $(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$ ,  $u \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ .

A continuación obtendremos una base de  $V^*$  a partir de la base de  $V$ .

**Proposición 2.7.** Sean  $\{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$  espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{K}$ . Entonces existen  $f_1, \dots, f_n \in V^* = \text{hom}(V, \mathbb{K})$  funcionales tales que  $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ .

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

son linealmente independientes y generan a  $V^*$ .

**Demostración.** Sea  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n = 0$ , evaluando en  $v_i$  se tiene  $\alpha_i f_i(v_i) = \alpha_i = 0$ . Por otro lado, si  $f \in V^*$  tal que  $f(v_i) = \alpha_i$  y consideremos  $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ , notemos que  $g(v_i) = \alpha_i$   $1 \leq i \leq n$   $v_i \in V$  elemento de la base luego  $f = g$ . Por tanto  $\{f_i\}_{i=1}^n$  genera a  $V^*$ . Por tanto  $\{f_i\}_{i=1}^n$  es base de  $V^*$ , por lo tanto  $\dim(V^*) = n$

**Ejemplo 2.8.** Considera  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  base de  $\mathbb{R}^2$ . entonces obtén una base para la dual  $\mathbb{R}^{2*}$ .

Debemos encontrar la base de  $(\mathbb{R}^2)^*$ , digamos  $\{f_1, f_2\}$ , donde

$$f_1(x, y) = \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad , \quad f_2(x, y) = \beta_1 x + \beta_2 y$$

$$f_1(1, 1) = \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad , \quad f_1(0, 2) = 2\alpha_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{entonces la inversa es } \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1(x, y) = x \quad , \quad f_2(x, y) = \beta_1 x + \beta_2 y,$$

$$f_2(1, 1) = \beta_1 + \beta_2 = 0 \quad , \quad f_2(0, 2) = 2\beta_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ entonces la inversa es } \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$f_2(x, y) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

**Ejemplo 2.9.** Otra forma de ilustrar sería, con los datos del cambio de base:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11} e_1 + a_{12} e_2, \\ A : \\ b_2 &= a_{21} e_1 + a_{22} e_2, \end{aligned}$$

determinemos en forma eficiente su base dual. Entonces la matriz asociada

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

debe tener  $\det A \neq 0$  para que  $A$ : de arriba sea un cambio de base.

Observe que  $\mathbb{1} = [A]^{-1}[A]$  lo que implica que las filas de  $[A]^{-1}$  hacen Delta Kronecker con las columnas de  $[A]$  i.e.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ahí es donde podemos ver la base dual  $f_1, f_2$  de la base  $b_1, b_2$ , a saber

$$\begin{aligned} f_1 &= [ b_{11} \quad b_{12} ], \\ f_2 &= [ b_{21} \quad b_{22} ]. \end{aligned}$$

En términos de la base dual  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , canónica de  $e_1, e_2$  tendremos

$$\begin{aligned} f_1 &= b_{11}\varepsilon_1 + b_{12}\varepsilon_2, \\ f_2 &= b_{21}\varepsilon_1 + b_{22}\varepsilon_2, \end{aligned}$$

que tiene matriz asociada  $[A]^{-\top}$ .

**Definición 2.10.** Una forma bilineal  $B$  se dice simétrica si

$$B(u, v) = B(v, u)$$

Relación entre las matrices simétricas y formas bilineales simétricas

**Proposición 2.11.** Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces una forma bilineal es simétrica si y sólo si la matriz asociada es simétrica.

**Demostración.** Sea  $B(X, Y) = X^\top AY$ , además se tiene que  $X^\top AY = Y^\top A^\top X$  y  $X^\top AY \in \mathbb{K}$ , luego se tiene que

$$B(X, Y) = X^\top AY = Y^\top A^\top X = Y^\top AX = B(Y, X),$$

dado que  $B$  es simétrica y  $A = A^\top$ .

Por otro lado, si  $B(X, Y) = X^\top AY = Y^\top A^\top X = Y^\top AX = B(Y, X)$ .

**Definición 2.12.** Si  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  es una forma bilineal simétrica, entonces la forma bilineal cuadrada  $q : V \rightarrow \mathbb{K}$  es  $q(v) = B(v, v)$ ,  $v \in V$

Nótese que

- a)  $q(X) = B(X, X) = X^T A X$
- b) Si  $A$  es una matriz diagonal  $q(X) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$
- c)  $B(u, v) = \frac{1}{2}[q(u+v) - q(u) - q(v)]$

**Observación 2.13.** El siguiente cálculo

$$v^T Q w = (BB^{-1}v)^T Q (BB^{-1}w) \\ (B^{-1}v)^T (B^T Q B) B^{-1}w$$

demuestra que las versiones **nuevas**  $B^{-1}v$ ,  $B^{-1}w$  de  $v, w$  ambas respectivas: –después de un cambio de base  $B$ – es **invariante** cuando la matriz que los empareja es  $B^T Q B$ .

**Ejemplo 2.14.** ¿Cómo cambia una forma cuadrática cuando se hace un cambio de base?

Si  $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una forma bilineal definida como

$$B((a, b)^T, (c, d)^T) = 2ad.$$

Entonces tenemos la matriz  $B(e_i, e_j)$

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_1, e_2) \\ B(e_2, e_1) & B(e_2, e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con lo que se puede hacer

$$((a, b)^T, (c, d)^T) \mapsto \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = 2ad.$$

Pero si tenemos el cambio de base  $A = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ , esto tiene matriz

asociada  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  y los componentes nuevos de los vectores  $v = (a, b)^T$  y  $w = (c, d)^T$  son

$$A^{-1}v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2/3 b \\ 1/3 b \end{bmatrix},$$

y

$$A^{-1}w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - 2/3 d \\ 1/3 d \end{bmatrix}.$$

Por otro lado  $v^T B w = (A^{-1} v)^T (A^T B A) A^{-1} w$  proporciona

$$A^T B A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Observación 2.15.** Más aún si el bilineal  $Q$  tiene matriz simétrica entonces los eigenvalores de  $Q$  son números reales y si los eigen-vectores son elegidos con módulo uno entonces  $B^T Q B = B^{-1} Q B$  es una matriz diagonal con los eigen-valores en su diagonal.

Con la misma idea pero ahora para una matriz arbitraria  $Q$  la descomposición

$$Q = S + A$$

en sus partes simétrica y alternante, estudiamos qué pasa si queremos saber el signo de la correspondiente forma cuadrática. Tenemos

$$\begin{aligned} v^T Q v &= v^T (S + A) v, \\ &= v^T S v + v^T A v, \\ &= v^T S v + 0, \\ &= (D^{-1} v)^T (D^T S D) (D^{-1} v), \end{aligned}$$

donde si elegimos  $D$  el cambio de base de eigenvectores unitarios de  $S$  entonces  $D^T S D$  será matriz diagonal con sus eigenvalores en la diagonal. Ahí podemos ver los signos pues las matrices simétricas, todas, tienen espectro real.

El término  $v^T A v$  es cero porque  $v^T A v = (v^T A v)^T = v^T A^T v = -v^T A v$  en cualquier campo de característica  $\neq 2$ .

### 3. MULTILINEAL Y ÁLGEBRA EXTERIOR

**Observación 3.1.** El propósito de esta sección es obtener una visión proyectiva, del álgebra de Grassmann de un espacio vectorial, empleada para enriquecer experiencias con los  $k$ -vectores. Los únicos requisitos es haber estado expuesto a algunas ideas y técnicas de la teoría de espacios vectoriales.

Recordemos que, una función lineal en un espacio vectorial  $V$  en el campo sobre el cual está definido,  $V \rightarrow \mathbb{K}$ , se llama **funcional lineal** (o covector) y el conjunto de ellos forman otro espacio vectorial llamado el dual de  $V$  y se simboliza con  $V^*$ .

Las siguientes siete subsecciones estructuran el lenguaje de la generalización del uso del concepto determinantal en las álgebras de Grassmann del par inicial  $V$  y  $V^*$ .

**3.1. Espacio dual, construcción de la base, el doble dual.** Supongamos que  $V$  está generado por los básicos  $b_1, \dots, b_d$ , entonces una base para el dual se obtiene al definir asignaciones  $\beta^j$  con  $\beta^j(b_k) = \delta_k^j$ , y mediante extensión lineal, para cualquier vector  $x = x^1 b_1 + \dots + x^d b_d$ , tenemos

$$\begin{aligned}\beta^j(x) &= x^1 \beta^j(b_1) + \dots + x^d \beta^j(b_d), \\ &= x^j\end{aligned}$$

por esta propiedad, a ellos, se les llama también **proyectores**.

También tenemos el dual del dual,  $(V^*)^*$ , como el conjunto de funcionales lineales  $V^* \rightarrow \mathbb{K}$ . Cada elemento  $v \in V$  permite definir  $\bar{v}: V^* \rightarrow \mathbb{K}$  mediante

$$f \mapsto \bar{v}(f) = f(v),$$

como funcional lineal en el dual, es decir, como elemento del doble dual.

**3.2. Tensores de rango uno y dos, producto tensorial.** Los tensores de rango uno de  $V$  son  $V$  mismo y su dual  $V^*$ . Para tensores de rango dos. Una función bilineal en un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $\mathbb{K}$  es una asignación

$$V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(v, w) \mapsto B(v, w),$$

que es lineal en sus dos argumentos.

Pero también tenemos funciones bilineales

$$V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{K}, \quad V \times V^* \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{y} \quad V^* \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

El producto tensorial  $V \otimes V$  se puede caracterizar considerando una base de  $V$ , digamos  $\{b_1, \dots, b_d\}$  para luego construir  $V \otimes V$  el espacio vectorial generado por los  $d \times d$  símbolos

$$b_1 \otimes b_1, b_1 \otimes b_2, \dots, b_i \otimes b_j, \dots, b_d \otimes b_d.$$

Así, tendremos para dos genéricos  $v = v^1 b_1 + \dots + v^d b_d$  y  $w = w^1 b_1 + \dots + w^d b_d$  su producto tensorial es

$$v \otimes w = v^1 w^1 b_1 \otimes b_1 + \dots + v^i w^j b_i \otimes b_j + \dots + v^d w^d b_d \otimes b_d.$$

Los otros productos tensoriales posibles son  $V^* \otimes V^*$ ,  $V \otimes V^*$  y  $V^* \otimes V$ . Estos son los tensores de rango dos para  $V$ .



**3.3. Propiedad universal del producto tensorial, subespacio alternante.** En general el producto tensorial de dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$  se puede caracterizar como el espacio vectorial  $V \otimes W$  que cumple la **propiedad universal**:

*Para cada función bilineal  $Q: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  existe un único funcional lineal  $L_Q: V \otimes V \rightarrow \mathbb{K}$  tal que  $Q(v, w) = L_Q(v \otimes w)$ .*

Una función bilineal  $Q$  que satisface

$$Q(v, w) = -Q(w, v)$$

recibe el nombre de **alternante** y ellas forman el subespacio  $\bigwedge^2 V$  de  $V \otimes V$ .

El análogo en el dual es  $\bigwedge^2 V^*$  subespacio de  $V^* \otimes V^*$ .

Observemos que cada elemento  $\beta^k \otimes \beta^l$  de  $V^* \otimes V^*$  permite definir

$$\beta^k \otimes \beta^l: V \times V \rightarrow \mathbb{K},$$

mediante

$$\beta^k \otimes \beta^l(v, w) = \beta^k(v)\beta^l(w),$$

lo cual es bilineal, y también a

$$\beta^k \wedge \beta^l: V \times V \rightarrow \mathbb{K},$$

vía

$$\beta^k \wedge \beta^l(v, w) = \beta^k(v)\beta^l(w) - \beta^l(v)\beta^k(w)$$

lo cual es bilineal y alternante.

**Ejemplo 3.2.** *Discutamos el ejemplo que ilustra como cambian los 2-vectores cuando hay un cambio de base. Sea*

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 \\ A: \quad b_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \end{aligned}$$

Entonces la matriz asociada  $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  debe tener  $\det A \neq 0$  para que el cambio en  $A$ : sea un cambio de base.

Tenemos dos productos  $e_1 \wedge e_2$  y  $b_1 \wedge b_2$  y vamos a resolver como uno depende del otro mediante

$$\begin{aligned} b_1 \wedge b_2 &= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2) \wedge (a_{12}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1 \wedge e_2, \\ &= \det A e_1 \wedge e_2. \end{aligned}$$

**3.4. El alternante, como Funciones tri-lineales.** Mucho de lo anterior es generalizable a más factores en los productos. Por ejemplo, con tres funcionales  $f, g, h \in V^*$  en  $\bigwedge^3 V$  tenemos a el 3-vector  $f \wedge g \wedge h$  que pueden ser pensados como funciones trilineales

$$V \times V \times V \rightarrow \mathbb{K}.$$

Estos son alternantes, y están emparentadas con el determinante de matrices de  $3 \times 3$ , a saber

$$f \wedge g \wedge h = f \otimes g \otimes h - f \otimes h \otimes g + g \otimes h \otimes f - g \otimes f \otimes h + h \otimes f \otimes g - h \otimes g \otimes f.$$

Esto claramente evoca

$$f \wedge g \wedge h(u, v, w) = \det \begin{bmatrix} f(u) & g(u) & h(u) \\ f(v) & g(v) & h(v) \\ f(w) & g(w) & h(w) \end{bmatrix},$$

desarrollado por cofactores usando la primera final.

Si  $S_k$  el grupo simétrico de orden  $k$ , entonces en el caso general  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$  se puede obtener

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)},$$

en  $\bigwedge^k V$  y por otro lado

$$f^1 \wedge \cdots \wedge f^k = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma f^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f^{\sigma(k)},$$

en  $\bigwedge^k V^*$ .

**3.5. El proyectivo del  $\mathbb{K}$ -subespacio alternante.** Observemos que cuando se tiene una elección en  $V$  de un conjunto de  $k$  vectores linealmente independientes  $w_i$  determinados por combinaciones lineales de previos  $k$  vectores  $v_j$  también linealmente independiente entonces

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_k = \lambda v_1 \wedge \cdots \wedge v_k,$$

en  $\bigwedge^k V$ , donde  $\lambda$  es el determinante de la matriz asociada a las combinaciones lineales de los  $w_i$  en términos de los  $v_j$ .

Esto define una relación de equivalencia entre los  $k$ -vectores obtenidos por las diferentes forma de elegir los generadores del subespacio. Se denotará con  $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$  el conjunto de clases de equivalencia.

Esta es una propiedad importante en el momento que se utilicen las técnicas proyectivas en los espacios de los  $k$ -vectores.

Tendremos  $\bigwedge^k V \cong \bigwedge^{d-k} V^*$ . Esto es por que ambos espacios vectoriales tienen la misma dimensión  $\binom{d}{k} = \binom{d}{d-k}$ .

Si denotamos con  $G(k, V)$  como el conjunto de los subespacios de dimensión  $k$  en  $V$  entonces ellos tienen una base  $v_1, \dots, v_k$  que lo genera y así podemos asignar

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \bigwedge^k V,$$

o bien

$$[v_1 \wedge \dots \wedge v_k] \in \mathbb{P}(\bigwedge^k V).$$

Con estos ingredientes se puede inducir una aplicación

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V),$$

dada por

$$u \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge u,$$

donde vemos que si  $u \in W = \text{gen}\{v_1, \dots, v_k\}$  entonces  $u$  está en el núcleo de esta aplicación o en otras palabras  $\ker \varphi = W$ .

El siguiente ejemplo, muestra la relación entre las geometrías euclídea y la proyectiva.

**Ejemplo 3.3.** Si consideramos  $G(2, 3)$  asociar con  $\bigwedge^2 \mathbb{K}^3$  tomamos los datos

$$b_1 = e_1 + e_2,$$

$$b_2 = e_1 - e_3.$$

El subespacio  $W$  generado por ellos se asocia

$$w = b_1 \wedge b_2 = e_2 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_1 + e_1 \wedge e_2$$

entonces los componentes de  $w$  en las base clásica

$$e_2 \wedge e_3, \quad e_3 \wedge e_1, \quad e_1 \wedge e_2$$

de  $\bigwedge^2 \mathbb{K}^3$  determina el triplete de datos  $\{1, 1, 1\}$  y así establecer las coordenadas proyectivas  $[1 : 1 : 1]$  en  $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{K}^3)$

Es interesante observar la analogía con  $b_1 \times b_2 = e_1 + e_2 + e_3$  para determinar la dirección perpendicular al plano  $W$ .

Lo algebraico de esta geometría consiste en percibir a el plano  $W$  relacionado a la expresión

$$x + y + z = 0.$$

Esto se generaliza así: Si  $W$  tiene generadores  $b_i = \sum_s b^s_i e_s$  para  $i = 1, 2$  entonces

$$b_1 \wedge b_2 = A^{23} e_2 \wedge e_3 + A^{31} e_3 \wedge e_1 + A^{12} e_1 \wedge e_2,$$

donde los  $A^{ij}$  son las menores de la matriz rectangular asociada a la elección de los  $b_1, b_2$

$$A = \begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \\ b^3_1 & b^3_2 \end{pmatrix}.$$

Es decir, coordenadas proyectivas del subespacio es la dirección

$$[A^{23} : A^{31} : A^{12}]$$

en  $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{K}^3)$ .

**3.6. El álgebra de Grassmann asociada a un espacio vectorial.** Un  $k$ -vector en  $V$  también se puede ver como una función  $k$ -lineal

$$V^* \times \cdots \times V^* \rightarrow \mathbb{K}$$

que es alternante, en otras palabras dada una colección de  $k$  vectores  $v_1, \dots, v_k$ , el objeto  $k$ -lineal alternante,  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$  asocia a cada  $k$ -tupla de covectores  $f^1, \dots, f^k$  el número

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k(f^1, \dots, f^k) = \det[f^i(v_j)].$$

Simbolizaremos con  $\bigwedge^k V$  al espacio vectorial de los  $k$ -vectores de  $V$ . Así  $\bigwedge^1 V = V$ . Similarmente tenemos  $\bigwedge^r V^*$  es espacio vectorial de funciones  $r$ -multilineales

$$V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{K},$$

determinados por  $f^1 \wedge \cdots \wedge f^r$  que transforma

$$f^1 \wedge \cdots \wedge f^r(v_1, \dots, v_r) = \det[f^i(v_j)].$$

Continuando con este tren de ideas empleamos a los espacios  $\bigwedge^k V$  y  $\bigwedge^k V^*$ , para cada  $k$  desde 0 hasta  $d$  como sumandos directos en la construcción de los espacios

$$\bigwedge V = \bigwedge^0 V + \bigwedge^1 V + \cdots + \bigwedge^d V,$$

tanto como a

$$\bigwedge V^* = \bigwedge^0 V^* + \bigwedge^1 V^* + \cdots + \bigwedge^d V^*,$$

las cuales son las **álgebras de Grassmann** asociadas a  $V$ .

Le llamamos álgebra porque entre los sumandos hay un producto, llamado **producto exterior**

$$\wedge: \bigwedge^k V \times \bigwedge^l V \rightarrow \bigwedge^{k+l} V,$$

que a nivel generadores naturalmente se opera

$$(b_1 \wedge \cdots \wedge b_k) \wedge (c_1 \wedge \cdots \wedge c_l) = b_1 \wedge \cdots \wedge b_k \wedge c_1 \wedge \cdots \wedge c_l \in \bigwedge^{k+l} V$$

Similarmente tenemos

$$\wedge: \bigwedge^k V^* \times \bigwedge^l V^* \rightarrow \bigwedge^{k+l} V^*.$$

#### 4. VARIETADES ALGEBRAICAS Y PROYECTIVAS

A partir de este momento denotaremos por  $\mathbb{K}$ , a un campo algebraicamente cerrado y por  $\mathbb{K}^n$  al conjunto de  $n$ -adas  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  con  $a_i \in \mathbb{K}$ . Además,  $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  representará al anillo de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{K}$  y  $n$  indeterminadas.

Note que, si  $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  es un polinomio, una raíz para  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un elemento  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  tal que

$$p(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

En general, si tenemos un conjunto de polinomios

$$E := \{p_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)\}_{\alpha \in \Gamma} \subseteq \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n],$$

denotamos por  $Z(E)$  al conjunto de todas las soluciones comunes a los polinomios  $p_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ . Esto es:

$$Z(E) := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid p_\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \forall p_\alpha \in E\}.$$

Si  $E$  es un conjunto finito (con  $n$  elementos), entonces simplemente escribiremos  $Z(p_1, p_2, \dots, p_n)$  en lugar de  $Z(E)$ . Al conjunto  $Z(E)$  se le conoce como **conjunto algebraico asociado a  $E$** .

Dado el conjunto  $E$  definido como antes, denotamos por

$$\langle E \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n],$$

al ideal generado por  $E$ .

**Ejercicio 4.1.** Verifique que  $Z(E) = Z(\langle E \rangle)$ .

Recordemos que  $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  es un anillo Noetheriano. En consecuencia,  $\langle E \rangle$  es un ideal finitamente generado y partir del Ejercicio 4.1 concluimos que, los conjuntos algebraicos, se pueden definir como soluciones comunes a un número finito de polinomios.

**Definición 4.2.** Un conjunto algebraico en  $\mathbb{K}^n$  es un subconjunto  $X \subseteq \mathbb{K}^n$  tal que  $X$  es el conjunto de soluciones comunes a un número finito de polinomios, equivalentemente un conjunto algebraico es un conjunto  $X = Z(I)$  para algún ideal  $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

**Ejercicio 4.3.** Verifique que los conjuntos algebraicos satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $Z(\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]) = \emptyset$ .
2.  $Z(0) = \mathbb{K}^n$ .
3. Si  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  son dos ideales, entonces  $Z(\mathfrak{a}) \cap Z(\mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})$ .
4. Si  $\{\mathfrak{a}_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  es una colección de ideales en  $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , entonces:

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} Z(\mathfrak{a}_\alpha) = Z(\sum_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{a}_\alpha).$$

Con las propiedades antes descritas, si definimos a los conjuntos algebraicos como conjuntos cerrados en  $\mathbb{K}^n$  entonces podemos definir una topología sobre este espacio. Esta topología es conocida como la topología de Zariski. Cuando dotamos a  $\mathbb{K}^n$  con la topología de Zariski, entonces le llamamos  $n$ -espacio afín y lo denotamos como  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}^n}^n$  o simplemente como  $\mathbb{A}^n$ .

A los espacios topológicos  $\mathbb{A}^1$  y  $\mathbb{A}^2$  se les llama recta y plano afín respectivamente. Observe que si  $V$  es un conjunto algebraico en  $\mathbb{A}^1$  entonces  $V$  es vacío, un conjunto finito de puntos o toda la recta afín. Por otro lado, si  $V$  es un conjunto algebraico en  $\mathbb{A}^2$  entonces es  $\emptyset$ , conjunto finito de puntos, conjunto finito de curvas o todo el plano afín.

Hasta el momento hemos asociado a cada ideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  un conjunto algebraico  $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n$ . Ahora queremos hacer una asociación inversa, esto es, a cada subconjunto  $X \subseteq \mathbb{A}^n$ , le asociaremos el conjunto

$$I(X) := \{P \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid P(a) = 0, \forall a \in X\} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n].$$

Es fácil notar que  $I(X)$  es un ideal en el anillo  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  el cual llamaremos **Ideal Asociado a  $X$** . Estos ideales satisfacen las siguientes afirmaciones:

1. Si  $X \subset Y$ , entonces  $I(Y) \subset I(X)$
2.  $I(\emptyset) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .
3. Para todo ideal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  se tiene que  $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$ .
4. Para todo subconjunto  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  se cumple que  $X \subseteq Z(I(X))$ .

En (4) observe que  $Z(I(X))$  es un cerrado en la topología de Zariski. Mas aún, es el cerrado más pequeño que contiene a  $X$ . Por otra parte, las propiedades (3) y (4) nos indican que si pensamos a  $I$  como una regla que asocia ideales a conjuntos algebraicos

y pensamos a  $Z$  como una regla que asocia conjuntos algebraicos a ideales, entonces al iterar dichas reglas de asociación no recuperamos necesariamente el ideal o el conjunto algebraico inicial. En este sentido tenemos el siguiente resultado importante

**Teorema 4.4.** *Si  $\mathbb{K}$  es un campo algebraicamente cerrado y  $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  es un ideal, entonces  $I(Z(\mathfrak{a})) = \text{rad}(\mathfrak{a})$*

Este resultado es conocido como el Teorema de los ceros de Hilbert. Una demostración de este resultado puede consultarse en [F]. Como consecuencia de este Teorema tenemos que si  $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  es un ideal primo, entonces  $I(Z(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$  ya que todo ideal primo es radical. De esta manera, resulta interesante considerar aquellos conjuntos algebraicos definidos por ideales primos. Al respecto tenemos las siguientes afirmaciones:

1. Existe una biyección entre conjuntos algebraicos en  $\mathbb{A}^n$  e ideales radicales en  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .
2. Existe una biyección entre puntos en  $\mathbb{A}^n$  e ideales maximales en  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .
3. Existe una biyección entre conjuntos algebraicos irreducibles en  $\mathbb{A}^n$  e ideales primos en  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .
4. El conjunto algebraico  $Z(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n$  es vacío si y sólo si  $\mathfrak{a} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  es un ideal maximal.

Un conjunto algebraico  $Z(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n$ , se dice variedad afín si es irreducible. De esta manera, las variedades afines son aquellas que corresponden a los ideales primos. Algunos ejemplos de variedades afines son:

**Ejemplo 4.5** (Cúbica torcida afín). *Consideremos el siguiente ejemplo de variedad afín. Esta variedad es llamada “Cúbica torcida”. Para ello consideramos el siguiente conjunto*

$$C = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{K}\}$$

*Este conjunto es una variedad algebraica, para ello veremos que  $Y = V(\mathfrak{a})$  donde  $\mathfrak{a}$  es el ideal definido por  $\mathfrak{a} = \langle y - x^2, x y - z \rangle$ . Mas aún, es fácil ver que  $C$  es una curva. Para ello note que si tomamos el mapeo*

$$\phi : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^3$$

*definido como  $\phi(t) := (t, t^2, t^3)$ , entonces  $\phi$  es un mapeo polinomial. De esto podemos concluir que la curva torcida es efectivamente una curva. Si tomamos la relación que existe entre las variedades en  $\mathbb{A}^n$  y sus  $\mathbb{K}$ -álgebras asociadas entonces podemos verificar que la  $\mathbb{K}$ -álgebra asociada a la curva torcida es  $\mathbb{K}[x]$ .*

**4.1. Variedades proyectivas.** Tomemos el espacio  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$  y consideramos la siguiente relación:

$(a_0, a_1, \dots, a_n), (b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$  son equivalentes si existe un escalar  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tal que  $(a_0, a_1, \dots, a_n) = \lambda(b_0, b_1, \dots, b_n)$ .

No es difícil observar que la relación es una relación de equivalencia. Denotemos por  $[a_0 : a_1 : \dots : a_n]$  a la clase de equivalencia del punto  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ .

El conjunto de clases de equivalencia definidos por esta relación lo denotaremos por  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$  o  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  o simplemente  $\mathbb{P}^n$  y lo llamaremos el  $n$ -espacio proyectivo.

**Observación 4.6.** Si consideramos un espacio vectorial  $V$  sobre el campo  $\mathbb{K}$ , podemos definir la misma relación de equivalencia, esto es;  $v, u \in V$  están relacionados si y solo si  $v = \lambda u$  para algún  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  obteniendo así al conjunto de clases de equivalencia  $\mathbb{P}(V)$ . Compare esto con lo descrito en la página 12.

Al igual que en el caso afín, el  $n$ -espacio proyectivo puede ser dotado de la topología de Zariski. Para ello, lo primero será definir cuándo un punto en  $\mathbb{P}^n$  es la raíz de un polinomio. Con este fin, consideramos el anillo de polinomios  $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  con  $(n+1)$  variables y tomaremos los polinomios homogéneos. Esto es,  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  es homogéneo de grado  $d$  si  $F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n)$  siendo  $d$  un entero positivo conocido como grado del polinomio homogéneo  $F$ . Los polinomios homogéneos satisfacen la siguiente condición:

Si  $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  es un polinomio homogéneo y  $[a_0 : a_1 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n$  un punto tal que para un representante  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in [a_0 : a_1 : \dots : a_n]$  se cumple que  $F(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$ , entonces para cualquier otro representante  $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in [a_0 : a_1 : \dots : a_n]$  se cumple  $F(b_0, b_1, \dots, b_n) = 0$ . En este caso diremos que  $[a_0 : a_1 : \dots : a_n]$  es una raíz de  $F$ . Esto nos lleva al siguiente concepto.

**Definición 4.7.** Sea  $\{F_1, F_2, \dots, F_r\} \subset \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  un conjunto finito de polinomios homogéneos. Denotamos por  $Z(F_1, \dots, F_r)$  al conjunto

$$Z(F_1, \dots, F_r) = \{[a_0 : a_1 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n \mid F_i(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0, \forall i = 1, \dots, r\}$$

Un subconjunto  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  es un **conjunto algebraico proyectivo** si  $X = Z(F_1, F_2, \dots, F_r)$  para algún conjunto finito de polinomios homogéneos.

Al igual que en el caso afín,  $Z(F_1, \dots, F_r) = Z(\langle F_1, \dots, F_r \rangle)$ . En este caso, el ideal generado es un ideal homogéneo. En general, los conjuntos algebraicos proyectivos satisfacen propiedades similares a los de los conjuntos algebraicos afines, (ver, [F]).



**Ejemplo 4.8** (Cúbica torcida proyectiva). *La cúbica torcida también tiene una versión proyectiva, la cual denotaremos por  $\mathcal{C}_{\text{Proj}}$ . En este caso, la cúbica torcida proyectiva está definida mediante el siguiente mapeo*

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

donde  $\varphi[x : y] := [x^3 : x^2y : xy^2 : y^3]$ .

Además, el ideal  $I(\mathcal{C}_{\text{Proj}})$  asociado a la cúbica torcida proyectiva está definido por

$$I(\mathcal{C}_{\text{Proj}}) = \langle xz - y^2, xw - yz, yw - z^2 \rangle \quad (2)$$

observe que este es un ideal homogéneo en el anillo de polinomios  $\mathbb{K}[x, y, z, w]$ . Esto se debe a que sus generadores son polinomios homogéneos.

Una de las razones por la cual este ejemplo es importante, se debe a que la cúbica torcida es de los primeros ejemplos de variedades que no son hipersuperficies. La cúbica torcida afin es intersección de dos cuádricas mientras que la cúbica torcida proyectiva es la intersección de tres cúbicas. En la siguiente sección también veremos que estas curvas son ejemplos de variedades definidas por determinantes.

## 5. INTRODUCCIÓN A LAS VARIETADES DETERMINANTALES.

Ahora que hemos trabajado con la teoría clásica de variedades (afines y proyectivas) vamos a definir nuestro objeto de estudio, las variedades determinantaes. Considere el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.1.** *Tomemos la aplicación  $\phi : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^3$  definida como  $\phi(t) := (t, t^2, t^3)$ . Su imagen es la cúbica torcida (ver ejemplo 4.5). De acuerdo con el ejemplo,  $C$  es la intersección de dos cuádricas, sin embargo también se puede definir en términos de ciertos determinantes. A saber, si tomamos la matriz*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

consideremos sus tres menores

$$\begin{vmatrix} x & y \\ y & z \end{vmatrix} = xz - y^2, \quad \begin{vmatrix} 1 & y \\ x & z \end{vmatrix} = z - xy, \quad \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & y \end{vmatrix} = y - x^2.$$

En este caso se cumple que  $\langle xz - y^2, z - xy, y - x^2 \rangle = \langle z - xy, y - x^2 \rangle = I(C)$ , ver Figura 1. Note que las menores corresponden a los generadores del ideal que define a la cúbica torcida se puede definir en términos de las matrices menores de una matriz  $A$ . Las variedades con esta propiedad son conocidas como **variedades determinantaes**.

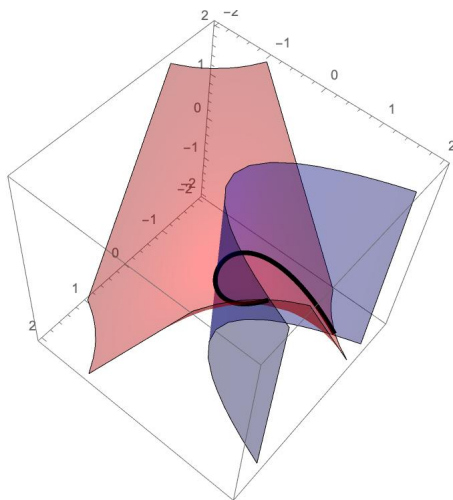


FIGURA 1. La curva en oscuro es determinantal con la intersección de las superficies determinadas por  $y - x^2 = 0$  en azul,  $yz - xy = 0$  en rojo.

**Ejercicio 5.2.** Demuestra que  $\langle xz - y^2, z - xy, y - x^2 \rangle = \langle z - xy, y - x^2 \rangle = I(C)$ .

**Definición 5.3.** Una variedad (afín o proyectiva)  $X$  se dice determinantal si el ideal  $I(X)$  está generado por polinomios obtenidos de las menores de una matriz  $M_{n \times m}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_r])$ .

De la definición tenemos que las curvas torcidas, afín y proyectiva, son variedades determinantaes.

## 6. MAPEO DE VERONESE Y ENCAJE DE SEGRE.

Si consideremos el anillo  $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  con  $n + 1$  variables y tomamos un entero positivo  $d > 0$ , entonces el número de monomios de grado  $d$  en  $n + 1$  variables es

$$N = \binom{n+d}{n} - 1$$

Con ello podemos definir una función

$$\rho_d : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$$

como

$$\rho_d([a_0 : a_1 : \dots : a_n]) = [a_0^d : a_0^{d-1} a_1 : a_0^{d-2} a_1 a_2 : \dots : a_{n-1} a_n^{d-1} : a_n^d]$$

Note que las coordenadas que definen la imagen son los monomios de grado  $d$  definidos por las  $a_i$ . Mas aún, la función está definida de manera polinomial, por lo tanto respeta la topología de Zariski ya que es una función continua. Por ejemplo, si consideramos el caso  $n = 1, d = 2$  entonces tendremos que  $N = 2$ . En este caso tenemos la función

$$\rho_2 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

definida como  $\rho_2([a_0 : a_1]) = [a_0^2 : a_0 a_1 : a_1^2]$ . Ahora observe que, la función  $\rho_2$  induce, bajo composición, la función

$$\theta_2 : \mathbb{K}[y_0, y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{K}[x_0, x_1].$$

Es decir, usando  $\rho_2$  podemos definir  $\theta_2$  como:  $\theta_2(p(y_0, y_1, y_2)) = p(x_0^2, x_0 x_1, x_1^2)$  para todo  $p(y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{K}[y_0, y_1, y_2]$ .

**Ejercicio 6.1.** *Verifique que  $\theta_2$  es un homomorfismo de anillos y que  $Z(\ker \theta_2) = \text{Im } \rho_2$ .*

Con el Ejercicio 6.1 en mente, podemos probar que  $\text{Im } \rho_2$  es una subvariedad de  $\mathbb{P}^2$  ya que  $\text{Im } \rho_2 = Z(\ker(\theta_2))$ . Además,

$$\mathbb{K}[y_0, y_1, y_2] / \ker \theta_2 \cong \text{Im } f \theta_2$$

siendo este último un dominio entero, podemos concluir que  $\ker(\theta)$  es un ideal primo. Por lo tanto,  $\text{Im } \rho_2$  es una variedad en  $\mathbb{P}^2$  la cual es una cónica

**Ejemplo 6.2.** *Ahora consideramos el caso  $n = 1$  y  $d = 3$ . Con estos parámetros define  $\rho_3 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  y  $\theta_3 : \mathbb{K}[y_0, y_1, y_2, y_3] \rightarrow \mathbb{K}[x_0, x_1]$  de manera análoga al caso anterior.*

*Observe que  $I(\mathcal{C}_{\text{Proj}}) = \langle xz - y^2, xw - yz, yw - z^2 \rangle$  definido en (2) está contenido en  $\ker \theta_3$ . Mas aún,  $I(\mathcal{C}_{\text{Proj}}) = \ker \theta_3$  y con esto podemos concluir que la imagen de la función coincide con la cúbica torcida proyectiva.*

Ahora, definiremos una función dada por C. Segre, la cual nos permite “encajar” variedades en el espacio proyectivo. Esta función es conocida como el **Encaje de Segre**. Para ello, considere la función

$$\psi_{r,s} : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \rightarrow \mathbb{P}^N$$

donde  $N = (r + 1)(s + 1) - 1 = rs + r + s$  y tal que  $\psi_{r,s}$  se define de la siguiente manera:

$$\psi_{r,s}([x_0 : x_1 : \dots : x_r], [y_0 : y_1 : \dots : y_s]) := [x_0 y_0 : x_0 y_1 : \dots : x_i y_j : \dots : x_r y_s]$$

Queremos probar que la imagen del encaje de Segre determina una variedad en  $\mathbb{P}^N$ . Para ello, nuestro primer paso es verificar que  $Im \psi_{r,s}$  es un conjunto algebraico dentro de  $\mathbb{P}^N$ . Con este fin definimos

$$[z_{00} : z_{01} : \dots : z_{im} : \dots : z_{rs}] := [x_0 y_0 : x_0 y_1 : \dots : x_i y_m : \dots : x_r y_s]$$

y la proyección

$$\pi_{i,j,l,m} : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^1$$

como  $\pi_{i,m,j,l}([z_{00} : z_{01} : \dots : z_{ij} : \dots : z_{rs}]) = [z_{im} : z_{jl}]$ .

En seguida, consideramos los polinomios homogéneos de grado dos definidos como  $p_{ijlm} := z_{im}z_{jl} - z_{il}z_{jm} \in \mathbb{K}[z_{00}, \dots, z_{rs}]$ , con  $0 \leq i, j \leq r$  y  $0 \leq l, m \leq s$ . El conjunto algebraico proyectivo definido por estos polinomios lo denotaremos por  $\mathcal{V}\mathcal{S}$ . Así

$$\mathcal{V}\mathcal{S} := Z(\langle p_{ijlm} \mid 0 \leq i, j \leq r \text{ y } 0 \leq l, m \leq s \rangle).$$

Con ello tenemos que  $Im \psi_{r,s} \subseteq \mathcal{V}\mathcal{S}$ , pues si  $[a_0 : a_1 : \dots : a_r] \in \mathbb{P}^r$  y  $[b_0 : b_1 : \dots : b_s] \in \mathbb{P}^s$ , entonces

$$\psi_{r,s}([a_0 : a_1 : \dots : a_r], [b_0 : b_1 : \dots : b_s]) := [a_0 b_0 : a_0 b_1 : \dots : a_i b_m : \dots : a_r b_s]$$

es un punto en la imagen y para todo polinomio  $p_{ijlm}$  se cumple

$$p_{ijlm}([a_0 b_0 : a_0 b_1 : \dots : a_i b_j : \dots : a_r b_s]) = a_i b_m a_j b_l - a_i b_l a_j b_m = 0.$$

Ahora queremos verificar la contención  $\mathcal{V}\mathcal{S} \subseteq Im \psi_{r,s}$ . Para ello tomamos un punto  $\mathbf{c} := [c_{00} : \dots : c_{rs}] \in \mathcal{V}\mathcal{S}$  y probaremos que  $\mathbf{c}$  está en la imagen de  $\psi_{r,s}$ .

Primero notemos que, como  $\mathbf{c}$  está en un proyectivo, al menos una de sus coordenadas es distinta de cero. Mas aún, cambiando de representante si es necesario, una de sus coordenadas es igual a 1. Sin perder generalidad podemos suponer que  $c_{00} = 1$ . Con estas suposiciones, tomaremos los puntos

$$\mathbf{a} := [1 : c_{10} : \dots : c_{r0}] \in \mathbb{P}^r \text{ y } \mathbf{b} := [1 : c_{01} : \dots : c_{0s}] \in \mathbb{P}^s$$

y como  $\mathbf{c} \in \mathcal{V}\mathcal{S}$ , entonces satisface los polinomios  $p_{ijlm}$ . En particular, satisface el polinomio  $p_{i00m}$ . Por lo que  $c_{im}c_{00} - c_{i0}c_{0m} = 0$  y  $c_{im}c_{00} = c_{i0}c_{0m} = c_{im}$ . En consecuencia,  $\psi_{r,s}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{c}$  y así  $\mathbf{c} \in Im \psi_{r,s}$ .

**Ejercicio 6.3.** Verifique que  $\psi_{r,s}$  es inyectivo y compruebe que si  $c_{00} = 0$ , entonces la demostración se sigue de manera análoga tomando un elemento  $c_{ij} \neq 0$ .

De lo anterior concluimos que  $Im \psi_{r,s}$  es un conjunto algebraico proyectivo. El siguiente resultado afirma que  $Im \psi_{r,s}$  es una variedad algebraica proyectiva la cual es conocida como **variedades de Segre** y de ahora en adelante la denotaremos por  $\Sigma_{r,s}$ . Su demostración se basa en el hecho de que el producto de variedades algebraicas proyectivas es una variedad proyectiva. El resultado lo presentamos sin demostración, sin embargo invitamos al lector interesado a demostrarlo.

**Proposición 6.4.** Los conjuntos algebraicos  $\Sigma_{r,s}$  son variedades.

Ahora presentamos un ejemplo particular de variedad de Segre y mostraremos con ello que es una variedad determinantal.

**Ejemplo 6.5.** Consideramos el caso  $\psi_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ . Por lo hecho anteriormente,

$$\Sigma_{1,1} = Z(z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10})$$

Note que si tomamos la matriz

$$A := \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} \\ z_{10} & z_{11} \end{pmatrix}$$

tenemos  $|A| = z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10}$ . Por lo que, la variedad de Segre  $\Sigma_{1,1}$  es una variedad determinantal.

En general, podemos ver que la variedad  $\Sigma_{r,s}$  es determinantal ya que sus ecuaciones son definidas por las menores  $(2 \times 2)$  de la matriz

$$A := \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & z_{02} & \dots & z_{0s} \\ z_{10} & z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1s} \end{pmatrix}$$

Las menores  $(2 \times 2)$  del tipo  $A_{\alpha,\beta}$  con  $\alpha < \beta$  definida como

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} z_{0\alpha} & z_{0\beta} \\ z_{1\alpha} & z_{1\beta} \end{pmatrix}$$

definen la variedad de Segre pues los polinomios son

$$|A_{\alpha,\beta}| = p_{0\beta 1\alpha} = z_{0\alpha}z_{1\beta} - z_{0\beta}z_{1\alpha}$$

## 7. VARIEDADES GRASSMANNIANAS COMO VARIEDADES DETERMINANTALES.

En esta sección introduciremos a la variedad Grassmanniana, la cual denotaremos como  $G(k, V)$ . Así como la variedad proyectiva  $\mathbb{P}(V)$  parametriza a los subespacios 1-dimensionales de  $V$ , en ese mismo sentido  $G(k, V)$  parametriza los subespacios  $k$ -dimensionales de  $V$ .

Consideremos el conjunto de todos los subespacios de dimensión  $k$  en un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ . Simbólicamente abreviamos  $G(k, V)$ . Ahora, vamos a describir a las Grassmannianas con perspectiva proyectiva.

Consideramos el espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$  y  $W \subset V$  un subespacio vectorial de dimensión  $k$ . Denotemos por  $B_W = \{w_1, \dots, w_k\}$  una base para  $W$ . Con esta base, asociamos a cada subespacio  $W \subseteq V$  el  $k$ -vector  $w_1 \wedge \dots \wedge w_k \in \bigwedge^k V$ . Si  $B'_W = \{u_1, \dots, u_k\}$  es otra base para  $W$ , tenemos

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k = \lambda(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) \in \bigwedge^k V,$$

donde  $\lambda$  es un escalar no cero definido como el determinante de la matriz de cambio de base  $\det M_{B'_W}^{B_W}$ . Como la elección de una base solo difiere de un escalar, entonces podemos definir una función de conjuntos

$$\psi: G(k, n) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$$

dada como  $\psi(W) = [w_1 \wedge \dots \wedge w_k]$ . Esta función es conocida como **Encaje de Plücker**. El siguiente resultado nos ayudará a mostrar la inyectividad del Encaje de Plücker

**Proposición 7.1.** Sean  $\{w_1, \dots, w_k\}$  y  $\{u_1, \dots, u_k\}$  dos conjuntos linealmente independientes de vectores en  $V$ . Si  $w_1 \wedge \dots \wedge w_k = \lambda(u_1 \wedge \dots \wedge u_k)$ , para algún  $\lambda \neq 0$  entonces  $\text{gen}\{w_1 \wedge \dots \wedge w_k\} = \text{gen}\{u_1 \wedge \dots \wedge u_k\}$

con este resultado tendremos que el encaje de Plücker es inyectivo. De esta manera tenemos que  $G(k, V) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ .

**7.1. Coordenadas de Plücker y Ejemplos.** Como se vió en la sección anterior, si tenemos  $W \subset V$  un subespacio vectorial de dimensión  $k$  y  $B_W = \{w_1, \dots, w_k\}$  una base para  $W$ . Entonces  $\psi(W) = [w_1 \wedge \dots \wedge w_k] \in \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ . El objetivo de esta sección es determinar las coordenadas de todos los puntos en  $G(k, V) = \text{Im}(\psi)$ . Para ello elegimos una base para  $V$  y la denotamos por  $B_V = \{e_i\}_{i=1}^n$ . Entonces los elementos de la forma  $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ , con  $i_1 < \dots < i_k$ , son una base para el espacio  $\bigwedge^k V$ . Así tendremos la base.

$$B_{\bigwedge^k V} = \{e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(k)} : \sigma \in S_k\}.$$

Tomando esta base, podemos escribir

$$\psi(W) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} P_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}.$$

Las coordenadas homogéneas del punto  $\psi(W)$  están dadas por los escalares  $P_{i_1 \dots i_k}$ . Las coordenadas obtenidas de esta manera son llamadas **coordenadas de Plücker**.

Como comentamos anteriormente, queremos encontrar las coordenadas de los puntos en  $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$  que corresponden a la Grassmanniana  $G(k, V)$ . Para ello comencemos con un ejemplo.

**Ejemplo 7.2.** Consideremos por un momento que  $V = \mathbb{C}^3$ . Tomamos la base canónica  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ . De esta manera,  $\bigwedge^2 \mathbb{C}^3$  es un espacio vectorial de dimensión tres. El conjunto  $B_{\bigwedge^2 \mathbb{C}^3} = \{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$  es una base para  $\bigwedge^2 \mathbb{C}^3$ .

En este ejemplo particular, tomaremos un subespacio 2-dimensional de  $W \subset \mathbb{C}^3$  y vamos a calcular las coordenadas del punto  $P(W) \in \mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^3)$ . Para ello, defina

$$W := \{(0, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y, z \in \mathbb{C}\}$$

entonces una base para  $W$  es  $B_W = \{e_2, e_3\}$ . Por lo tanto,

$$P(W) = 0(e_1 \wedge e_2) + 0(e_1 \wedge e_3) + 1(e_2 \wedge e_3)$$

Concluyendo con esto que las coordenadas de Plücker para el subespacio  $W$  es  $[0 : 0 : 1]$ .

Ahora tomemos el subespacio  $U \subseteq \mathbb{C}^3$  definido por la ecuación  $x + y + z = 0$ , i. e.

$$U := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

Una base para  $U$  es  $B_U = \{-e_1 + e_2, -e_1 + e_3\}$  de esta manera

$$\begin{aligned} P(U) &= (-e_1 + e_2) \wedge (-e_1 + e_3) \\ &= (-e_1 \wedge -e_1) + (-e_1 \wedge e_3) + (e_2 \wedge -e_1) + (e_2 \wedge e_3). \\ &= (-1)(e_1 \wedge e_3) - (e_1 \wedge e_2) + (e_2 \wedge e_3) \\ &= (-1)(e_1 \wedge e_2) + (-1)(e_1 \wedge e_3) + (1)(e_2 \wedge e_3) \end{aligned}$$

En consecuencia, las coordenadas de Plücker que corresponden al punto  $P(U)$  son  $[-1 : -1 : 1]$ .

Cuando tomamos la inclusión de la Grassmanniana  $G(k, V)$  en  $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ . Es posible verificar que si  $k = 1$  o  $k = n - 1$  entonces  $\mathbb{P}(\bigwedge^1 V) = \mathbb{P}(\bigwedge^{n-1} V) = V$ . En este caso la Grassmanniana corresponde al espacio proyectivo  $\mathbb{P}(V)$  y así  $\psi$  es sobreyectivo. Sin

embargo, si  $k \neq 1, n-1$  la función  $\psi$  no es sobreyectiva y por tal motivo quisiéramos determinar las propiedades para que un punto en  $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$  corresponda a un elemento en la imagen de  $\psi$ .

Existe otra manera de calcular las coordenadas de Plücker usando matrices. Para ello consideramos como antes una base para  $V$ , digamos  $B_V = \{e_i\}_{i=1}^n$  y suponga que  $W \subset V$  es un subespacio de dimensión  $k$  cuya base es  $B_W = \{w_1, \dots, w_k\}$ . Entonces escribimos cada vector  $w_i$  en términos de la base  $B_V$ , obteniendo

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$$

y con los coeficientes  $a_{ij}$  definimos la siguiente matriz

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Ahora bien, para calcular las coordenadas del punto  $\psi(W) = [w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k]$  utilizamos la base  $B_W$ . Si hacemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k, \\ &= \left( \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} e_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{j_k=1}^n a_{kj_k} e_{j_k} \right) \\ &= \sum a_{1j_1} \dots a_{kj_k} (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}). \end{aligned}$$

Por las propiedades del producto exterior, si algún subíndice se repite entonces el término se hace cero. Así también por la alternancia y linealidad, podemos suponer que en todo momento tendremos  $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k$ . De esta manera, sería necesario realizar ciertas permutaciones obteniendo:

$$\mathbf{v} = \sum_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k} \sum_{\sigma \in S_k} a_{1\sigma(j_1)} \dots a_{k\sigma(j_k)} (e_{\sigma(j_1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(j_k)}),$$

toda permutación es producto de transposiciones y cada una de ellas cambia de signo

$$\mathbf{v} = \sum \sum (-1)^\sigma a_{1\sigma(j_1)} \dots a_{k\sigma(j_k)} (e_{\sigma(j_1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(j_k)}),$$



$$\mathbf{v} = \sum \sum |A_{\sigma(j_1)\dots\sigma(j_k)}| e_{\sigma(j_1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(j_k)}$$

Donde  $A_{\sigma(j_1)\dots\sigma(j_k)}$  denota a las matrices menores de  $A$  y  $|A_{\sigma(j_1)\dots\sigma(j_k)}|$  es el determinante de las menores. Y denotamos estos determinantes como

$$P_{\sigma(j_1)\dots\sigma(j_k)} = |A_{\sigma(j_1)\dots\sigma(j_k)}|.$$

$$A_{j_1, j_2, \dots, j_k} := \begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_k} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{kj_1} & a_{kj_2} & \dots & a_{kj_k} \end{pmatrix}$$

De esta manera, tenemos que las coordenadas del punto  $\psi(W)$ , en términos de la base  $B_V$  son

$$[P_{1,2,\dots,k} : \dots : P_{n-k+1,\dots,n-1,n}]$$

**7.2. Grassmanniana como variedad algebraica proyectiva.** En esta sección probaremos que el subconjunto  $G(k, V) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$  es una variedad algebraica proyectiva. Para ello, necesitamos caracterizar el conjunto de los vectores **totalmente descomponibles** de  $\bigwedge^k V$ , i.e. determinar los vectores  $v \in \bigwedge^k V$ , no cero, que se factorizan como

$$v = v_1 \wedge \dots \wedge v_k,$$

donde los  $v_i$  son elementos de  $V$ . Note que, si  $v \in \bigwedge^k V$  es tal que  $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$  y  $w \in V$ , entonces  $w \wedge v \in \bigwedge^{k+1} V$ . Con esta notación tenemos el siguiente par de resultados.

**Lema 7.3.**  $w \wedge v = \vec{0}$  si y sólo si  $w \in \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ .

*Demostración:* Supongamos que  $w = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$  entonces

$$\begin{aligned} w \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k &= (c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k \\ &= c_1 (v_1 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k) + \\ &\quad c_2 (v_2 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) + \dots \\ &\quad \dots + c_k v_k \wedge (v_1 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Por otro lado supongamos que  $w \wedge v = 0$  y  $w = d_1 v_1 + \dots + d_n v_n$  en  $V$ , entonces vemos que para los sumandos del tipo  $d_j v_j$  para cada  $j \notin \{1, \dots, k\}$  que tiene  $d_j \neq 0$  debe suceder

$$v_j \wedge (v_1 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \neq \vec{0},$$

y así  $w \wedge v \neq \vec{0}$ . Esto nos dice que si  $w$  no está en  $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$  entonces  $w \wedge v \neq \vec{0}$  es decir si  $w \in \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$  entonces  $w \wedge v = \vec{0}$ .  $\square$

**Lema 7.4.** *Sea  $u \in \bigwedge^k V$ , entonces  $u$  es descomponible si y solo si  $\{w \in V \mid u \wedge w = 0\} \in \bigwedge^{k+1} V$  es un subespacio vectorial de dimensión  $k$  de  $V$ .*

Ahora, para cada  $w \in \bigwedge^k V$  consideraremos la función

$$\alpha_w : V \rightarrow \bigwedge^{k+1} V$$

la cual se define como  $\alpha_w(v) := w \wedge v$ , para cada  $v \in V$ .

La función  $\alpha_w$  es una transformación lineal, por lo que tiene una matriz asociada que denotaremos como  $M_w \in M_{k+1 \times n}$ . Entonces tenemos que  $w$  es totalmente descomponible si y solo si  $M_w$  tiene kernel dimensión  $k$ . Esto equivale a que  $\text{nul}(M_w) = k$ , es decir  $M_w$  tiene rango  $n - k$ . Con esto en mente usaremos el siguiente resultado

**Teorema 7.5.** *El rango de una matriz  $A \in M_{n \times m}$  es el entero  $r$  mas grande tal que alguna de sus menores  $r \times r$  no se anula.*

Del teorema tenemos que  $M_w$  tiene rango  $n - k$  si y solo si sus menores de tamaño  $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$  se anulan. Así, las menores de  $M_w$  determinarán ecuaciones que definan a  $G(k, n)$  como una variedad proyectiva. Mas aún, ya que las ecuaciones están dadas por la menores, entonces podemos concluir que  $G(k, V)$  es de hecho una variedad determinantal.

Finalizamos presentando algunos ejemplos de las ecuaciones que definen a la Grassmanniana, estas ecuaciones son conocidas como **ecuaciones de Plücker**.

**Ejemplo 7.6.** *Consideramos  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre el campo  $\mathbb{K}$ . Entonces las ecuaciones que definen a  $G(2, V)$  son*

$$P_{ij}P_{kl} - P_{ik}P_{jl} + P_{il}P_{jk} = 0$$

donde  $1 \leq i < j < k < l \leq n$ . de las cuales tenemos  $\frac{n!}{4!(n-4)!}$  ecuaciones.

**Ejemplo 7.7.** De manera concreta, las ecuaciones de Plücker para la Grassmanniana  $G(2, 5)$  son

$$P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23} = 0$$

$$P_{12}P_{35} - P_{13}P_{25} + P_{15}P_{23} = 0$$

$$P_{12}P_{45} - P_{14}P_{25} + P_{15}P_{24} = 0$$

$$P_{12}P_{45} - P_{14}P_{35} + P_{15}P_{34} = 0$$

$$P_{23}P_{45} - P_{25}P_{35} + P_{25}P_{34} = 0$$

REFERENCIAS

- [DGPS] Decker, W.; Greuel, G.-M.; Pfister, G.; Schönemann, H.: SINGULAR(4-3-0), A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern. <https://www.singular.uni-kl.de> (2022).
- [F] Fulton, W. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. Addison Wesley Publishing Company.
- [JH] Joe Harris. *Algebraic Geometry: A first course*, Springer Verlag.
- [RH] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer Verlag.
- [M] John W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, ISBN 0-8139-0181-2, 1978.
- [Sh] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry*, Springer Verlag.
- [SL] Serge Lang. *Linear Algebra*, Addison-Wesley.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, AV. REVOLUCIÓN 500, GUADALAJARA, JALISCO, MÉXICO  
*E-mail address:* osbaldo.mata@academicos.udg.mx  
*E-mail address:* delapaz.suarez@academicos.udg.mx  
*E-mail address:* juan.mbobadilla@academicos.udg.mx



## EL GRUPO FUNDAMENTAL

OMAR VLADIMIR MACÍAS SANDOVAL, ANDRÉS GARCÍA SANDOVAL,  
IVÁN FERNANDO VALTIERRA CARRANZA, JUAN JESÚS DÍAZ GUEVARA

RESUMEN. Estas notas contienen una breve introducción al grupo fundamental y fueron preparadas para la VII Escuela de Verano en Matemáticas 2023, (CUCEI, U.de G.). Estas notas están completamente basadas en los textos [1], [2], [3] y [4].

ABSTRACT. These notes contains a brief introduction to the fundamental group and they were prepared for the VII Summer School in Mathematics 2023, (CUCEI, U.de G.). These notes are completely based on [1], [2], [3] and [4].

### 1. INTRODUCCIÓN

En la topología algebraica se utilizan herramientas algebraicas para resolver problemas topológicos. El objetivo es encontrar invariantes algebraicas asociadas a los espacios topológicos las cuales permitan clasificarlos salvo homeomorfismos. El grupo fundamental asociado a un espacio topológico es una invariante algebraica, esto es, dos espacios homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos. De esta manera, el grupo fundamental permite en algunos casos distinguir espacios topológicos, a saber, si dos espacios topológicos tienen grupos fundamentales no isomorfos entonces podemos concluir que estos espacios son topológicamente distintos.

### 2. HOMOTOPÍA Y HOMOTOPÍA DE CAMINOS

El concepto de homotopía es uno de los más importantes en la Topología Algebraica el cual formaliza la idea de deformación de una función continua  $f: X \rightarrow Y$  en otra

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 82B44.

*Palabras Claves.* Homotopía, lazo, levantamiento, espacio cubriente, grupo fundamental.

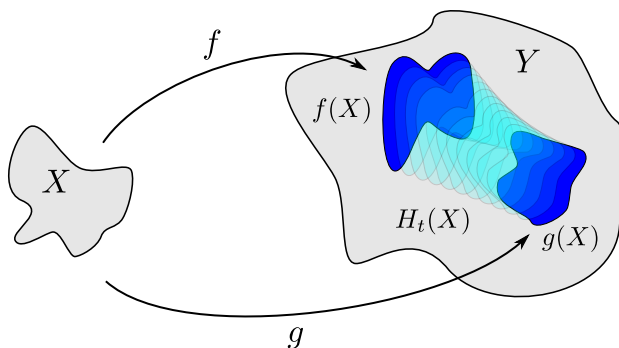


FIGURA 1. Funciones homotópicas.

función continua  $g: X \rightarrow Y$ . En adelante, denotaremos por  $\mathcal{C}(X, Y)$  al conjunto de funciones continuas del espacio  $X$  al espacio  $Y$ , y por  $I$  al intervalo  $[0, 1]$ .

**Definición 2.1.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ . Una *homotopía* entre  $f$  y  $g$  es una función continua  $H: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$  para cada  $x \in X$ . Dos funciones  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  son *homotópicas* si existe una homotopía  $H$  entre ellas.

Si dos funciones  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  son homotópicas, entonces lo denotaremos por  $f \simeq g$ . Si además,  $H$  es la homotopía entre  $f$  y  $g$  y queremos hacer énfasis en ello, entonces lo denotaremos como  $H: f \simeq g$ . Si  $H: f \simeq g$  entonces  $H$  puede verse como una familia de funciones  $\{H_t \in \mathcal{C}(X, Y) : t \in I\}$  definidas por  $H_t(x) = H(x, t)$  para todo  $x \in X$ . De esta manera,  $H$  “deforma” la función  $f$  en la función  $g$  conforme  $t$  va tomando valores de 0 a 1.

**Ejemplo 2.2.** Dado  $X$  un espacio topológico y cualquier par de funciones  $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ , se tiene que  $f \simeq g$ . La función  $H: X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

es una homotopía entre  $f$  y  $g$  llamada *homotopía lineal* u *homotopía por rectas*, pues para cada  $x \in X$ , la función  $H$  lleva el punto  $f(x)$  al punto  $g(x)$  a través del segmento de recta que los une.

**Ejemplo 2.3.** El resultado del ejemplo anterior se puede generalizar para funciones  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  donde  $Y \subset \mathbb{R}^n$  es un subespacio convexo.

**Proposición 2.4.** *La relación de homotopía “ $\simeq$ ” es una relación de equivalencia en  $\mathcal{C}(X, Y)$ .*

*Demostración.*

- a) *Reflexividad:* Dada  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ , la función  $H: X \times I \rightarrow Y$  definida por  $H(x, t) = f(x)$  es una homotopía entre  $f$  y  $f$ . De esta manera  $f \simeq f$ .
- b) *Simetría:* Sean  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  tales que  $f \simeq g$ . Entonces existe  $H: X \times I \rightarrow Y$  continua, tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ . Definamos  $H': X \times I \rightarrow Y$  por  $H'(x, t) = H(x, 1-t)$ . Como  $H$  es continua,  $H'$  es continua. Por otra parte  $H'(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$  y  $H'(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$ . Luego  $g \simeq f$ .
- c) *Transitividad:* Sean  $f, g, h \in \mathcal{C}(X, Y)$  tales que  $f \simeq g$  y  $g \simeq h$ . Puesto que  $f \simeq g$  y  $g \simeq h$ , existen  $H_1, H_2: X \times I \rightarrow Y$  continuas, tales que

$$H_1(x, 0) = f(x); \quad H_1(x, 1) = g(x); \quad H_2(x, 0) = g(x) \quad \text{y} \quad H_2(x, 1) = h(x).$$

Sea  $H: X \times I \rightarrow Y$  definida por

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(x, 2t-1) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

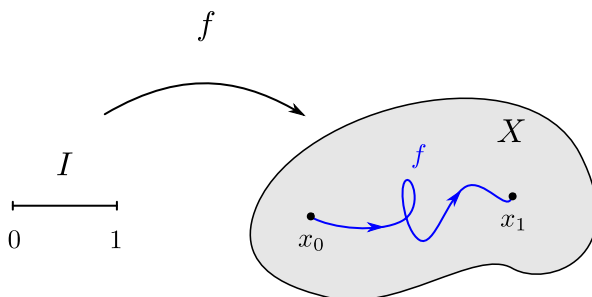
Por una parte se tiene que  $H_1$  y  $H_2$  son continuas, que  $H_1(x, \frac{1}{2}) = H_2(x, \frac{1}{2})$  y que los intervalos  $[0, \frac{1}{2}]$  y  $[\frac{1}{2}, 1]$  son cerrados, así por el lema del pegamiento  $H$  es continua. Por otra parte  $H(x, 0) = H_1(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = H_2(x, 1) = h(x)$ . De esta manera  $f \simeq h$ .

Por lo tanto la relación “ $\simeq$ ” es una relación de equivalencia.  $\square$

**Proposición 2.5.** *Sean  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$  y  $f', g' \in \mathcal{C}(Y, Z)$ . Si  $f \simeq g$  y  $f' \simeq g'$ , entonces  $f' \circ f \simeq g' \circ g$ .*

*Demostración.* Sean  $H_1$  la homotopía entre  $f$  y  $f'$  y  $H_2$  la homotopía entre  $f'$  y  $g'$ . Definamos  $H: X \times I \rightarrow Z$  por

$$H(x, t) = H_2(H_1(x, t), t)$$

FIGURA 2. Un camino en el espacio  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$ .

Claramente  $H$  es continua. Además

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= H_2(H_1(x, 0), 0) \\ &= H_2(f(x), 0) \\ &= f'(f(x)) \\ &= (f' \circ f)(x) \end{aligned}$$

Análogamente se tiene

$$H(x, 1) = (g' \circ g)(x).$$

Por lo tanto  $H : (f' \circ f) \simeq (g' \circ g)$ . □

**Definición 2.6.** Un *camino* en el espacio topológico  $X$  es una función continua

$$f : I \rightarrow X.$$

Si  $x_0, x_1 \in X$  y  $f$  es un camino en  $X$  tal que  $f(0) = x_0$  y  $f(1) = x_1$  entonces se dice que  $f$  es un *camino de  $x_0$  a  $x_1$*  y que  $x_0$  es el *punto inicial* y  $x_1$  es el *punto final* de  $f$ .

En la definición anterior se puede sustituir el intervalo  $I$  por cualquier intervalo cerrado  $[a, b]$ . Por otra parte, denotaremos por  $\mathcal{C}(X)$  el conjunto de caminos en  $X$  y por  $\mathcal{C}(X; x_0, x_1)$  el conjunto de caminos en  $X$  que inician en  $x_0$  y terminan en  $x_1$ .

Un tipo de homotopía más fuerte se da cuando se tienen caminos en un espacio  $X$  como veremos a continuación:



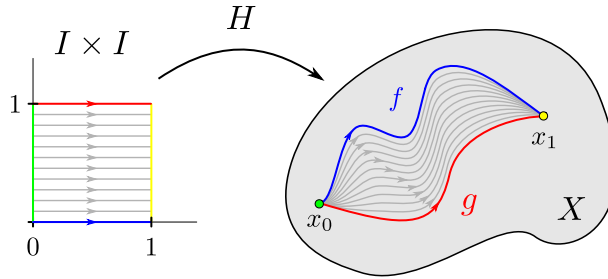


FIGURA 3. Homotopía de caminos.

**Definición 2.7.** Sean  $f, g \in \mathcal{C}(X; x_0, x_1)$ . Decimos que  $f$  y  $g$  son *homotópicos por caminos* si existe una función continua  $H: I \times I \rightarrow X$  tal que

$$a) H(s, 0) = f(s).$$

$$c) H(0, t) = x_0.$$

$$b) H(s, 1) = g(s).$$

$$d) H(1, t) = x_1.$$

para cada  $s \in I$  y cada  $t \in I$ . A la función  $H$  se le llama *homotopía de caminos* entre  $f$  y  $g$ .

En la definición anterior los incisos  $a)$  y  $b)$  nos dicen que  $H$  es una homotopía entre  $f$  y  $g$  mientras que los incisos  $c)$  y  $d)$  nos dicen que para cada  $t \in I$ , la función  $H_t: I \rightarrow X$  dada por  $H_t(s) = H(s, t)$  es un camino en  $X$  que inicia en  $x_0$  y termina en  $x_1$  (Ver figura 3). Si  $f$  y  $g$  son homotópicos por caminos, escribimos  $f \simeq_c g$ . Si además,  $H$  es la homotopía de caminos entre  $f$  y  $g$  y queremos hacer énfasis en ello, entonces escribimos  $H: f \simeq_c g$ .

**Ejemplo 2.8.** Sean  $f, g, h \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2 - \{0\})$  definidas por

$$f(s) = (\cos(\pi s), \sin(\pi s));$$

$$g(s) = (\cos(\pi s), 2 \sin(\pi s));$$

$$h(s) = (\cos(\pi s), -\sin(\pi s)).$$

Los caminos  $f$  y  $g$  son homotópicos por caminos pues la homotopía por rectas es una homotopía de caminos entre  $f$  y  $g$ . Por otra parte,  $f$  y  $h$  no son homotópicos por

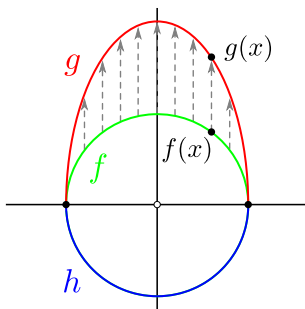


FIGURA 4. Homotopía por rectas entre  $f$  y  $g$ .

caminos, ya que no se puede deformar continuamente la función  $f$  en la función  $h$  por el hoyo que tiene el espacio  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  (Ver figura 4).

**Proposición 2.9.** Sean  $f, g \in \mathcal{C}(X; x_0, x_1)$ ,  $k \in \mathcal{C}(X, Y)$ , y  $H$  una homotopía de caminos en  $X$  entre  $f$  y  $g$ . Entonces  $k \circ H$  es una homotopía de caminos en  $Y$  entre los caminos  $k \circ f$  y  $k \circ g$ .

*Demostración.* La función  $k \circ H$  es continua pues es una composición de funciones continuas.

Como  $H$  es una homotopía se tiene:

$$\begin{aligned} (k \circ H)(s, 0) &= k(H(s, 0)) \\ &= k(f(s)) \\ &= (k \circ f)(s). \end{aligned}$$

Similarmente se prueba  $(k \circ H)(s, 1) = (k \circ g)(s)$ .

Por otra parte

$$\begin{aligned} (k \circ H)(0, t) &= k(H(0, t)) \\ &= k(x_0). \end{aligned}$$

Análogamente se tiene  $(k \circ H)(1, t) = k(x_1)$ .

Por lo tanto  $(k \circ H): (k \circ f) \simeq_c (k \circ g)$ . □

La siguiente proposición es análoga a la proposición (2.4), ahora considerando la relación “ $\simeq_c$ ” y su demostración se deja como ejercicio para el lector:

**Proposición 2.10.** *La relación “ $\simeq_c$ ” es una relación de equivalencia en  $\mathcal{C}(X)$ .*

Dado  $f \in \mathcal{C}(X; x_0, x_1)$ , denotaremos por  $[f]$  a su clase de homotopía por caminos, es decir,  $[f] := \{g \in \mathcal{C}(X; x_0, x_1) : f \simeq_c g\}$ . Al conjunto de clases de equivalencia dado por la relación ‘ $\simeq_c$ ’ lo denotaremos por  $[I, X]$ .

**Definición 2.11.** *Dado un camino  $f$  en  $X$ , una reparametrización de  $f$  es una composición  $f \circ \varphi$  donde  $\varphi: I \rightarrow I$  es una función continua tal que*

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(1) = 1.$$

Notemos que  $\varphi$  no necesariamente debe ser inyectiva y que  $(f \circ \varphi)(I) = f(I)$ .

**Lema 2.12.** *Sea  $f$  un camino en  $X$  y  $f \circ \varphi$  una reparametrización de  $f$ . Entonces*

$$[f] = [f \circ \varphi]$$

*Demostración.* Dado que  $I$  es un subespacio convexo de  $\mathbb{R}$ , se tiene la homotopía por rectas  $H: I \times I \rightarrow I$  entre  $id_I$  y  $\varphi$ , donde  $id_I: I \rightarrow I$  es la función identidad. Por la proposición 2.9,  $f \circ H: I \times I \rightarrow X$  es una homotopía de caminos entre  $f$  y  $f \circ \varphi$ .  $\square$

Si  $f \in \mathcal{C}(X; x_0, x_1)$  y  $g \in \mathcal{C}(X; x_1, x_2)$  entonces podemos definir un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $x_2$  que resulta al concatenar los caminos  $f$  y  $g$  como veremos a continuación:

**Definición 2.13.** *Sean  $f \in \mathcal{C}(X; x_0, x_1)$  y  $g \in \mathcal{C}(X; x_1, x_2)$ . El producto de caminos  $f * g$  de  $f$  y  $g$  es el camino  $f * g \in \mathcal{C}(X; x_0, x_2)$  dado por*

$$(f * g)(s) \begin{cases} f(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Es fácil verificar que  $f * g \in \mathcal{C}(X; x_0, x_2)$ . Por otra parte, es importante notar que el producto de caminos no está definido para cualquier par de caminos en  $X$ , sino solamente para aquellos pares de caminos en donde uno inicia en donde el otro termina, esto es,  $f * g$  está definido si y sólo si  $f(1) = g(0)$ .

**Proposición 2.14.** *Sean  $f, f' \in \mathcal{C}(X; x_0, x_1)$  y  $g, g' \in \mathcal{C}(X; x_1, x_2)$  tales que  $f \simeq_c f'$  y  $g \simeq_c g'$ . Entonces  $(f * g) \simeq_c (f' * g')$ .*

*Demostración.* Sean  $H_1 : f \simeq_p f'$  y  $H_2 : g \simeq_p g'$ . Definamos

$$H(s, t) = \begin{cases} H_1(2s, t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2s-1, t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dado que  $H_1(1, t) = x_1 = H_2(0, t)$  para todo  $t \in I$ , la función  $H$  está bien definida. Por otra parte, por el lema del pegamiento  $H$  es continua.

Finalmente probaremos que  $H$  es una homotopía de caminos entre  $(f * g)$  y  $(f' * g')$ :

$$\blacksquare H(s, 0) = \begin{cases} H_1(2s, 0) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2s-1, 0) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (f * g)(s).$$

$$\blacksquare H(s, 1) = \begin{cases} H_1(2s, 1) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2s-1, 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} f'(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g'(2s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (f' * g')(s)$$

$$\blacksquare H(0, t) = H_1(0, t) = x_0.$$

$$\blacksquare H(1, t) = H_2(1, t) = x_2.$$

Por lo tanto  $H : (f * g) \simeq_c (f' * g')$  □

**Definición 2.15.** *El producto de caminos  $*$  induce un producto  $\otimes$  de clases de equivalencia en  $[I, X]$  dado por*

$$[f] \otimes [g] := [f * g]$$

Por la Proposición 2.14 el producto de caminos está bien definido, esto es, el producto de caminos no depende de los representantes de las clases. El conjunto de clases de equivalencia  $[I, X]$  dotado del producto de clases de equivalencia  $\otimes$  tiene una estructura algebraica semejante a un grupo. Sin embargo, el producto de clases no está definido para cualquier par de clases, sino solamente para aquellas clases cuyos representantes son caminos que se pueden multiplicar, es decir, el producto

de clases  $[f] \otimes [g]$  está definido si, y sólo si,  $f(1) = g(0)$ . A continuación veremos las propiedades que el producto de clases de equivalencia satisface, para ello, antes es necesario definir un par de objetos: El primero, dado  $x \in X$ , denotamos por  $e_x: I \rightarrow X$  al camino constante definido por  $e_x(t) = x$ ; el segundo, dado  $f \in \mathcal{C}(X; x_0, x_1)$ , denotamos por  $\bar{f}$  al camino en  $X$  definido por  $\bar{f}(s) = (1-s)$ , el cual inicia en  $x_1$  y termina en  $x_0$  y es llamado **inverso** de  $f$ .

**Teorema 2.1.** Sean  $f \in \mathcal{C}(X; x_0, x_1)$ ,  $g \in \mathcal{C}(X; x_1, x_2)$  y  $h \in \mathcal{C}(X; x_2, x_3)$ . Entonces

$$a) [f] \otimes ([g] \otimes [h]) = ([f] \otimes [g]) \otimes [h].$$

$$b) [f] \otimes [e_{x_1}] = [f] = [e_{x_0}] \otimes [f].$$

$$c) [f] \otimes [\bar{f}] = [e_{x_0}] \text{ y } [\bar{f}] \otimes [f] = [e_{x_1}].$$

*Demostración.*

a) Basta probar que  $(f * g) * h$  es una reparametrización de  $f * (g * h)$ , es decir, que existe  $\varphi: I \rightarrow I$  continua tal que  $(f * g) * h = (f * (g * h)) \circ \varphi$ .

El camino  $(f * g) * h$  está dado por

$$((f * g) * h)(t) = \begin{cases} f(4t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ g(4t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ h(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

mientras que el camino  $f * (g * h)$  está dado por

$$(f * (g * h))(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(4t - 2) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ h(4t - 3) & \text{si } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Sea  $\varphi: I \rightarrow I$  definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ t + \frac{1}{4} & \text{si } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Para  $t \in [0, \frac{1}{4}]$  se tiene  $t \xrightarrow{\varphi} 2t \in [0, \frac{1}{2}]$ . Luego  $2t \xrightarrow{f^*(g*h)} f(4t)$ .

Para  $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  se tiene  $t \xrightarrow{\varphi} t + \frac{1}{4} \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ . Luego  $t + \frac{1}{4} \xrightarrow{f^*(g*h)} g(4t - 1)$ .

Para  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$  se tiene  $t \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{2}(t + 1) \in [\frac{3}{4}, 1]$ . Luego  $\frac{1}{2}(t + 1) \xrightarrow{f^*(g*h)} h(2t - 1)$ .

De esta manera  $(f * g) * h = (f * (g * h)) \circ \varphi$  (Ver figura 5).

Por el lema 2.12 se tiene

$$\begin{aligned} [f * (g * h)] &= [(f * (g * h)) \circ \varphi] \\ &= [(f * g) * h]. \end{aligned}$$

b) Procediendo de manera similar al inciso anterior, tenemos que  $f * e_{x_1}$  y  $e_{x_0} * f$  son reparametrizaciones de  $f$ , por lo que  $[f] \otimes [e_{x_1}] = [f] = [e_{x_0}] \otimes [f]$ .

c) Por definición  $[f] \otimes [\bar{f}] = [f * \bar{f}]$ . Notemos que  $f * \bar{f} = f \circ (id_I * \bar{id}_I)$ . Entonces

$$[f * \bar{f}] = [f \circ (id_I * \bar{id}_I)] \quad (1)$$

Dado que el intervalo  $I$  es un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}$ , se tiene que  $id_I * \bar{id}_I$  y  $e_0$  son homotópicos por caminos. Así, por la proposición 2.9 se tiene

$$f \circ (id_I * \bar{id}_I) \simeq_c f \circ e_0.$$

donde  $f \circ e_0 = e_{f(0)} = e_{x_0}$ . De esta manera

$$[f \circ (id_I * \bar{id}_I)] = [e_{x_0}]. \quad (2)$$

Así, por las ecuaciones (1) y (2) se concluye que  $[f * \bar{f}] = [e_{x_0}]$ .

Análogamente se prueba que  $[\bar{f}] \otimes [f] = [e_{x_1}]$ . □

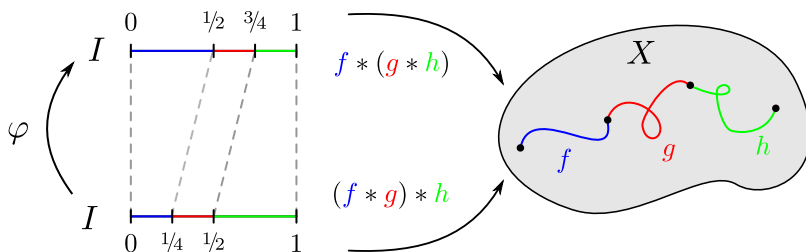


FIGURA 5. La función  $(f * g) * h$  es una reparametrización de  $f * (g * h)$ .

### 3. DEFINICIÓN DEL GRUPO FUNDAMENTAL

**Definición 3.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . Un *lazo basado en  $x_0$*  es un camino en  $X$  que comienza y termina en  $x_0$ .

Si consideramos el conjunto de lazos en el espacio  $X$  basados en el punto  $x_0 \in X$ , entonces el producto de caminos  $*$  está definido para cualquier par de lazos basados en  $x_0$ , y por lo tanto, el producto  $\otimes$  de clases de homotopía por caminos, está definido para cualquier par de clases de lazos basados en  $x_0$ . De esta manera el conjunto de lazos basados en  $x_0$  dotado con la operación  $\otimes$  tiene una estructura de grupo.

**Definición 3.2** (Grupo fundamental). Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . El *grupo fundamental de  $X$  relativo al punto base  $x_0$* , denotado por  $\pi_1(X, x_0)$ , es el grupo formado por el conjunto de clases de homotopía de caminos asociadas a los lazos basados en  $x_0$  dotado del producto de clases de homotopía por caminos.

A  $\pi_1(X, x_0)$  también se le conoce como *primer grupo de homotopía*, de donde se entiende que existen más grupos de homotopía. De hecho existen grupos de homotopía  $\pi_n(X, x_0)$  para cualquier  $n = 0, 1, 2, \dots$ . En el caso particular cuando  $n = 0$ , el grupo  $\pi_0(X)$  denota el conjunto de componentes conexas por caminos del espacio  $X$ .

**Ejemplo 3.3.** Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  convexo. Dado  $x_0 \in X$ , el grupo  $\pi_1(X, x_0)$  es trivial, lo cual denotamos como  $\pi_1(X, x_0) = 0$ , pues si  $f$  es un lazo en  $\mathbb{R}^n$  basado en el punto  $x_0$ , la homotopía por rectas es una homotopía por caminos entre  $f$  y el lazo constante  $e_{x_0}$ .

**Proposición 3.4.** Sea  $\alpha \in \mathcal{C}(X; x_0, x_1)$ . Entonces la función

$$\hat{\alpha}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

definida por

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] \otimes [f] \otimes [\alpha]$$

es un isomorfismo de grupos.

*Demostración.* La función  $\hat{\alpha}$  está bien definida pues el producto de clases está bien definido, pues es independiente del representante de la clase de homotopía. Probemos que  $\hat{\alpha}$  es un homomorfismo:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([f]) \otimes \hat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] \otimes [f] \otimes [\alpha]) \otimes ([\bar{\alpha}] \otimes [g] \otimes [\alpha]) \\ &= [\bar{\alpha}] \otimes [f] \otimes ([\alpha] \otimes [\bar{\alpha}]) \otimes [g] \otimes [\alpha] \\ &= [\bar{\alpha}] \otimes [f] \otimes [g] \otimes [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f] \otimes [g]). \end{aligned}$$

Ahora probemos que  $\hat{\alpha}$  es biyectiva: Sea  $\beta := \bar{\alpha}$

$$\begin{aligned} (\hat{\alpha} \circ \hat{\beta})([h]) &= \hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) \\ &= \hat{\alpha}([\bar{\beta}] \otimes [h] \otimes [\beta]) \\ &= \hat{\alpha}([\alpha] \otimes [h] \otimes [\bar{\alpha}]) \\ &= [\bar{\alpha}] \otimes ([\alpha] \otimes [h] \otimes [\bar{\alpha}]) \otimes [\alpha] \\ &= ([\bar{\alpha}] \otimes [\alpha]) \otimes [h] \otimes ([\bar{\alpha}] \otimes [\alpha]) \\ &= [h] \end{aligned}$$

Análogamente se prueba  $(\hat{\beta} \circ \hat{\alpha})([f]) = [f]$  para toda  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ .

Se concluye que  $\hat{\alpha}$  es un isomorfismo. □

**Corolario 3.5.** Si  $X$  es conexo por caminos y  $x_0, x_1 \in X$ , entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, x_1)$ .

El enunciado del corolario anterior nos puede llevar cometer el error de hablar simplemente del “grupo fundamental de  $X$ ” sin considerar el punto base. Si bien  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, x_1)$ , caminos diferentes  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(X; x_0, x_1)$  pueden dar isomorfismos diferentes entre  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(X, x_1)$ .

**Definición 3.6.** El espacio  $X$  es *simplemente conexo* si es conexo por caminos y  $\pi_1(X, x_0)$  es trivial para algún  $x_0 \in X$ .



**Lema 3.7.** *Sea  $X$  un espacio simplemente conexo y  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(X, x_0, x_1)$ . Entonces  $\alpha$  y  $\beta$  son homotópicos por caminos.*

*Demostración.* Sean  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(X, x_0, x_1)$ . Entonces  $\bar{\beta} \in \mathcal{C}(X, x_1, x_0)$ . Así  $\alpha * \bar{\beta}$  está definido y es un lazo en  $X$  basado en  $x_0$ . Dado que  $X$  es simplemente conexo,  $\alpha * \bar{\beta} \simeq_c e_{x_0}$ . De esta manera  $[\alpha * \bar{\beta}] = [e_{x_0}]$ . Luego  $[\alpha * \bar{\beta}] \otimes [\beta] = [e_{x_0}] \otimes [\beta]$ . Así

$$[\beta] = [e_{x_0} * \beta] = [e_{x_0}] \otimes [\beta] = [\alpha * \bar{\beta}] \otimes [\beta] = [(\alpha * \bar{\beta}) * \beta] = [\alpha * (\bar{\beta} * \beta)] = [\alpha * e_{x_1}] = [\alpha].$$

□

**Definición 3.8.** *Un espacio puntuado es un par  $(X, x_0)$  donde  $X$  es un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . Una función puntuada  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es una función continua  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $f(x_0) = y_0$ .*

**Definición 3.9.** *Sea  $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  continua. El homomorfismo inducido por  $h$  es la función*

$$h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

definida por

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

Notemos que si  $f$  es un lazo en  $X$  basado en  $x_0$  y  $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ , entonces  $h \circ f: I \rightarrow Y$  es un lazo en  $Y$  basado en  $y_0$ . Por otra parte, la función  $h_*$  está bien definida ya que si  $H: f \simeq_c g$ , entonces  $(h \circ H): (h \circ f) \simeq_c (h \circ g)$ . Que  $h_*$  es homomorfismo se sigue de la ecuación

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g).$$

El homomorfismo  $h_*$  no solo depende de  $h$  sino también del punto base que se considere. Si consideramos puntos base distintos  $x_0$  y  $x_1$  entonces tendremos homomorfismos inducidos  $(h_{x_0})_*$ , y  $(h_{x_1})_*$ .

**Teorema 3.1.**

- Si  $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  y  $k: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  son funciones puntuadas, entonces  $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$ .
- La función identidad  $id_X: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  induce el homomorfismo identidad  $(id_X)_*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$ .

*Demostración.*

a) Dado  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  se tiene

$$\begin{aligned} (k \circ h)_*([f]) &= [(k \circ h) \circ f] \\ &= [k \circ (h \circ f)] \\ &= k_*([h \circ f]) \\ &= k_*(h_*([f])) \\ &= (k_* \circ h_*)([f]) \end{aligned}$$

b) Dado  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ , se tiene  $(id_X)_*([f]) = [id_X \circ f] = [f]$ . □

El siguiente corolario nos dice que el grupo fundamental de un espacio es un invariante topológico.

**Corolario 3.10.** Si  $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es un homeomorfismo, entonces  $h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  es un isomorfismo.

*Demostración.* Basta probar que  $h_*$  es biyectivo.

Sean  $h^{-1}: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  la inversa de  $h$ .

Por una parte

$$(h^{-1})_* \circ h_* = (h^{-1} \circ h)_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$$

Por otra parte

$$h_* \circ (h^{-1})_* = (h \circ h^{-1})_* = (id_Y)_* = id_{\pi_1(Y, y_0)}$$

Por lo tanto  $h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  es un isomorfismo. □

#### 4. ESPACIOS CUBRIENTES

En esta sección se estudiarán los espacios cubrientes los cuales se utilizan para el cálculo de grupos fundamentales.

**Definición 4.1.** Sea  $p: E \rightarrow B$  continua y sobreyectiva. Un conjunto abierto  $U$  de  $B$  está *regularmente cubierto* por  $p$  si existe una colección  $\{V_\alpha\}$  de abiertos en  $E$  tal que

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$$

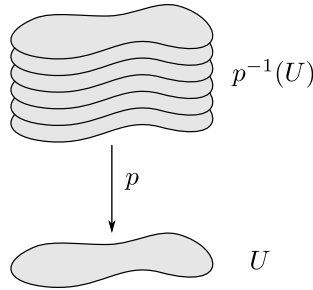


FIGURA 6. Un subconjunto abierto  $U$  regularmente cubierto por  $p$ .

y  $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow U$  es un homeomorfismo para todo  $\alpha$ .

Para cada  $\alpha$ ,  $V_\alpha$  se llama *rebanada* u *hoja*. La colección  $\{V_\alpha\}$  se llama *partición en rebanadas* o *partición en hojas de  $p^{-1}(U)$* . Si  $E$  es simplemente conexo, decimos que  $E$  es un espacio *cubriente universal*.

Notemos que si  $U$  es regularmente cubierto por  $p$ , entonces representamos al conjunto  $p^{-1}(U)$  como una pila de copias de  $U$  flotando sobre  $U$  (ver figura 6). Por otra parte, si  $U$  está regularmente cubierto por  $p$  y  $W$  es un abierto tal que  $W \subset U$ , entonces  $W$  está regularmente cubierto por  $p$ .

**Definición 4.2.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua sobreyectiva. Si para cada  $b \in B$  existe  $U \subset E$  vecindad de  $b$  tal que  $U$  está regularmente cubierto por  $p$ , entonces  $p$  se dice que es una *función cubriente*, y  $E$  es un *espacio cubriente*. El subespacio  $p^{-1}(b)$  de  $E$ , es llamado *fibra* sobre  $b$  y tiene la topología discreta.

**Ejemplo 4.3.** Para todo espacio  $X$ , la función identidad  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  es una función cubriente.

**Ejemplo 4.4.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo, entonces  $f$  es una función cubriente.

**Ejemplo 4.5.** La función  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definida por  $p = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$  es una función cubriente como veremos más adelante en el teorema (4.1). La función  $p$  enrolla la recta  $\mathbb{R}$  sobre  $S^1$  (Ver figura 7).

**Lema 4.6.** Si  $p: E \rightarrow B$  una función cubriente, entonces  $p$  es abierta.

*Demostración.* Sea  $A$  un abierto en  $E$ , y sea  $x \in p(A)$ . Como  $p$  es una función cubriente, existe  $U$  vecindad de  $x$  tal que  $U$  está regularmente cubierto por  $p$ . Sea  $\{V_\alpha\}$  una

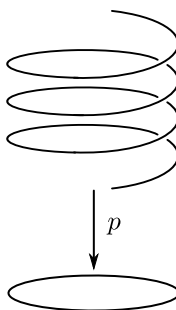


FIGURA 7. La función  $p = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$  enrolla la recta  $\mathbb{R}$  sobre  $S^1$ .

partición en rebanadas de  $p^{-1}(U)$ . Como  $x \in p(A)$ , existe  $y \in A$  tal que  $y = p(x)$ . Sea  $V_\beta$  la rebanada que contiene a  $y$ . Dado que  $A$  y  $V_\beta$  son abiertos en  $E$ ,  $A \cap V_\beta$  es abierto en  $E$  y por lo tanto, es abierto en  $V_\beta$ . Puesto que  $p$  aplica  $V_\beta$  homeomorfamente en  $U$ , el conjunto  $p(V_\beta \cap A) \subset p(A)$ . Por lo tanto  $p(A)$  es abierto.  $\square$

**Teorema 4.1.** La función  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

es una función cubriente.

*Demostración.* Consideremos el conjunto  $U_1 = \{(a, b) \in S^1 : b > 0\}$ . Este conjunto es un abierto en  $S^1$  y es la intersección de  $S^1$  con el semiplano superior abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Dado un punto  $\mathbf{p} = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ , se tiene que  $\mathbf{p} \in U_1$ , si y sólo si,  $\sin(2\pi x) > 0$ . De esta manera  $p^{-1}(U_1) = \{x \in \mathbb{R} : \sin(2\pi x) > 0\}$ .

Por otro lado

$$\begin{aligned} \sin(2\pi x) > 0 &\Leftrightarrow 2\pi n < 2\pi x < (2n+1)\pi \\ &\Leftrightarrow n < x < n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . De esta manera

$$p^{-1}(U_1) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

donde  $V_n = (n, n + \frac{1}{2})$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$  (Ver figura 8).

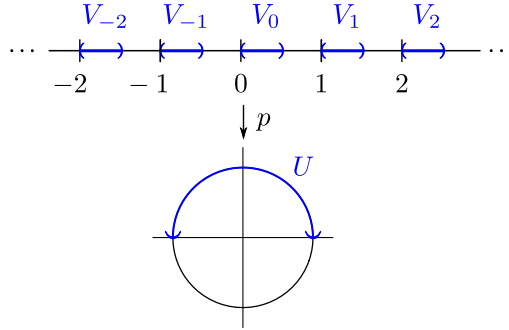


FIGURA 8. Partición en rebanadas de  $p^{-1}(U)$

Dado que  $\cos(2\pi x)$  es estrictamente monótona en cada  $\overline{V}_n$ , la función  $p|_{\overline{V}_n}$  es inyectiva. Además  $p|_{\overline{V}_n}(\overline{V}_n) = \overline{U}_1$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , por lo cual,  $p|_{\overline{V}_n}$  es sobreyectiva. Puesto que  $\overline{V}_n$  es compacto,  $p|_{\overline{V}_n} \rightarrow \overline{U}_1$  es un homeomorfismo para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , en particular,  $p|_{V_n} : V_n \rightarrow U_1$  es un homeomorfismo para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ahora consideremos los conjuntos  $U_2 = \{(a, b) \in S^1 : b < 0\}$ ,  $U_3 = \{(a, b) \in S^1 : a > 0\}$  y  $U_4 = \{(a, b) \in S^1 : a < 0\}$ . Al igual que  $U_1$ , estos conjuntos son abiertos en  $S^1$ . Además  $S^1 = \bigcup_{i=1}^4 U_i$ . Procediendo análogamente al caso de  $U_1$ , tenemos que  $U_2$ ,  $U_3$  y  $U_4$  están regularmente cubiertos por  $p$ . Por lo tanto  $p$  es una función cubriente  $\square$

En el teorema anterior se ha dado un ejemplo de un espacio cubriente conexo por caminos. La función  $p$  puede representarse como la función que enrolla la recta  $\mathbb{R}$  alrededor de  $S^1$  aplicando cada intervalo  $[n, n + 1]$  sobre  $S^1$  (ver figura 7).

Notemos que si  $p : E \rightarrow B$  es una función cubriente, entonces  $p$  es un homeomorfismo local. El recíproco no es necesariamente cierto como veremos en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 4.7.** La función  $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1$  definida por

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

es sobreyectiva y homeomorfismo local, pero no es una función cubriente, pues el punto  $b_0 = (1, 0)$  no tiene una vecindad  $U$  que esté regularmente cubierta por  $p$ .

**Teorema 4.2.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una función cubriente. Si  $B_0$  es subespacio de  $B$  y  $E_0 = p^{-1}(B_0)$  entonces  $p_0 := p|_{E_0}$  es cubriente.

*Demostración.* Dado  $b_0 \in B_0$ , existe  $U$  vecindad de  $b_0$  regularmente cubierta por  $p$ . Sea  $\{V_\alpha\}$  la partición en rebanadas de  $p^{-1}(U)$ . Entonces  $U \cap B_0$  es vecindad de  $b_0$  en  $B_0$ , y los conjuntos  $V_\alpha \cap E_0$  son abiertos disjuntos de  $E_0$ . Además

$$p^{-1}(U \cap B_0) = \bigsqcup_{\alpha} (V_\alpha \cap B_0)$$

y  $V_\alpha \cap E_0$  es homeomorfo a  $U \cap B_0$  para cada  $\alpha$ . □

**Teorema 4.3.** Si  $p: E \rightarrow B$  y  $p': E' \rightarrow B'$  son funciones cubrientes, entonces

$$p \times p': E \times E' \rightarrow B \times B'$$

es una función cubriente.

*Demostración.* Sea  $(b, b') \in B \times B'$ . Entonces  $b \in B$  y  $b' \in B'$ . Como  $p$  y  $p'$  son funciones cubrientes, existen vecindades  $U$  y  $U'$  de  $e$  y  $e'$  respectivamente tales que están regularmente cubiertas por  $p$  y  $p'$  respectivamente. Sean  $\{V_\alpha\}$  y  $\{V'_\beta\}$  las particiones en rebanadas de  $p^{-1}(U)$  y  $(p')^{-1}(U')$  respectivamente. Así

$$(p \times p')^{-1}(U \times U') = \bigsqcup_{\alpha, \beta} (V_\alpha \times V'_\beta).$$

donde  $(V_\alpha \times V'_\beta)$  es abierto en  $E \times E'$  y cada uno de estos conjuntos es homeomorfo a  $U \times U'$  considerando la función  $p \times p'$ . □

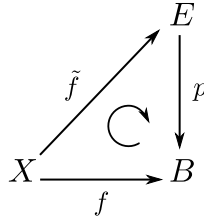
**Ejemplo 4.8.** Consideremos el toro  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ . La función  $p \times p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$  es una función cubriente del toro por el plano  $\mathbb{R}^2$ . Cada uno de los cuadrados unidad  $[n, n+1] \times [m, m+1]$  se enrolla alrededor del toro via la función  $p \times p$

**Definición 4.9.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una función. Si  $f \in \mathcal{C}(X, B)$  para algún espacio  $X$ , un *levantamiento* de  $f$  es una función  $\tilde{f}: X \rightarrow E$  tal que

$$p \circ \tilde{f} = f.$$

**Lema 4.10.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una función cubriente con  $p(e_0) = b_0$ . Dado  $f \in \mathcal{C}(B)$  comenzando en  $b_0$ , tiene un único levantamiento a un camino  $\tilde{f}$  en  $E$  que comienza en  $e_0$ .

*Demostración.* Sea  $f: I \rightarrow B$  un camino en  $B$  tal que  $f(0) = b_0$ . Como  $p$  es una función cubriente, para cada  $b \in B$  existe  $U_b$  vecindad de  $b$  que está regularmente cubierto por  $p$ . La colección  $\{U_b\}$  es una cubierta abierta de  $B$ . Como  $p$  es continua, la colección

FIGURA 9. Levantamiento de  $f$ 

$\mathcal{A} = \{p^{-1}(U_b)\}$  es una cubierta abierta de  $I$ . Dado que  $I$  es compacto, existe  $\delta > 0$ , el cual es el número de Lebesgue asociado a la cubierta  $\mathcal{A}$ . Entonces podemos elegir  $P = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$  una partición del intervalo  $I$ , con  $s_0 = 0$ ,  $s_n = 1$ ,  $s_i < s_{i+1}$  y  $|s_{i+1} - s_i| < \delta$  para  $i = 0, \dots, n-1$ . Así para cada  $i = 0, \dots, n-1$ , existe  $b_i \in B$  de tal manera que  $[s_i, s_{i+1}] \subset p^{-1}(U_{b_i})$ . De esta manera

$$f([s_i, s_{i+1}]) \subset U_{b_i} \text{ para cada } i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

A continuación definiremos el levantamiento  $\tilde{f}$  por pasos:

**Paso 1:** Primero definimos  $\tilde{f}(0) = e_0$ .

**Paso 2:** Ahora definamos  $\tilde{f}(s)$  para  $s \in [0, s_1]$ .

Por la ecuación (3),  $f([0, s_1]) \subset U_{b_0}$ . Como  $U_{b_0}$  está regularmente cubierto por  $p$ , entonces existe una partición en rebanadas  $\mathcal{C}_0$  de  $p^{-1}(U_{b_0})$ . Así  $e_0$  pertenece a alguno de los conjuntos de la partición  $\mathcal{C}_0$ , digamos que a  $V_0$ . Para  $s \in [0, s_1]$  definamos  $\tilde{f}_0(s)$  por

$$\tilde{f}_0(s) = (p|_{V_0})^{-1}(f(s))$$

Dado que  $p|_{V_0}: V_0 \rightarrow U$  es un homeomorfismo,  $\tilde{f}_0$  es continua sobre  $[0, s_1]$ .

**Paso 3:** Análogamente, por la ecuación (3),  $f([s_i, s_{i+1}]) \subset U_{b_i}$  para  $i = 1, \dots, n-1$ . Como  $U_{b_i}$  está regularmente cubierto por  $p$ , existe una partición en rebanadas  $\mathcal{C}_i$  de  $p^{-1}(U_{b_i})$ . Luego, para  $s_i$  existe  $V_i \in \mathcal{C}_i$  tal que  $s_i \in V_i$ . De esta manera para  $s \in [s_i, s_{i+1}]$  definimos  $\tilde{f}_i(s)$  como

$$\tilde{f}_i(s) = (p|_{V_i})^{-1}(f(s))$$

Dado que  $p|_{V_i}: V_i \rightarrow U_{b_i}$  es un homeomorfismo,  $\tilde{f}_i$  es continua sobre  $[s_i, s_{i+1}]$ . Finalmente, dado  $s \in I$  definimos  $\tilde{f}$  por

$$\tilde{f}(s) = \tilde{f}_i(s) \quad \text{si } s \in [s_i, s_{i+1}].$$

La función  $\tilde{f}$  está bien definida, pues  $\tilde{f}_i$  está bien definida para cada  $i = 0, \dots, n-1$ . Además  $\tilde{f}_i(s_{i+1}) = \tilde{f}_{s_{i+1}}(s_{i+1})$  para cada  $i = 0, \dots, n-1$ . Por el lema del pegamiento,  $\tilde{f}$  es continua.

Ahora probaremos  $p \circ \tilde{f} = f$ . Sea  $s \in I$ , entonces  $s \in [s_i, s_{i+1}]$  para algún  $i = 0, \dots, n-1$ . Así

$$\begin{aligned} (p \circ \tilde{f})(s) &= p(\tilde{f}(s)) \\ &= p(\tilde{f}_i(s)) \\ &= p\left((p|_{V_i})^{-1}(f(s))\right) \\ &= f(s) \end{aligned}$$

Finalmente probaremos la unicidad de  $\tilde{f}$ , lo cual, haremos también por pasos. Supongamos que  $\tilde{g}$  es otro levantamiento de  $f$  que comienza en  $e_0$ .

*Paso a:* Consideremos el intervalo  $[0, s_1]$ . Como  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  comienzan en  $e_0$ , entonces  $\tilde{f}(0) = e_0 = \tilde{g}(0)$ . Puesto que  $\tilde{f}(0) \in V_0$  se tiene  $\tilde{g}(0) \in V_0$ . Dado que  $\tilde{f}$  es continua y  $[0, s_1]$  es conexo,  $\tilde{f}([0, s_1])$  es conexo. Luego  $\tilde{f}([0, s_1]) \subset V_0$ . Supongamos que existe  $s_* \in [0, s_1]$  tal que  $\tilde{f}(s_*) \neq \tilde{g}(s_*)$ . Por definición  $\tilde{f}(s_*) = \tilde{f}_0(s_*) = (p|_{V_0})^{-1}(f(s_*))$ . Notemos que  $\tilde{f}(s_*)$  es el único punto de  $p^{-1}(f(s_*))$  que está en  $V_0$ . Así, existe  $W_0 \in \mathcal{C}_0$  tal que  $W_0 \neq V_0$  y  $\tilde{g}(s_*) \in W_0$ . Como  $\tilde{g}$  es continua y  $[0, s_1]$  es conexo,  $\tilde{g}([0, s_1])$  es conexo. Así  $\tilde{g}([0, s_1]) \subset W_0$ . Entonces  $\tilde{g}(0) \in W_0$ . De esta manera  $\tilde{g}(0) \in V_0 \cap W_0$ , lo cual contradice que los elementos de  $\mathcal{C}_0$  son disjuntos. Por lo tanto

$$\tilde{f}(s) = \tilde{g}(s) \quad \text{para todo } s \in [0, s_1]. \quad (4)$$

*Paso b:* Ahora consideremos el intervalo  $[s_1, s_2]$ . Por la ecuación (4),  $\tilde{f}(s_1) = \tilde{g}(s_1)$ . Dado que  $\tilde{f}(s_1) \in V_1$ , se tiene que  $\tilde{g}(s_1) \in V_1$ . Como  $\tilde{f}$  es continua y  $[s_1, s_2]$  es conexo,  $\tilde{f}[s_1, s_2]$  es conexo. Entonces  $\tilde{f}[s_1, s_2] \subset V_1$ . Supongamos que existe  $s_* \in [s_1, s_2]$  tal que  $\tilde{f}(s_*) \neq \tilde{g}(s_*)$ . Luego  $\tilde{f}(s_*) = \tilde{f}_1(s_*) = (p|_{V_1})^{-1}(f(s_*))$ . El punto  $\tilde{f}(s_*)$  es el único punto de  $p^{-1}(f(s_*))$  que pertenece a  $V_1$ . Así, existe  $W_1 \in \mathcal{C}_1$  tal que  $W_1 \neq V_1$  y  $\tilde{g}(s_*) \in W_1$ . Como  $\tilde{g}$  es continua y  $[s_1, s_2]$  es conexo,  $\tilde{g}([s_1, s_2])$  es conexo. Así  $\tilde{g}([s_1, s_2]) \subset W_1$ . Entonces  $\tilde{g}(s_1) \in W_1$ . De esta manera  $\tilde{g}(s_1) \in V_1 \cap W_1$ , lo cual contradice que  $V_1 \cap W_1 = \emptyset$ . Por lo tanto



$$\tilde{f}(s) = \tilde{g}(s) \quad \text{para todo } s \in [s_1, s_2].$$

*Paso c:* Procediendo como anteriormente, para cada  $i = 0, \dots, n-1$  se tiene

$$\tilde{f}(s) = \tilde{g}(s) \quad \text{para todo } s \in [s_i, s_{i+1}]$$

Por lo tanto  $\tilde{f}(s) = \tilde{g}(s)$  para todo  $s \in I$ . □

La demostración del siguiente lema se puede consultar en [2]

**Lema 4.11.** *Sea  $p: E \rightarrow B$  una función cubriente con  $p(e_0) = b_0$ . Sea  $F: I \times I \rightarrow B$  una función continua con  $F(0,0) = b_0$ . Entonces existe un único levantamiento de  $F$  a una función continua  $\tilde{F}: I \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{F}(0,0) = e_0$ . Si  $F$  es una homotopía por caminos, entonces  $\tilde{F}$  es una homotopía por caminos.*

**Teorema 4.4.** *Sea  $p: E \rightarrow B$  una función cubriente con  $p(e_0) = b_0$ . Sean  $f, g \in \mathcal{C}(B; b_0, b_1)$  y sean  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  sus respectivos levantamientos a caminos en  $E$  comenzando en  $e_0$ . Si  $f$  y  $g$  son homotópicos por caminos, entonces  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  terminan en el mismo punto de  $E$  y son homotópicos por caminos.*

*Demostración.* Sea  $H: I \times I \rightarrow X$  la homotopía de caminos entre  $f$  y  $g$ . Entonces  $H(0,0) = b_0$ . Sea  $\tilde{H}: I \times I \rightarrow E$  el levantamiento de  $H$  a  $E$  tal que  $\tilde{H}(0,0) = e_0$ . Por el lema (4.11)  $\tilde{H}$  es una homotopía de caminos. Luego  $\tilde{H}(0,t) = e_0$  y  $\tilde{H}(1,t) = e_1$  para todo  $t \in I$ . Las restricción  $\tilde{H}|_{I \times \{0\}}$  de  $\tilde{H}$  al lado inferior de  $I \times I$  es un camino en  $E$  comenzando en  $e_0$  y que es un levantamiento de  $H|_{I \times \{0\}}$ . Por la unicidad de los levantamientos de caminos tenemos  $\tilde{H}(s,0) = \tilde{g}(s)$ .

Análogamente  $\tilde{H}|_{I \times \{1\}}$  es un camino en  $E$  que es un levantamiento de  $H|_{I \times \{1\}}$  que comienza en  $e_0$ .

Por la unicidad de los levantamientos de caminos,  $\tilde{H}(s,1) = \tilde{g}(s)$ .

Por lo tanto,  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  terminan en  $e_1$  y  $\tilde{H}$  es una homotopía de caminos entre ellos. □

**Definición 4.12.** *Sea  $p: E \rightarrow B$  una función cubriente y  $b_0 \in B$ . Sea  $e_0$  tal que  $p(e_0) = b_0$ . Dado  $[f] \in \pi_1(B, b_0)$  sea  $\tilde{f}$  el levantamiento de  $f$  a un camino en  $E$  que comience en  $e_0$ . Definamos  $\phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$  por*

$$\phi([f]) = \tilde{f}(1)$$

*A la función  $\phi$  se le conoce como correspondencia del levantamiento derivada de la función cubriente  $p$ .*

**Teorema 4.5.** *Sea  $p: E \rightarrow B$  una función cubriente con  $p(e_0) = b_0$ . Consideremos la correspondencia del levantamiento derivada de  $p$*

$$\phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

- a) Si  $E$  es conexo por caminos entonces  $\phi$  es sobreyectiva.  
 b) Si  $E$  es simplemente conexo, entonces  $\phi$  es biyectiva.

*Demostración.*

- a) Sea  $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ . Como  $E$  es conexo por caminos, existe un camino  $\tilde{f}$  en  $E$  de  $e_0$  a  $e_1$ . Luego  $f = p \circ \tilde{f}$  es un lazo en  $B$  basado en  $b_0$  y  $\phi([f]) = \tilde{f}(1) = e_1$ .  
 b) Sean  $[f], [g] \in \pi_1(B, b_0)$  tales que  $\phi([f]) = \phi([g])$ . Sean  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  levantamientos de  $f$  y  $g$  respectivamente a caminos en  $E$  que comienzan en  $e_0$ . Entonces  $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ . Como  $E$  es simplemente conexo, existe una homotopía de caminos  $\tilde{H}$  en  $E$  entre  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$ . Así  $p \circ \tilde{H}$  es una homotopía de caminos en  $B$  entre  $f$  y  $g$ .  $\square$

Para finalizar, calcularemos el grupo fundamental de  $S^1$ .

**Teorema 4.6.** *El grupo fundamental de  $S^1$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ :*

*Demostración.* Sea  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  la función cubriente del teorema (4.1). Sean  $e_0 = 0$  y  $b_0 = p(e_0)$ . Entonces  $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$ . Dado que  $\mathbb{R}$  es simplemente conexo,  $\phi: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$  es biyectiva.

Sean  $[f], [g] \in \pi_1(B, b_0)$  y sean  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  sus respectivos levantamientos a caminos en  $\mathbb{R}$  que comienzan en 0. Sean  $n = \tilde{f}(1)$  y  $m = \tilde{g}(1)$ . Así  $\phi([f]) = n$  y  $\phi([g]) = m$ . Definamos  $\tilde{g}$  por  $\tilde{g}(s) = n + \tilde{g}(s)$  el cual es un camino en  $\mathbb{R}$ . Como  $p(n+x) = p(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , el camino  $\tilde{g}$  es un levantamiento de  $g$  que comienza en  $n$ . De esta manera  $\tilde{f} * \tilde{g}$  está bien definido y es el levantamiento de  $f * g$  que comienza en 0. El punto final de  $\tilde{g}$  es  $\tilde{g}(1) = n + m$ . Entonces

$$\phi([f] \otimes [g]) = n + m = \phi([f]) + \phi([g]) \quad (5)$$

$\square$

#### REFERENCIAS

- [1] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001
- [2] J. R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [3] W. S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Springer-Verlag, New York - Heidelberg, 1977.
- [4] C. Prieto de Castro, *Topología básica*, Fondo de Cultura Económica, México, 2013.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN 1421, ESQ CALZADA OLÍMPICA, C.P. 44430, GUADALAJARA, JALISCO, MÉXICO.

*E-mail address:* `vladimir.macias@academicos.udg.mx`

*E-mail address:* `andres.gsandoval@academicos.udg.mx`

*E-mail address:* `ivan.valtierra@academicos.udg.mx`

*E-mail address:* `juan.diaz1559@academicos.udg.mx`



# Análisis funcional



## LA TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$ : UNA INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

RICARDO ÁGUILA GÓMEZ, ALEJANDRO CRISTOPHER NAVA TÉLLEZ,  
MARTÍN MUÑOZ CHÁVEZ

RESUMEN. La transformada  $\mathcal{Z}$  es una técnica matemática de gran utilidad para convertir señales discretas en el dominio del tiempo, en funciones continuas en el dominio de la frecuencia. Este curso se enfocará en el estudio detallado de la definición y propiedades de la transformada  $\mathcal{Z}$ , cuyo objetivo principal es analizar sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo. A lo largo del curso, se explicará cómo partir de un sistema dinámico continuo y convertirlo en uno discreto para aplicar la transformada  $\mathcal{Z}$  en su análisis. A su vez, se abordará la importancia de usar estas herramientas en ingeniería y se ofrecerán casos aplicados para demostrar la utilidad de la teoría.

### 1. INTRODUCCIÓN

En el mundo actual, donde la tecnología digital desempeña un papel fundamental en casi todas las áreas de la ciencia, ingeniería y tecnología, el análisis y el diseño de sistemas discretos se han vuelto de vital importancia. Los sistemas discretos, que operan en el dominio discreto, son utilizados en una amplia gama de aplicaciones, desde el procesamiento de señales digitales hasta el control de sistemas automatizados.

Una herramienta clave para el estudio de los sistemas dinámicos discretos es la Transformada  $\mathcal{Z}$ . Al igual que la transformada de Laplace en el dominio continuo, la transformada  $\mathcal{Z}$  permite analizar y caracterizar las propiedades de los sistemas en el dominio discreto. La transformada  $\mathcal{Z}$  proporciona una representación en el dominio de la frecuencia compleja de las señales y sistemas discretos, lo que facilita el

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 82B44.

*Palabras Claves.* Sistema dinámico discreto, Transformada  $\mathcal{Z}$ .

análisis de su comportamiento en términos de respuesta en frecuencia, estabilidad y rendimiento.

Comenzaremos por comprender los fundamentos de los sistemas discretos, incluyendo conceptos como la secuencia de entrada, la respuesta en el tiempo discreto y las ecuaciones en diferencias. Estudiaremos la Transformada  $\mathcal{Z}$ , analizando su definición, propiedades y aplicaciones en el análisis de sistemas dinámicos discretos. Además, examinaremos cómo la Transformada  $\mathcal{Z}$  se utiliza para resolver ecuaciones en diferencias, estudiar la estabilidad y el rendimiento de los sistemas de control discreto, y caracterizar las respuestas en frecuencia de los sistemas discretos. También exploraremos técnicas de inversión de la Transformada  $\mathcal{Z}$  y algunas aplicaciones.

## 2. LA TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$

**2.1. Sucesiones.** Comenzaremos con algunos conceptos clave que sentarán las bases para el desarrollo de esta sección.

**Definición 2.1** (Sucesión finita.). *Una sucesión finita  $\{x_k\}_0^n$  es un conjunto ordenado de números reales o complejos*

$$\{x_k\}_0^n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

*el conjunto de números está ordenado, así que la posición en la sucesión es importante. La posición está identificada con el índice de posición  $k$ , donde  $k$  es un entero.*

Si el número de elementos en el conjunto es infinito tenemos entonces una **sucesión infinita**

$$\{x_k\}_0^\infty = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}.$$

Cuando tratamos con muestras de funciones en el tiempo  $t$ , es necesario contar con medios que nos permitan tener  $t < 0$ . Para hacer esto, permitimos que la sucesión de números se extienda al infinito en ambos sentidos de la posición inicial  $x_0$ , es decir

$$\{x_k\}_{-\infty}^\infty = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}.$$

Las sucesiones  $\{x_k\}_{-\infty}^\infty$  para las cuales  $x_k = 0$  cuando  $k < 0$  son llamadas **sucesiones causales** por analogía con las funciones causales  $f(t)H(t)$  de tiempo continuo definidas como

$$f(t)H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ f(t), & t \geq 0. \end{cases}$$



Mientras que para algunas sucesiones finitas es posible especificar la sucesión haciendo una lista de todos los elementos del conjunto, lo normal es que una sucesión esté especificada por una formula de su elemento general  $x_k$ .

**Definición 2.2** (Serie geométrica.). *Las series geométricas son de la forma*

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

donde  $a$  y  $r$  son números reales fijos y  $a \neq 0$ .

La convergencia de la serie geométrica esta dada de la siguiente manera

(1) Si  $|r| < 1$ , entonces la serie geométrica converge y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

(2) Si  $|r| \geq 1$ , entonces la serie geométrica diverge.

**2.2. Transformada  $\mathcal{Z}$ .** Definiremos la transformada  $Z$  y obtendremos la transformada de algunas de las funciones mas usuales.

**Definición 2.3** (Transformada  $\mathcal{Z}$ ). *La transformada  $\mathcal{Z}$  de una sucesión  $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$  está definida, en general, como*

$$\mathcal{Z}\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} \tag{1}$$

siempre que la serie sea convergente y donde  $z$  es una variable compleja todavía indefinida.

El proceso de aplicar la transformada  $Z$  a una sucesión produce una función de variable compleja  $z$ , cuya forma depende de la propia sucesión. El símbolo  $\mathcal{Z}$  denota el **operador transformada  $\mathcal{Z}$** , que cuando opera sobre una sucesión  $\{x_k\}$ , transforma está última en la función  $X(z)$  de variable compleja  $z$ . Es usual referirse a  $\{x_k\}$ ,  $X(z)$  como **par de transformadas  $z$**  que algunas veces se escribe como  $\{x_k\} \longleftrightarrow X(z)$ .

Para sucesiones  $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$  que son causales, esto es  $x_k = 0$  cuando  $k < 0$  la transformada  $\mathcal{Z}$  dada en (1) se reduce a

$$\mathcal{Z}\{x_k\}_0^{\infty} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} \tag{2}$$

Estamos interesados en las sucesiones causales y por tanto la definición dada en (2) será la que utilizaremos de aquí en adelante. A partir de ahora usaremos  $\{x_k\}$  para denotar  $\{x_k\}_0^\infty$ . Sin embargo las sucesiones no causales son de suma importancia y surgen de manera particular en los campos de procesamiento digital de imágenes entre otros.

Una propiedad fundamental de la transformada  $\mathcal{Z}$  es su linealidad, que se puede expresar como sigue.

**Definición 2.4** (Linealidad de la transformada  $\mathcal{Z}$ ). *Si  $\{x_k\}$  y  $\{y_k\}$  son sucesiones que tienen transformada  $\mathcal{Z}$   $\{x_k\}$  y  $\{y_k\}$  respectivamente si  $\lambda$  y  $\mu$  son constantes reales o complejas cualesquiera, entonces*

$$\mathcal{Z}\{\lambda x_k + \mu y_k\} = \lambda \mathcal{Z}\{x_k\} + \mu \mathcal{Z}\{y_k\} = \lambda X(z) + \mu Y(z).$$

Como una consecuencia de esta propiedad, decimos que el operador transformada  $\mathcal{Z}$ , es un **operador lineal**. Una prueba de la propiedad se sigue directamente de la definición (2) ya que

$$\mathcal{Z}\{\lambda x_k + \mu y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda x_k + \mu y_k}{z^k} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} + \mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} = \lambda X(z) + \mu Y(z).$$

La región de existencia de la transformada  $\mathcal{Z}$ , en el plano  $z$ , de la combinación lineal será la intersección de las regiones de existencia de las transformadas  $z$  individuales  $X(z)$  y  $Y(z)$ .

**Ejercicio 2.5.** *Determine la transformada  $z$  de la sucesión  $\{a^k\}$ ,  $k \geq 0$ .*

**Solución 2.6.** *A partir de la definición (2),*

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k$$

que reconocemos como una serie geométrica, con razón común  $r = \frac{a}{z}$  entre términos sucesivos. Así la serie converge para  $|z| > |a|$ , cuando

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{a}{z}\right)^k}{1 - \frac{a}{z}}$$

llegando a

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|, \quad (3)$$

así que  $\{x_k\} = \{a^k\}$  y  $X(z) = \frac{z}{z-a}$  es un ejemplo de un par de transformadas  $z$ .

Del ejemplo anterior vemos que la transformada  $\mathcal{Z}$  de la sucesión  $\{a^k\}$  existe si restringimos la variable compleja  $z$  de manera que este fuera del círculo  $|z| = a$  en el plano  $z$ . Desde otro punto de vista, la función

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

puede pensarse como una **función generadora** de la sucesión  $\{a^k\}$ , en el sentido de que el coeficiente de  $\frac{1}{z^k}$  en la expansión de  $X(z)$  en potencias de  $\frac{1}{z}$  genera el  $k$ -simo término de la sucesión  $\{a^k\}$ . Esto se puede verificar fácilmente, ya que

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{-1}$$

y puesto que  $|z| > |a|$ , podemos expandir como

$$\left(1 - \frac{a}{z}\right)^{-1} = 1 + \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a}{z}\right)^k + \dots$$

y vemos que el coeficiente de  $\frac{1}{z^k}$  es  $a^k$  como se esperaba.

**Ejercicio 2.7.** Determine la transformada  $\mathcal{Z}$  de la sucesión  $\{k\}$ .

**Solución 2.8.** A partir de la definición (2),

$$\mathcal{Z}\{k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = z \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-(k+1)} = -z \frac{d}{dz} \left( \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \right),$$

por lo que

$$\mathcal{Z}\{k\} = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right) = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = -z \left( \frac{(z-1) \frac{d}{dz}(z) - z \frac{d}{dz}(z-1)}{(z-1)^2} \right),$$

con esto

$$\mathcal{Z}\{k\} = -z \left( \frac{(z-1)(1) - z(1)}{(z-1)^2} \right) = -z \left( \frac{-1}{(z-1)^2} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

por tanto

$$\mathcal{Z}\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1.$$

**Ejercicio 2.9.** Determine la transformada  $z$  de la sucesión  $\{e^{ikx}\}$ .

**Solución 2.10.** A partir de la definición (2),

$$\mathcal{Z}\{e^{ikx}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikx} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{z}} = \frac{z}{z - e^{ix}}, \quad |z| > 1.$$

Del resultado anterior vamos a determinar la transformada  $\mathcal{Z}$  para la sucesión  $\{\cos kx\}$  y  $\{\sin kx\}$  utilizando el hecho de que

$$\{e^{ikx}\} = \{\cos kx + i \sin kx\} = \{\cos kx\} + i \{\sin kx\}$$

de esta manera utilizando la linealidad de la transformada  $\mathcal{Z}$  tenemos

$$\mathcal{Z}\{e^{ikx}\} = \mathcal{Z}\{\cos kx + i \sin kx\} = \mathcal{Z}\{\cos kx\} + i \mathcal{Z}\{\sin kx\},$$

por otro lado

$$\mathcal{Z}\{e^{ikx}\} = \frac{z}{z - e^{ikx}} = \frac{z}{z - \cos kx + i \sin kx}$$

que multiplicando por el conjugado en el numerador y denominador de esta última expresión

$$\mathcal{Z}\{e^{ikx}\} = \frac{z}{z - \cos kx + i \sin kx} \cdot \frac{z - \cos kx + i \sin kx}{z - \cos kx + i \sin kx} = \frac{z(z - \cos kx) + i \sin kx}{(z - \cos kx)^2 + \sin^2 kx}$$

de donde simplificando

$$\mathcal{Z}\{e^{ikx}\} = \frac{z(z - \cos kx) + i \sin kx}{z^2 - 2z \cos kx + \cos^2 kx + \sin^2 kx} = \frac{z(z - \cos kx)}{z^2 - 2 \cos kx + 1} + i \frac{z \sin kx}{z^2 - 2 \cos kx + 1}$$

por tanto

$$\mathcal{Z}\{\cos kx\} = \frac{z(z - \cos kx)}{z^2 - 2 \cos kx + 1}, \quad \mathcal{Z}\{\sin kx\} = \frac{z \sin kx}{z^2 - 2 \cos kx + 1}, \quad |z| > 1.$$

**Ejercicio 2.11.** Determine la transformada  $\mathcal{Z}$  de la sucesión impulso unitario.

$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, \dots\}.$$

**Solución 2.12.** A partir de la definición (2),

$$\mathcal{Z}\{\delta_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k}{z^k} = \delta_0 z^0 = (1)(1) = 1.$$

**2.3. La primera propiedad de traslación (retroso).** Introduciremos dos propiedades relacionadas con la transformada  $\mathcal{Z}$  de la versión trasladada de la misma sucesión. Primero consideraremos la versión de retardo de la sucesión  $\{x_k\}$ , denotada por  $\{y_k\}$ , con

$$y_k = x_{k-k_0}.$$

Aquí  $k_0$  es el número de pasos en el retardo; por ejemplo, si  $k_0 = 2$ , entonces  $y_k = x_{k-2}$ , así que

$$y_0 = x_{-2}, \quad y_1 = x_{-1}, \quad y_2 = x_0, \quad y_3 = x_1, \dots$$

Así la sucesión  $\{y_k\}$  es simplemente la sucesión  $\{x_k\}$  movida hacia atrás o retrasada, en dos pasos. A partir de la definición (2),

$$\mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k-k_0}}{z^k}$$

Si tomamos  $p = k - k_0$  entonces  $k = p + k_0$  y haciendo este cambio de índice en la suma, tenemos

$$\mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^{p+k_0}} = \frac{1}{z^{k_0}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} = \frac{1}{z^{k_0}} X(z).$$

donde  $X(z)$  es la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $\{x_k\}$ .

Por tanto tenemos el resultado

**Teorema 2.13** (Primera propiedad de traslación (retardo)). *Sea la sucesión retrasada  $k_0$  pasos hacia atrás, entonces su transformada  $\mathcal{Z}$  está dada por*

$$\mathcal{Z}\{x_{k-k_0}\} = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}\{x_{k-k_0}\}. \quad (4)$$

que se conoce como la **primera propiedad de traslación** de la transformada  $\mathcal{Z}$ .

**Ejercicio 2.14.** *La sucesión causal  $\{x_k\}$  está generada por  $x_k = \left(\frac{1}{2^k}\right)$ ,  $k \geq 0$ . Determine la transformada  $\mathcal{Z}$  de la sucesión recorrida  $\{x_{k-2}\}$ .*

**Solución 2.15.** *Por la propiedad de traslación (4)*

$$\mathcal{Z}\{x_{k-2}\} = \frac{1}{z^2} \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2^k}\right\},$$

la cual, usando (3), obtenemos

$$\mathcal{Z}\{x_{k-2}\} = \frac{1}{z^2} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{1}{z^2} \frac{2z}{2z - 1} = \frac{2}{z(2z - 1)}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

Podemos confirmar este resultado usando directamente la definición (1). A partir de esto, y del hecho de que  $\{x_k\}$  es una sucesión causal,

$$\{x_k\} = \{x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\} = \left\{0, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

Así,

$$\mathcal{Z}\{x_{k-2}\} = 0 + 0 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{4z^4} + \dots = \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \dots\right)$$

y por tanto

$$\mathcal{Z}\{x_{k-2}\} = \frac{1}{z^2} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{2}{z(2z - 1)}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

**2.4. La segunda propiedad de traslación (avance).** Buscamos ahora una relación entre la transformada  $\mathcal{Z}$  de una versión adelantada de una sucesión y aquella de la sucesión original. Primero consideramos un adelanto de un solo paso. Si  $\{y_k\}$  es la versión adelantada de un solo paso de la sucesión  $\{x_k\}$ , entonces

$$y_k = x_{k+1}, \quad k \geq 0.$$

Entonces

$$\mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{z^k} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{z^{k+1}},$$

y haciendo  $p = k + 1$ , obtenemos

$$\mathcal{Z}\{y_k\} = z \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} = z \left( x_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} - x_0 \right) = z \left( \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} - x_0 \right) = zX(z) - z x_0.$$

Para una sucesión adelantada dos pasos

$$\mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+2}}{z^k} = z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+2}}{z^{k+2}},$$

y haciendo  $p = k + 2$ , obtenemos

$$\mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = z^2 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} = z^2 \left( x_0 + \frac{x_1}{z} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} - x_0 - \frac{x_1}{z} \right) = z^2 \left( \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} - x_0 - \frac{x_1}{z} \right),$$

por tanto

$$\mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = z^2 \left( X(z) - x_0 - \frac{x_1}{z} \right) = z^2 X(z) - z^2 x_0 - z x_1.$$

Podemos generalizar esto para una sucesión de  $k_0$  pasos como sigue

$$\mathcal{Z}\{x_{k+k_0}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+k_0}}{z^k} = z^{k_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+k_0}}{z^{k+k_0}},$$

y haciendo  $p = k + k_0$ , obtenemos

$$\mathcal{Z}\{x_{k+k_0}\} = z^{k_0} \sum_{p=k_0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} = z^{k_0} \left( \sum_{p=0}^{k_0-1} \frac{x_p}{z^p} + \sum_{p=k_0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} - \sum_{p=0}^{k_0-1} \frac{x_p}{z^p} \right) = z^{k_0} \left( \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} - \sum_{p=0}^{k_0-1} \frac{x_p}{z^p} \right),$$

por tanto

$$\mathcal{Z}\{x_{k+k_0}\} = z^{k_0} \left( X(z) - \sum_{n=0}^{k_0-1} \frac{x_n}{z^n} \right) = z^{k_0} X(z) - \sum_{n=0}^{k_0-1} x_n z^{k_0-n}.$$

Así tenemos el siguiente resultado

**Teorema 2.16** (Segunda propiedad de traslación (avance).). *La transformada  $\mathcal{Z}$  para una sucesión adelantada  $k_0$  pasos está dada por*

$$\mathcal{Z}\{x_{k+k_0}\} = z^{k_0} X(z) - \sum_{n=0}^{k_0-1} x_n z^{k_0-n}. \quad (5)$$

Usaremos estos resultados para resolver ecuaciones en diferencias.

Algunas otras propiedades que cumple la transformada  $\mathcal{Z}$  se enuncian a continuación en el siguiente teorema.

**Teorema 2.17** (Propiedades de la transformada  $\mathcal{Z}$ ).

(1) **Multiplicación por  $a^k$** . Si  $\mathcal{Z}\{x_k\} = X(z)$  entonces para una constante  $a$ .

$$\mathcal{Z}\{a^k x_k\} = X\left(\frac{z}{a}\right).$$

(2) **Multiplicación por  $k^n$ .** Si  $\mathcal{Z}\{x_k\} = X(z)$  entonces para un entero positivo  $n$ .

$$\mathcal{Z}\{k^n x_k\} = (-1)^n z^n \frac{d^n}{dz^n} X(z).$$

(3) **Teorema del valor inicial.** Si  $\{x_k\}$  es una sucesión cuya transformada  $\mathcal{Z}$  es  $X(z)$  entonces el teorema del valor inicial establece que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x_0.$$

(4) **Teorema del valor final.** Si  $\{x_k\}$  es una sucesión cuya transformada  $\mathcal{Z}$  es  $X(z)$  entonces el teorema del valor final establece que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) X(z).$$

siempre que los polos de  $\left(1 - \frac{1}{z}\right) X(z)$  estén dentro del círculo unitario.

**2.5. Tabla de la transformada  $\mathcal{Z}$ .** Para facilitar los resultados que se han obtenido hasta este momento, es útil tenerlos en una tabla como se muestra a continuación.

$\{x_k\}, k \geq 0$	$\mathcal{Z}\{x_k\}$	Región de convergencia
$\delta_k$	1	Todo $z$
1	$\frac{z}{z-1}$	$ z  > 1$
$a^k$	$\frac{z}{z-a}$	$ z  >  a $
$k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z  > 1$
$ka^{k-1}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$ z  >  a $
$e^{-kT}$	$\frac{z}{z-e^{-T}}$	$ z  > e^{-T}$
$\cos k\omega T$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$ z  > 1$
$\sin k\omega T$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$ z  > 1$



### 3. LA TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$ INVERSA

Consideremos el problema de recuperar una sucesión causal  $\{x_k\}$  a partir del conocimiento de  $X(z)$ , su transformada  $\mathcal{Z}$ .

$$\text{Si } \mathcal{Z}\{x_k\} = X(z) \text{ entonces } \{x_k\} = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)].$$

Esta correspondencia entre  $X(z)$  y  $\{x_k\}$  es llamada la **transformada inversa de  $z$** , siendo  $\{x_k\}$  la **transformada inversa** de  $X(z)$ , y  $\mathcal{Z}^{-1}$  el **operador transformación inversa de  $z$** . Para determinar la transformada inversa vemos a utilizar dos técnicas, la primera utilizando la definición de transformada inversa y la segunda es el método de las fracciones parciales.

**3.1. Integral de inversión.** A partir de la definición de la transformada  $\mathcal{Z}$  para la sucesión  $\{x_k\}$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots + \frac{x_k}{z^k} + \frac{x_{k+1}}{z^{k+1}} + \dots$$

multiplicamos ambos lados de la ecuación por  $z^{k-1}$  e integrando sobre un contorno cerrado  $C$ , el cual encierre todas las singularidades de  $X(z)$ , tenemos

$$\oint_C X(z)z^{k-1} dz = \oint_C x_0 z^{k-1} dz + \oint_C x_1 z^{k-2} dz + \dots + \oint_C x_n z^{-1} dz + \oint_C x_{k+1} z^{-2} dz + \dots$$

por el teorema de Cauchy-Goursat todas las integrales se hacen cero excepto la que tiene el factor  $z^{-1}$ , entonces

$$\oint_C X(z)z^{k-1} dz = 2\pi i x_k$$

esto conduce a la integral de inversión de la transformada  $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z)z^{k-1} dz.$$

**Definición 3.1** (Transformada  $\mathcal{Z}$  inversa). *La transformada  $\mathcal{Z}$  inversa se define como*

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z)z^{k-1} dz \tag{6}$$

donde  $C$  es un círculo cerrado que envuelve el origen y la región de convergencia. El contorno  $C$  debe contener todos los polos de  $X(z)$ .

Así podemos obtener la sucesión  $\{x_k\}$  con esta integral, que es el método de la **integral de inversión**. La manera de calcular esta integral es por medio de la teoría de residuos

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z)z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[ 2\pi i \sum_{n=0}^m \text{Res}(X(z)z^{k-1}, z_n) \right],$$

de esta manera

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z)z^{k-1} dz = \sum_{n=0}^m \text{Res}(X(z)z^{k-1}, z_n),$$

donde  $\text{Res}(X(z)z^{k-1}, z_n)$  se calcula como sigue

(1) El polo  $z_n$  es un polo simple, entonces

$$\text{Res}(X(z)z^{k-1}, z_n) = \lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n)X(z)z^{k-1}.$$

(2) El polo  $z_n$  tiene multiplicidad  $r$ , entonces

$$\text{Res}(X(z)z^{k-1}, z_n) = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} [(z - z_n)^r X(z)z^{k-1}].$$

**Ejercicio 3.2.** Determine la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa para

$$X(z) = \frac{z}{z^3 - 6z^2 - 11z - 6}.$$

**Solución 3.3.** Para poder determinar la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa, primero tenemos que encontrar los ceros del denominador para factorizar y determinar los polos y su orden. Podemos observar que los ceros del denominador son  $z = 1$ ,  $z = 2$  y  $z = 3$  y de esta manera

$$X(z) = \frac{z}{z^3 - 6z^2 - 11z - 6} = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Utilizando la definición (6) obtenemos

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} z^{k-1} dz$$

para calcular esta integral, utilizamos el teorema del residuo, sabiendo que  $z_0 = 1$ ,  $z_1 = 2$  y  $z_2 = 3$  son polos simples, entonces

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^k}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz = \sum_{n=0}^2 \operatorname{Res} \left[ \frac{z^k}{(z-1)(z-2)(z-3)}, z_n \right]$$

calculando los residuos tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[ \frac{z^k}{(z-1)(z-2)(z-3)}, z_0 = 1 \right] &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)z^k}{(z-2)(z-3)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^k}{(z-2)(z-3)} \\ &= \frac{(1)^k}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[ \frac{z^k}{(z-1)(z-2)(z-3)}, z_1 = 2 \right] &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-2)z^k}{(z-1)(z-3)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^k}{(z-1)(z-3)} \\ &= \frac{(2)^k}{(2-1)(2-3)} = \frac{2^k}{(1)(-1)} = -2^k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[ \frac{z^k}{(z-1)(z-2)(z-3)}, z_2 = 3 \right] &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{(z-3)z^k}{(z-1)(z-2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z^k}{(z-1)(z-2)} \\ &= \frac{(3)^k}{(3-1)(3-2)} = \frac{3^k}{(2)(1)} = \frac{3^k}{2}. \end{aligned}$$

haciendo la suma de los residuos, obtenemos la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa, por tanto

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2} - 2^k + \frac{3^k}{2}.$$

**Ejercicio 3.4.** Determine la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa para

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)}.$$

**Solución 3.5.** Aplicando la definición (6) obtenemos

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^2}{(z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)} z^{k-1} dz$$

para calcular esta integral, utilizamos el teorema del residuo, sabiendo que  $z_0 = 1$ , es un polo de segundo orden y  $z_1 = \frac{1}{2}$  es un polo simple, entonces

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)} dz = \sum_{n=0}^1 \operatorname{Res} \left[ \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)}, z_n \right]$$

calculando los residuos tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[ \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)}, z_0 = 1 \right] &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left[ \frac{(z-1)^2 z^{k+1}}{(z-1)^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^{k+1}}{z - \frac{1}{2}} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)(k+1)z^k - z^{k+1}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(k+1)1^k - 1^{k+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}(k+1)}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\frac{1}{4}} \\ &= 2(k+1) - 4 = 2k - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[ \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-\frac{1}{2})}, z_1 = \frac{1}{2} \right] &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left[ \frac{(z-\frac{1}{2})z^{k+1}}{(z-1)^2(z-\frac{1}{2})} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left[ \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2} \right] = \frac{(\frac{1}{2})^2}{(-\frac{1}{2})^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2^k} \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{2^k} = 2^{1-k}. \end{aligned}$$

haciendo la suma de los residuos, obtenemos la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa, por tanto

$$\mathcal{Z}^{-1} \{X(z)\} = 2k - 2 - 2^{1-k}.$$

**3.2. Expansión en fracciones parciales.** Sea  $X(z)$  expresada como un cociente de polinomios en  $z$

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (7)$$

donde el orden de  $P$  es menor o igual al de  $Q$ . Entonces se puede expandir  $X(z)$  en fracciones parciales, al identificar a cada una de éstas con una transformada  $\mathcal{Z}$  elemental e invertir cada fracción en términos de las funciones elementales.

Sea  $X(z)$  una transformada  $\mathcal{Z}$  de la sucesión  $\{x_k\}$ . Para encontrar esta sucesión se procede de la siguiente manera:

(a) Suponga que

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{zP_1(z)}{Q(z)}$$

esto se debe a que en muchos casos se presentan transformadas  $z$  de las sucesiones más comunes y presentan un factor  $z$  en el numerador.

(b) Divida a  $X(z)$  entre  $z$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{P_1(z)}{Q(z)}.$$

(c) Expanda en fracciones parciales  $\frac{F(z)}{z}$ ; factorizando, de manera que

$$\begin{aligned} Q(z) &= z^n + q_1 z^{n-1} + q_2 z^{n-2} + \dots + q_n \\ &= (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3) \dots (z - \alpha_n), \end{aligned}$$

donde  $\alpha_k$  son las raíces del polinomio  $Q(z)$ .

(d) Obtenga las fracciones parciales, dependiendo los siguientes casos

1. Raíces reales diferentes,  $\alpha_i \neq \alpha_j$ , en este caso se tiene

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{P_1(z)}{Q(z)} = \frac{K_1}{z - \alpha_1} + \frac{K_2}{z - \alpha_2} + \cdots + \frac{K_n}{z - \alpha_n}.$$

2. Para el caso de tener una raíz  $\alpha_i$  repetida  $r_i$  veces, las fracciones asociadas a cada una de ellas tienen la forma siguiente

$$\frac{K_i}{(z - \alpha_i)^{r_i}} + \frac{K_{i-1}}{(z - \alpha_i)^{r_i-1}} + \frac{K_{i-2}}{(z - \alpha_i)^{r_i-2}} + \cdots + \frac{K_2}{(z - \alpha_i)^2} + \frac{K_1}{z - \alpha_i}$$

3. Para el caso de tener una raíz compleja  $\alpha_i$  y su conjugada  $\bar{\alpha}_i$ , se considera la siguiente fracción asociada

$$\frac{Az + B}{z^2 + az + b},$$

donde  $a = -2\text{Re}(\alpha_i)$  y  $b = |\alpha_i|^2$ .

4. Para el caso de tener una raíz compleja  $\alpha_i$  y su conjugada  $\bar{\alpha}_i$ , repetida  $r_i$  veces, entonces

$$\frac{A_i z + B_i}{(z^2 + az + b)^{r_i}} + \frac{A_{i-1} z + B_{i-1}}{(z^2 + az + b)^{r_i-1}} + \cdots + \frac{A_2 z + B_2}{(z^2 + az + b)^2} + \frac{A_1 z + B_1}{z^2 + az + b}$$

(e) Una vez que los coeficientes de cada fracción se determinan, multiplicamos a cada uno de ellos por  $z$

(f) Por medio de las tablas de transformada  $\mathcal{Z}$ , obtenga la transformada inversa de cada fracción y súmelas para obtener  $x_k$ .

**Ejercicio 3.6.** Determine la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa de

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}.$$

**Solución 3.7.** Reescribiendo la transformada  $\mathcal{Z}$  factorizando el denominador

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

dividiendo  $X(z)$  entre  $z$  tenemos

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

descomponiendo en fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

de este modo

$$X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

aplicando la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa y la propiedad de linealidad

$$Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} + Z^{-1}\left\{-\frac{z}{z-1}\right\},$$

usando el resultado  $Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = \{a^k\}$  tenemos que

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z^2-3z+2}\right\} = \{2^k\} - \{1^k\} = \{2^k - 1\}, \quad k \geq 0.$$

#### 4. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Al construir un modelo matemático interesa elegir una variable que tome valores discretos. Así ocurre, por ejemplo, con el tiempo, ya que es común realizar mediciones regulares a la hora de controlar un experimento. Estos datos constituyen un conjunto finito, o infinito numerable, de valores de la variable independiente. Para este tipo de modelos determinísticos discretos, las herramientas matemáticas más adecuadas para analizarlos son las ecuaciones en diferencias y los sistemas en diferencias.

**Definición 4.1** (Ecuación en diferencias). *Una ecuación en diferencias es una expresión del tipo*

$$F(y_{k+n}, y_{k+n-1}, y_{k+n-2}, \dots, y_{k+1}, y_k, k) = 0.$$

*Una solución de la misma, es toda sucesión  $\{y_k\}$  que la cumpla.*

El conjunto de todas las soluciones recibe el nombre de solución general. Esta solución general presenta cierto número de parámetros, que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, dando lugar a las diferentes soluciones particulares.

La transformada  $\mathcal{Z}$  es una herramienta útil en el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, y se utiliza frecuentemente para resolver ecuaciones en diferencias. Para resolver ecuaciones en diferencias utilizando la transformada  $\mathcal{Z}$ , se siguen estos pasos generales:

1. Escribe la ecuación en diferencias en su forma estándar.

$$y_k - a y_{k-1} = b x_k.$$

donde  $y_k$  es la salida,  $x_k$  es la entrada y  $a$  y  $b$  son coeficientes constantes.

2. Aplica la transformada  $\mathcal{Z}$  a ambos lados de la ecuación en diferencias. Supongamos que la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $y_k$  es  $Y(z)$  y la de  $x_k$  es  $X(z)$ , es decir

$$Y(z) - a \frac{Y(z)}{z} = b X(z)$$

3. Factoriza  $Y(z)$  en función de  $X(z)$  y  $z$ . Luego resuelve para  $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{bX(z)}{1 - a z^{-1}}$$

4. Invierte la transformada  $\mathcal{Z}$  para encontrar la solución en el dominio del tiempo discreto. Para hacer esto, necesitas encontrar la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa de  $Y(z)$  utilizando tablas de la transformada  $\mathcal{Z}$  o software de cálculo simbólico. Entonces, la solución en el dominio del tiempo discreto es

$$y_k = b a^k x_k + \sum_{n=1}^{k-1} b a^n x_{k-n}$$

donde  $a^n$  es la respuesta natural del sistema  $\sum_{n=1}^{k-1} b a^n x_{k-n}$  es la respuesta forzada debida a la entrada  $x_k$ .

Las ecuaciones en diferencias más complejas pueden requerir métodos adicionales y técnicas avanzadas. Además, es importante tener en cuenta que el uso de software de cálculo simbólico puede facilitar la inversión de la transformada  $\mathcal{Z}$  en casos más complicados.

**Ejercicio 4.2.** Resuelva la ecuación en diferencias

$$8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 9, \quad k \geq 0,$$

sabiendo que  $y_0 = 1$  y  $y_1 = \frac{3}{2}$ .

**Solución 4.3.** Aplicando la transformada  $\mathcal{Z}$

$$8\mathcal{Z}\{y_{k+2}\} - 6\mathcal{Z}\{y_{k+1}\} + \mathcal{Z}\{y_k\} = 9\mathcal{Z}\{1\}$$



utilizando (5) y las formulas de la tabla de transformadas obtenemos

$$8[z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1] - 6[z Y(z) - z y_0] + Y(z) = \frac{9z}{z-1}$$

que reescribiendo

$$(8z^2 - 6z + 1)Y(z) = 8z^2 y_0 + 8z y_1 - 6z y_0 + \frac{9z}{z-1}$$

aplicando las condiciones iniciales  $y_0 = 1$  y  $y_1 = \frac{3}{2}$ , así

$$(8z^2 - 6z + 1)Y(z) = 8z^2 + 6z + \frac{9z}{z-1}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{8z+6}{(4z-1)(2z-1)} + \frac{9}{(4z-1)(2z-1)(z-1)} \\ &= \frac{z+\frac{3}{4}}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} + \frac{\frac{9}{8}}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})(z-1)} \end{aligned}$$

resolviendo en fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{5}{z-\frac{1}{2}} - \frac{4}{z-\frac{1}{4}} + \frac{6}{z-\frac{1}{4}} - \frac{9}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3}{z-1} \\ &= \frac{2}{z-\frac{1}{4}} - \frac{4}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3}{z-1} \end{aligned}$$

y de esta manera

$$Y(z) = \frac{2z}{z-\frac{1}{4}} - \frac{4z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3z}{z-1}$$

aplicando la transformada inversa

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z}{z-\frac{1}{4}}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{4z}{z-\frac{1}{2}}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{3z}{z-1}\right\}$$

así la solución es

$$\{y_k\} = \left\{2\left(\frac{1}{4}\right)^k - 4\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\right\}.$$

**Ejercicio 4.4.** Resuelva la ecuación en diferencias

$$y_{k+2} + 2y_k = 0, \quad k \geq 0$$

sabiendo que  $y_0 = 1$  y  $y_1 = \sqrt{2}$ .

**Solución 4.5.** *Aplicando la transformada  $\mathcal{Z}$*

$$\mathcal{Z}\{y_k + 2\} + 2\mathcal{Z}\{y_k\} = 0$$

*utilizando (5) y las formulas de la tabla de transformadas obtenemos*

$$z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1 + 2Y(z) = 0$$

*y aplicando las condiciones iniciales  $y_0 = 1$  y  $y_1 = \sqrt{2}$  tenemos*

$$z^2 Y(z) - z^2 - \sqrt{2}z + 2Y(z) = 0$$

*que es equivalente a*

$$\begin{aligned} (z^2 + 2)Y(z) &= z^2 + \sqrt{2}z \\ \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z + \sqrt{2}}{z^2 + 2} \\ &= \frac{z + \sqrt{2}}{(z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2})} \\ &= \frac{z + \sqrt{2}}{(z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}})(z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}})} \end{aligned}$$

*resolviendo en fracciones parciales*

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{1+i}{2i(z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}})} - \frac{1-i}{2i(z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}})} \\ Y(z) &= \frac{1}{2i} \left[ (1+i) \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}} - (1-i) \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}} \right] \end{aligned}$$

*aplicando la transformada inversa*

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{2i} \left[ (1+i) \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}} - (1-i) \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}} \right] \right\}$$

así la solución esta dada por

$$\begin{aligned} \{y_k\} &= \left\{ \frac{2^{\frac{k}{2}}}{2i} \left[ (1+i)e^{i\frac{\pi}{2}k} - (1-i)e^{-i\frac{\pi}{2}k} \right] \right\} \\ &= \left\{ 2^{\frac{k}{2}} \left( \cos \frac{\pi k}{2} + \sin \frac{\pi k}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

5. FUNCIONES  $Z$  DE TRANSFERENCIA

Consideremos la ecuación en diferencias general lineal con coeficientes constantes, modelo de un sistema lineal invariante en el tiempo, con sucesión de entrada  $\{u_k\}$  y sucesión de salida  $\{y_k\}$ , ambas son sucesiones causales siempre.

$$a_n y_k + n + a_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + b_0 u_k \quad (8)$$

donde  $k \geq 0$  y  $n \geq m$  son enteros positivos y las  $a_i$  y  $b_j$  con constantes.

Suponiendo que el sistema esta inicialmente en el estado de reposo, aplicamos la transformada  $\mathcal{Z}$  en todo (8) para obtener

$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0) U(z).$$

El sistema discreto o la función de transferencia  $G(z)$  esta definida como

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (9)$$

al deducir  $G(z)$  de esta forma, hemos supuesto que el sistema estaba inicialmente en el estado de reposo.

La función de transferencia discreta puede expresarse simplemente como

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

la ecuación  $Q(z) = 0$  es la llamada ecuación característica del sistema discreto, su orden  $n$  determina el orden del sistema y sus raíces se llaman los polos de la función de transferencia discreta, a las raíces de  $P(z) = 0$  se conocen como los ceros de la función de transferencia discreta.

## 6. ESTABILIDAD

Un sistema lineal en tiempo discreto de coeficientes constantes con función de transferencia  $G(z)$  es estable si y solo si todos los polos de  $G(z)$  están dentro de un círculo unitario  $|z| = 1$  en el plano complejo  $z$ . Si uno o más polos están fuera del círculo unitario entonces el sistema es inestable. Si uno o más polos distintos están sobre el círculo unitario  $|z| = 1$ , con todos los otros polos dentro, entonces el sistema se dice marginalmente estable.

**Ejercicio 6.1.** Determine si el siguiente sistema especificado por su función de transferencia

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - z + \frac{1}{2}}$$

es estable.

**Solución 6.2.** El sistema de polos está determinado por

$$z^2 - z + \frac{1}{2} = \left(z - \frac{1}{2}(1+i)\right)\left(z - \frac{1}{2}(1-i)\right) = 0$$

cuyos polos son  $z_1 = \frac{1}{2}(1+i)$  y  $z_2 = \frac{1}{2}(1-i)$  y sus módulos están dados por  $|z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ , y con esto podemos asegurar que están dentro del círculo unitario y por tanto el sistema es estable.

**Ejercicio 6.3.** Determine si el siguiente sistema especificado por su función de transferencia

$$G(z) = \frac{z^2}{z^3 - 3z^2 + \frac{5}{2}z - 1}$$

es estable.

**Solución 6.4.** El sistema de polos está determinado por

$$z^3 - 3z^2 + \frac{5}{2}z - 1 = (z-2)\left(z - \frac{1}{2}(1+i)\right)\left(z - \frac{1}{2}(1-i)\right) = 0$$

cuyos polos son  $z_1 = \frac{1}{2}(1+i)$ ,  $z_2 = \frac{1}{2}(1-i)$  y  $z_3 = 2$ , sus módulos están dados por  $|z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , y  $|z_3| = 2$ , podemos observar que  $z_1$  y  $z_2$  están dentro del círculo unitario pero  $z_3$  está fuera de él y por tanto el sistema es inestable.

De acuerdo con lo establecido, para probar la estabilidad debemos probar que todas las raíces de la ecuación característica están dentro del círculo unitario  $|z| = 1$ , existen algunos criterios para probar esta propiedad, y el más utilizado en la práctica es el criterio de estabilidad de Jury.

**6.1. Criterio de estabilidad de Jury.** Conocido también como criterio de Jury-Blanchard da las condiciones necesarias y suficientes para que las raíces de  $Q(z)$  se hallen en el interior del círculo unitario (condición de estabilidad estricta).

Ha de verificarse:

$$Q(1) > 0, \quad (-1)^n Q(-1) > 0$$

y además han de cumplirse las (n-1) restricciones

$$|a_0| < a_n; \quad |b_0| > |b_{n-1}|; \quad |c_0| > |c_{n-2}|; \quad |q_0| > |q_2|$$

donde  $b_i, c_i, \dots, q_1$ , se obtienen de la tabulación de Jury.

Fila	1	$z$	$z^2$	$z^3$	$\dots$	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	$\dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_{n-4}$	$\dots$	$b_1$	$b_0$	
5	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	$c_{n-2}$		
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$c_{n-5}$	$\dots$	$c_0$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$2n-5$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$				
$2n-4$	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$				
$2n-3$	$q_0$	$q_1$	$q_2$					

Los elementos de la tabla quedan definidos por

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}; \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}; \dots$$

este criterio se utilizara más adelante para probar la estabilidad de los sistemas dinámicos discretos.

### 7. SISTEMAS DINÁMICOS

Un sistema dinámico se refiere a un proceso o sistema que cambia con el tiempo y que puede ser controlado mediante la aplicación de técnicas de control [1, 2]. Estos

sistemas pueden ser muy complejos y pueden estar sujetos a una amplia variedad de factores que influyen en su comportamiento, como las condiciones ambientales, la variabilidad en los materiales o la interacción con otros sistemas [2, 3].

Algunos ejemplos de sistemas dinámicos en control de procesos incluyen:

- Control de temperatura en un reactor pirolítico: En este caso, el sistema dinámico es el proceso de degradación térmica de residuos plásticos urbanos en un reactor pirolítico, que cambia con el tiempo debido a la variación de la temperatura y la composición de los residuos [2]
- Producción de microalgas en fotobiorreactores industriales: En este caso, el sistema dinámico es el proceso de producción de microalgas en un fotobiorreactor, que cambia con el tiempo debido a las variaciones en las condiciones ambientales y a la interacción entre los microorganismos y el medio ambiente [2]
- Programación de producción y control de procesos en línea en la industria cerámica: En este caso, el sistema dinámico es el proceso de producción de cerámica, que cambia con el tiempo debido a la variabilidad en los materiales y a la interacción entre los procesos productivos [3]

De forma general, se puede definir un sistema dinámico en ecuaciones diferenciales ordinarias de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), d(t)) \quad (10)$$

$$y = g(\mathbf{x}(t)) \quad (11)$$

donde  $\mathbf{x}$  representa las variables de estado,  $u$ , es la variable de entrada o de control,  $d$  representa la variable de disturbio o perturbación, mientras que  $y$  representa la variable de salida o a controlar.

## 8. LINEALIZACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

Para procesos continuos, el modelo linealizado se basa en una condición nominal del estado estacionario. El modelo es relativamente preciso en una región cercana a las condiciones nominales, pero se vuelve menos preciso para grandes cambios en las condiciones de operación o grandes perturbaciones. La linealización se utiliza con menor frecuencia en procesos por lotes y semi continuos, que operan inherentemente durante condiciones transitorias. En muchos casos, los procesos no lineales permanecen cerca de las condiciones nominales durante períodos prolongados de tiempo. Para estas situaciones, un modelo linealizado puede ser suficientemente preciso [4].

Para la linealización del sistema dinámico se utiliza la expansión en series de Taylor alrededor del estado estacionario por lo que la ecuación (10) nos da

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s, u_s, d_s) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_s (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_s (u(t) - u_s) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial d} \right|_s (d(t) - d_s) \quad (12)$$

donde el subíndice  $s$  representa la condición de estado estacionario. Si a la ecuación (10) es evaluada en el estado estacionario

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_s = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s, u_s, d_s) = 0 \quad (13)$$

y al restar la ecuación (12) con la (13), se obtiene

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_s (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_s (u(t) - u_s) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial d} \right|_s (d(t) - d_s) \quad (14)$$

de igual forma si se expande en series de Taylor la ecuación (11)

$$y(t) = g(\mathbf{x}_s, u_s, d_s) + \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_s = y_s + \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_s \quad (15)$$

y definiendo como variables de desviación (del estado estacionario)

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s \quad (16)$$

$$\bar{u}(t) = u(t) - u_s \quad (17)$$

$$\bar{d}(t) = d(t) - d_s \quad (18)$$

$$\bar{y}(t) = y(t) - y_s \quad (19)$$

y a las matrices o vectores como

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_s \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_s \quad (21)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial d} \right|_s \quad (22)$$

$$\mathbf{C} = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_s \quad (23)$$

Se obtiene la representación en el espacio de estados

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{\Gamma}\bar{\mathbf{d}}(t) \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (25)$$

que como característica especial que tiene este sistema dinámico es que sus condiciones iniciales son cero.

## 9. SEÑALES DISCRETAS

Una señal discreta es una señal que toma valores en momentos discretos en el tiempo, en contraposición a una señal continua, que toma valores en todo momento en el tiempo. En otras palabras, una señal discreta es una señal que ha sido muestreada en momentos específicos en el tiempo y que solo toma valores en esos momentos. Las señales discretas se utilizan comúnmente en el procesamiento de señales y el control de sistemas dinámicos, ya que permiten una representación más fácil y manejable de las señales que las señales continuas. El muestreo de señales continuas para obtener señales discretas se realiza mediante un proceso de discretización, que implica la selección de un intervalo de tiempo y la medición de la señal en puntos discretos dentro de ese intervalo [5].

## 10. TEOREMA DEL MUESTREO

El Teorema del muestreo para sistemas discretos es un principio fundamental en el procesamiento de señales y el control de sistemas dinámicos. En resumen, consiste en que para poder reconstruir una señal continua a partir de su versión discreta, es necesario muestrear la señal a una frecuencia al menos dos veces mayor que la frecuencia máxima de la señal original, lo que se conoce como la frecuencia de Nyquist. De lo contrario, se produce un fenómeno conocido como aliasing, que puede introducir errores y distorsiones en la señal reconstruida [6].

**10.1. Reglas empíricas.** Las reglas empíricas para determinar el tiempo de muestreo son métodos basados en la experiencia y la observación que se utilizan para determinar la frecuencia de muestreo adecuada en diferentes situaciones. Aunque no existe una regla única y universal para determinar el tiempo de muestreo, algunas reglas empíricas comunes son:



- **Regla de Nyquist:** Esta regla establece que la frecuencia de muestreo debe ser al menos dos veces mayor que la frecuencia máxima de la señal que se está muestreando, lo que se conoce como la frecuencia de Nyquist
- **Regla de Shannon:** Esta regla establece que la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia más alta presente en la señal que se está muestreando [7]
- **Regla del 1 % al 5 %:** Esta regla establece que el tiempo de muestreo debe ser de 1 % a 5 % del tiempo de respuesta del sistema [8].
- **Regla del tiempo de subida:** Esta regla establece que el tiempo de muestreo debe ser al menos diez veces menor que el tiempo de respuesta del sistema [6].

Para poder determinar el tiempo de respuesta de un sistema dinámico se deben de calcular los valores propios,  $\lambda_i$  de la matriz **A**

$$\tau = \text{máx} \left\{ \frac{1}{|\text{Re}(\lambda_1)|}, \frac{1}{|\text{Re}(\lambda_2)|}, \dots, \frac{1}{|\text{Re}(\lambda_n)|} \right\} \quad (26)$$

## 11. MUESTREADOR IDEAL

Un muestreador ideal es un dispositivo teórico que se utiliza para muestrear señales continuas y convertirlas en señales discretas. Este dispositivo se considera ideal porque no introduce ningún tipo de distorsión o error en la señal muestreada, lo que significa que la señal discreta resultante es una representación exacta de la señal continua original. Físicamente, está definido como un muestreador que abre y cierra de manera instantánea, en tiempo cero, cada  $T$  segundos por lo que la salida del muestreador ideal se expresa como

$$f^*(t) = f(t) \delta(t - kT) \quad (27)$$

donde

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t=0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (28)$$

## 12. DISCRETIZACIÓN DE UN SISTEMA DINÁMICO

Un sistema dinámico continuo puede ser descrito por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (29)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (30)$$

Para facilitarnos los cálculos se supondrá que las condiciones están ancladas en el origen, Si multiplicamos el sistema dinámico por el factor integrante

$$e^{-\mathbf{A}t} \left( \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \right) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B}u(t) \quad (31)$$

$$\frac{d}{dt} (e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t)) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B}u(t) \quad (32)$$

e integrando en ambos lados de la ecuación

$$e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\eta} \mathbf{B}u(\eta) d\eta \quad (33)$$

Si evaluamos este sistema en un tiempo  $t = kT$

$$e^{-\mathbf{A}kT} \mathbf{x}[kT] = \int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\eta} \mathbf{B}u(\eta) d\eta \quad (34)$$

y hacemos lo mismo para un tiempo  $t = (k+1)T$

$$e^{-\mathbf{A}(k+1)T} \mathbf{x}[(k+1)T] = \int_0^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\eta} \mathbf{B}u(\eta) d\eta \quad (35)$$

restando ambas ecuaciones

$$e^{-\mathbf{A}(k+1)T} \mathbf{x}[(k+1)T] - e^{-\mathbf{A}kT} \mathbf{x}[kT] = \int_0^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\eta} \mathbf{B}u(\eta) d\eta - \int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\eta} \mathbf{B}u(\eta) d\eta \quad (36)$$

el cual se puede simplificar de la siguiente forma

$$e^{-\mathbf{A}(k+1)T} \mathbf{x}[(k+1)T] = e^{-\mathbf{A}kT} \mathbf{x}[kT] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\eta} \mathbf{B}u(\eta) d\eta \quad (37)$$

la ventaja de escribir la integral de esta forma es que la variable de entrada se mantiene constante siempre y cuando este medido entre un intervalo de tiempo de muestreo, por lo que la integral se puede simplificar como

$$\begin{aligned} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\eta} \mathbf{B} u(\eta) d\eta &= - \int_{kT}^{(k+1)T} -e^{-A\eta} \mathbf{A} d\eta \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} u[kT] \\ &= -(e^{-A(k+1)T} - e^{-AkT}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} u[kT] \end{aligned} \quad (38)$$

sustituyendo el resultado de la integral

$$e^{-A(k+1)T} \mathbf{x}[(k+1)T] = e^{-AkT} \mathbf{x}[kT] - (e^{-A(k+1)T} - e^{-AkT}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} u[kT] \quad (39)$$

y despejando el término de  $\mathbf{x}[(k+1)T]$  obtenemos

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{AT} \mathbf{x}[kT] + (e^{AT} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} u[kT] \quad (40)$$

definiendo a

$$\bar{\mathbf{A}} = e^{AT} \quad (41)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = (e^{AT} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (42)$$

Por lo que el sistema discretizado esta dado por

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}[kT] + \bar{\mathbf{B}} u[kT] \quad (43)$$

$$y[kT] = \mathbf{C} \mathbf{x}[kT] \quad (44)$$

Al pasar por este proceso de discretización podemos observar que las matrices  $\bar{\mathbf{A}}$  y  $\bar{\mathbf{B}}$ , son matrices de coeficientes constantes.

### 13. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PARA UN SISTEMA LINEALIZADO

Una función de transferencia es una herramienta matemática utilizada en el análisis y diseño de sistemas dinámicos. En términos generales, una función de transferencia describe la relación entre la entrada y la salida de un sistema, en términos de su comportamiento en el dominio de la frecuencia. Es decir, la función de transferencia es una representación matemática de cómo un sistema responde a diferentes frecuencias de entrada. En el contexto del control digital, las funciones de transferencia se utilizan para modelar y analizar sistemas de control discretos, y se pueden utilizar para diseñar controladores que proporcionen una respuesta deseada del sistema. Las funciones de transferencia se expresan sustancialmente en términos de la transformada de Laplace

o la transformada  $\mathcal{Z}$ , y se pueden representar gráficamente mediante diagramas de bloques. Retomando el sistema discreto (43), aplicando la transformada  $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{x}[(k+1)T]\} = \mathcal{Z}\{\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}[kT] + \bar{\mathbf{B}}u[kT]\} \quad (45)$$

obtenemos

$$zx(z) - x[0] = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(z) + \bar{\mathbf{B}}u(z) \quad (46)$$

recordemos que las condiciones iniciales para este sistema es cero, podemos factorizar y despejar el término  $x(z)$

$$x(z) = (z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}u(z) \quad (47)$$

también aplicamos la transformada  $\mathcal{Z}$  al término de la salida (44)

$$\mathcal{Z}\{y[kT]\} = \mathcal{Z}\{\mathbf{C}\mathbf{x}[kT]\} \quad (48)$$

$$y(z) = \mathbf{C}x(z) \quad (49)$$

sustituyendo (47) en (49)

$$y(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}u(z) \quad (50)$$

del cual podemos definir la función de transferencia

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{B}} \quad (51)$$

#### 14. CASO DE ESTUDIO

En la elaboración de etanol en un biorreactor implica la fermentación de materiales orgánicos como madera, sacarosa, almidón y celulosa, entre otros. Los microorganismos que realizan la fermentación, incluida la levadura *Saccharomyces cerevisiae* y la bacteria *Zymomonas mobilis*, las cuales convierten los azúcares fermentables en alcohol etílico. Este tipo de procesos se pueden llevar en varios tipos de biorreactores, incluidos de tambor horizontal, columna y lecho fluidizado. Este tipo de procesos es una alternativa prometedora en la producción de biocombustibles a partir de fuentes sostenibles y renovables.

El modelo que representa como cambian las concentraciones del sustrato  $S$  (azúcares) y la biomasa  $X$  (microorganismos), puede ser representado por el siguiente sistema dinámico

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\mu X / Y_{X/S} + D(S_f - S) \\ \frac{dX}{dt} &= \mu X - DX \\ y &= S\end{aligned}$$

donde la cinética bioquímica para este proceso es la cinética de Monod la cual se expresa como

$$\mu = \frac{\mu_{max} S}{K_m + S}$$

para este sistema utilizaremos los siguientes parámetros  $\mu_{max} = 0.53h^{-1}$ ,  $Y_{X/S} = 0.4g/g$ ,  $S_f = 4g/L$ ,  $K_m = 0.12g/L$  y  $K_I = 0.4L/g$ , con una tasa de dilución ( $D$ ) de  $0.25h^{-1}$ .

El primer paso para abordar este sistema es obtener los estados estacionarios igualando las ecuaciones diferenciales a cero

$$\begin{aligned}0 &= -\mu X / Y_{X/S} + D(S_f - S) \\ 0 &= \mu X - DX\end{aligned}\tag{52}$$

de la segunda ecuación podemos observar que al factorizar tenemos las siguientes soluciones

$$X(\mu - D) = 0$$

el caso en el que  $X = 0$ , será ignorado ya que esto implicaría que no hay presencia de biomasa en el bioreactor, por lo que nos quedaríamos con la otra solución

$$\mu = \frac{\mu_{max} S}{K_m + S} = D$$

del cual podemos despejar a  $S$  en términos de los parámetros y la tasa de dilución

$$S_s = \frac{DK_m}{\mu_{max} - D} = \frac{0.25(0.12)}{0.53 - 0.25} = 0.1071 \text{ g/L}$$

Retomando la primera ecuación, como  $\mu = D$

$$0 = -DX/Y_{X/S} + D(S_f - S) = D(-X/Y_{X/S} + (S_f - S))$$

del cual podemos despejar a  $X$

$$X_s = Y_{X/S}(S_f - S_s) = 0.4(4 - 0.1071) = 1.5571 \text{ g/L}$$

El siguiente paso es la linealización del sistema, por lo que al definir

$$\begin{aligned} f_1 &= -\mu X/Y_{X/S} + D(S_f - S) \\ f_2 &= \mu X - DX \end{aligned}$$

(53)

debemos calcular las siguientes derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S}(-\mu X/Y_{X/S} + D(S_f - S)) = -\frac{\mu X}{S Y_{X/S}} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_{max}}\right) - D \\ \frac{\partial f_1}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X}(-\mu X/Y_{X/S} + D(S_f - S)) = -\frac{\mu}{Y_{X/S}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S}(\mu X - DX) = \frac{\mu X}{S} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_{max}}\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X}(\mu X - DX) = \mu - D \end{aligned}$$

Al sustituir los estados estacionarios obtenemos

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = -5.0504$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial X} = -0.6249$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S} = 1.9202$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial X} = 0$$

Por lo que podemos utilizar (20) para definir a la matriz **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial X} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.0504 & -0.6249 \\ 1.9202 & 0 \end{pmatrix}$$

también se debe de calcular

$$\frac{\partial f_1}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} (-\mu X / Y_{X/S} + D(S_f - S)) = S_f - S$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} (\mu X - DX) = -X$$

sustituyendo los parámetros y los estados estacionarios

$$\frac{\partial f_1}{\partial D} = 3.8929$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial D} = -1.5571$$

definiendo al vector **B** con la ecuación (21)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial D} \\ \frac{\partial f_2}{\partial D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.8929 \\ -1.5571 \end{pmatrix}$$

Para la variable de salida, debemos definir a

$$g = S$$

entonces

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}(S) = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}(S) = 0$$

para finalizar la linealización, definimos a  $\mathbf{C}$  con (23)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial X} \end{pmatrix} = (1 \quad 0)$$

después de la linealización debemos calcular los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -5.0504 - \lambda & -0.6249 \\ 1.9202 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5.0504\lambda + 1.1999 = 0$$

Al calcular las raíces de los valores propios del sistema  $\lambda_1 = -4.8$  y  $\lambda_2 = -0.25$ , podemos calcular el tiempo de respuesta con la ecuación (26)

$$\tau = \text{máx} \left\{ \frac{1}{|-4.8|}, \frac{1}{|-0.25|} \right\} = 4h$$

Al utilizar la regla del tiempo de subida, podemos obtener el tiempo de muestreo

$$T = \frac{\tau}{10} = 0.4h = 24min$$

Para discretizar al sistema debemos usar las ecuaciones (41) y (42) y tomando un tiempo de respuesta de  $0.4h$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0.1049 & -0.1041 \\ 0.3200 & 0.9465 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0.6921 \\ -0.2768 \end{pmatrix}$$

ya con estos estos parámetros podemos calcular la función de transferencia del sistema sustituyendo en la ecuación (51)



$$G(z) = (1 \quad 0) \left( \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1049 & -0.1041 \\ 0.3200 & 0.9465 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0.6921 \\ -0.2768 \end{pmatrix} = \frac{5.218z - 4.722}{7.54z^2 - 7.927z + 1}$$

Para determinar la estabilidad del sistema bajo un sistema de control utilizaremos la siguiente ecuación

$$1 + k(1 - z^{-1})G(z) = 0 \quad (54)$$

donde el parámetro  $k$  representa un controlador proporcional (al error) y el término  $1 - z^{-1}$  representa un retenedor de orden cero, el cual mantiene constante la señal entre mediciones, por lo que al sustituir se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + k \left( \frac{z-1}{z} \right) \frac{5.218z - 4.722}{7.54z^2 - 7.927z + 1} \\ 0 &= z(7.54z^2 - 7.927z + 1) + k(z-1)(5.218z - 4.722) \end{aligned}$$

al desarrollar y factorizar podemos obtener el polinomio característico del sistema

$$P(z) = 7.54z^3 + (5.218k - 7.927)z^2 + (1 - 9.94k)z + 4.722k = 0$$

Con el polinomio característico podemos aplicar el criterio de estabilidad de Jury, para poder implementarlo debemos identificar los coeficientes del polinomio, entonces podemos decir que los coeficientes son

$$\begin{aligned} a_3 &= 7.54 \\ a_2 &= 5.218k - 7.927 \\ a_1 &= 1 - 9.94k \\ a_0 &= 4.722k \end{aligned}$$

El criterio de estabilidad de Jury, nos dice que se debe de cumplir

$$\begin{aligned}
 P(1) &> 0 \\
 (-1)^3 P(-1) &> 0 \\
 |a_0| &< a_3 \\
 |b_0| &> |b_2|
 \end{aligned}$$

donde

$$b_j = \begin{vmatrix} a_0 & a_{3-j} \\ a_3 & a_j \end{vmatrix}$$

para que el sistema sea estable. Como podemos observar los parámetros que debemos calcular son  $b_0$  y  $b_2$  entonces, para  $j = 1$

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4.722k & 7.54 \\ 7.54 & 4.722k \end{vmatrix} = 22.2973k^2 - 56.8516$$

y para  $j = 2$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4.722k & 1 - 9.94k \\ 7.54 & 5.218k - 7.927 \end{vmatrix} = 24.6394k^2 + 37.5163k - 7.54$$

Con los coeficientes listos podemos empezar a utilizar uno a uno el criterio de estabilidad de Jury, por lo que al evaluar el polinomio característico en  $z = 1$

$$P(1) = 7.54 - 7.927 + 1 + k(5.218 - 9.94 + 4.722) = 0.6130 > 0$$

al evaluar el polinomio característico en  $z = -1$

$$(-1)^3 P(-1) = (-1)(-16.4670 + 19.88k) > 0$$

del cual podemos encontrar que para que el sistema sea estable se debe de cumplir que

$$k_1 < 16.4670/19.88 = 0.8283$$

además al sustituir en

$$\begin{aligned}
 |a_0| &< a_3 \\
 |4.722k| &< 7.54
 \end{aligned}$$

por lo que

$$-1.5968 < k_2 < 1.5968$$

para el ultimo término sabemos que

$$|b_0| > |b_2|$$

$$|22.2973k^2 - 56.8516| > |24.6394k^2 + 37.5163k - 7.54|$$

que puede ser escrito como

$$\left| \frac{24.6394k^2 + 37.5163k - 7.54}{22.2973k^2 - 56.8516} \right| < 1$$

al quitar el valor absoluto obtenemos

$$-1 < \frac{24.6394k^2 + 37.5163k - 7.54}{22.2973k^2 - 56.8516} < 1$$

de la cual podemos analizarla por partes, entonces si tomamos la primera parte

$$-1 < \frac{24.6394k^2 + 37.5163k - 7.54}{22.2973k^2 - 56.8516}$$

$$0 < 1 + \frac{24.6394k^2 + 37.5163k - 7.54}{22.2973k^2 - 56.8516} = \frac{46.9367k^2 + 37.5163k - 64.3916}{22.2973k^2 - 56.8516}$$

de aquí obtenemos que la solución para  $k$  es

$$k_3 \in (-\infty, -1.6372) \cup (-1.5968, 0.8380) \cup (1.5968, \infty)$$

tomando la segunda parte

$$\frac{24.6394k^2 + 37.5163k - 7.54}{22.2973k^2 - 56.8516} < 1$$

$$-1 + \frac{24.6394k^2 + 37.5163k - 7.54}{22.2973k^2 - 56.8516} = \frac{2.3421k^2 + 37.5163k + 49.3116}{22.2973k^2 - 56.8516} < 0$$

al resolver la desigualdad obtenemos que

$$k_4 \in (-14.5722, -1.5968) \cup (-1.4448, 1.5968)$$

Para obtener la solución de este sistema se debe de calcular la intersección de cada sistema

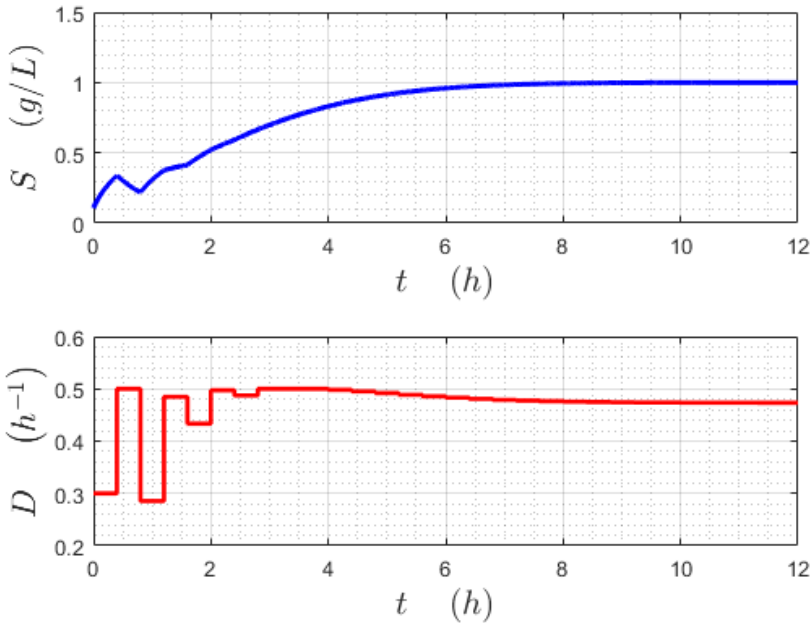
$$k = k_1 \cap k_2 \cap k_3 \cap k_4$$

$$k \in (-1.4448, 0.8283)$$

Con este parámetro podemos implementar un controlador al bioreactor, en este caso lo que queremos hacer es controlar la concentración del sustrato, por lo que para utilizar este parámetro, calcularemos a

$$Kc = \frac{0.8283}{1.7}$$

qué es el parámetro recomendado para un controlador proporcional, integral diferencial por Ziegler-Nichols



Para este sistema podemos observar que se desea que la concentración de sustrato ( $S$ ), llegue al valor de referencia de  $1g/L$ , por lo que al implementar el controlador discreto al hacer mediciones cada  $0.4h$ , podemos observar que la variable de entrada,

la tasa de dilución ( $D$ ), cambia y se mantiene constante por una cantidad de tiempo igual a la del tiempo de muestreo, la ventaja de esto es que al muestrear al sustrato de forma discreta la cantidad de recursos para realizar estas titulaciones, es muchísimo menor a que se hiciera de forma continua.

El código de Matlab para llevar a cabo la simulación del proceso se presenta a continuación.

```

function CervezaPID
clc, close all
T=0.4; % tiempo de muestreo
N=30; % Numero de muestras
Sr=1; % Valor de referencia
x0=[0.1072 1.5571]; %Condiciones iniciales
u=zeros(N+1,1);
u(1,1)=0.3;
E=zeros(N+2,1);
Kc=0.8283/1.7;
for i=1:1:N
    if i==1
        E(i+2,1)=Sr-x0(1);
        u(i+1,1)=PIDd(u(i,1),E(i+2),E(i+1),E(i),Kc,T,0,0.5);
        [t,x]=ode23tb(@(t,x)RCTA(t,x,u(i+1))),...
            linspace(0,T,101),x0);
        x0=x(end,:);
    else
        E(i+2,1)=Sr-x0(1);
        u(i+1,1)=PIDd(u(i,1),E(i+2),E(i+1),E(i),Kc,T,0,0.5);
        [ta,xa]=ode23tb(@(t,x)RCTA(t,x,u(i+1))),...
            linspace((i-1)*T,i*T,101),x0);
        t=[t;ta]; %#ok
        x=[x;xa]; %#ok
        x0=x(end,:);
    end
end
tm=0:T:N*T;
tm=tm';

```

```

[tr,Fr]=ROC(tm,u);
A={'$t\_quad\_left(h\right)$'};
B={'$S\_quad\_left(g/L\right)$','$X\_quad\_left(g/L\right)$'};
C={'$D\_quad\_left(h^{-1}\right)$'};
for i=1:1:2
    figure(i)
    subplot(2,1,1)
    plot(t,x(:,i),'b','LineWidth',2)
    grid on, grid minor
    xlabel(A,'Interpreter','latex','FontSize',16)
    ylabel(B{1,i},'Interpreter','latex','FontSize',16)
    subplot(2,1,2)
    plot(tr,Fr,'r','LineWidth',2)
    axis([0,N*T,0.2,0.6])
    grid on, grid minor
    xlabel(A,'Interpreter','latex','FontSize',16)
    ylabel(C,'Interpreter','latex','FontSize',16)
end
end
function dx=RCTA(~,x,D)
%% Variables de estado
S=x(1); X=x(2);
%% Parametros
mmax=0.53;% 1/h
Km=0.12; % g/L
Yxs=0.4;
Sf=4; % g/L
%% Ecuaciones auxiliares
m=mmax*S/(Km+S);
%% Ecuaciones diferenciales
dS=-X*m/Yxs+D*(Sf-S);
dX=(m-D)*X;
dx=[dS;dX];
end
function Ck=PIDd(Ck1,ek,ek1,ek2,Kc,T,umin,umax)
tauI=2*T/0.45;

```

```

tauD=2*T/6.3;
a=1+T/tauI+tauD/T;
b=-1-2*tauD/T;
c=tauD/T;
Ck=Ck1+Kc*(a*ek+b*ek1+c*ek2);
if Ck<umin
    Ck=umin;
end
if Ck>umax
    Ck=umax;
end
end
function [tr,Fr]=ROC(tm,Fm)
[n,m]=size(Fm);
tr=zeros(2*n-1,1);
Fr=zeros(2*n-1,m);
tr(1,1)=tm(1,1);
Fr(1,:)=Fm(1,:);
for i=1:n-1
    tr(2*i,1)=tm(i+1,1);
    tr(2*i+1,1)=tm(i+1,1);
    Fr(2*i,:)=Fm(i,:);
    Fr(2*i+1,:)=Fm(i+1,:);
end
end

```

#### REFERENCIAS

- [1] Pittol, JA, Peña, A. y Mirena, J. (2018). Integración entre MATLAB y STARDOM FCN-RTU para la simulación de algoritmos de control de procesos MATLAB-STARDOM FCN-RTU integración para la simulación de algoritmos de control de procesos.
- [2] Hernández, O.A., Quiroz, E.T., and Prieto, E.M. (2018). Simulation of a Temperature Control System in a Pyrolysis Reactor of Municipal Plastic Waste.
- [3] Guzmán, J.L., Ación, F.G., y Berenguel, M.D. (2020). Modelado y control de la producción de microalgas en fotobiorreactores industriales. Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial.

- [4] Seborg, D. E., Edgar, T. F., Mellichamp, D. A., and Doyle III, F. J. (2016). Process dynamics and control. John Wiley and Sons.
- [5] González, KG (2017). Conversión del Dominio Discreto en Dominio Continuo: Otro Enfoque De Aprendizaje.
- [6] Bencomo, SD, Parte, MD y García, HR (1980). Compensacion de sistemas discretos variando el periodo de prueba.
- [7] Sanson-Fisher RW, Poole AD, Dunn J. An empirical method for determining an appropriate interval length for recording behavior. J Appl Behav Anal. 1980 Fall;13(3):493-500.
- [8] Torres-Sospedra, J., Richter, P, Moreira, A.J., Mendoza-Silva, G.M., Lohan, E.S., Trilles, S., Matey-Sanz, M., and Huerta, J. (2022). A Comprehensive and Reproducible Comparison of Clustering and Optimization Rules in Wi-Fi Fingerprinting. IEEE Transactions on Mobile Computing, 21, 769-782.
- [9] Churchill, R. V., Ward Brown, J. (2009). Complex Variables and Applicatios. New York: McGraw-Hill, ISBN: 978-0-07-305194-9.
- [10] Jerrold E. Marsden, M. J. Hoffman (1998). Basic Complex Analysis. New York: W. H. Freeman, ISBN: 978-1464152191.
- [11] James, G. (2002). Matemáticas avanzadas para ingeniería. México: Prentice Hall, ISBN: 9789702602095.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS, UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, BLVD. GRAL. MARCELINO GARCÍA BARRAGÁN 1421, OLÍMPICA, 44430, GUADALAJARA JALISCO

*E-mail address:* ricardo.aguila@academicos.udg.mx

*E-mail address:* alejandro.navat@academicos.udg.mx

*E-mail address:* martin.munoz@academicos.udg.mx



